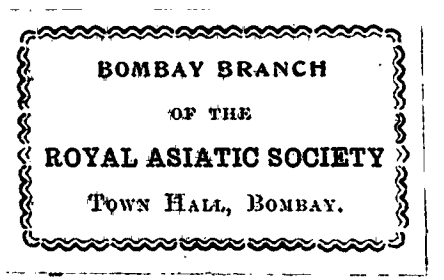
00051999

NOT TO BE ISSUED
OUT OF THE LIBRARY.



Digitized with financial assistance from the
Government of Maharashtra
on 16 January, 2016

TRAITÉ

ÉLÉMENTAIRE

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET

DE CALCUL INTÉGRAL.

S

00051999

IMPRIMERIE DE HUZARD-COURCIER,
rue du Jardinet, n° 12.

TRAITÉ

ÉLÉMENTAIRE

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET

DE CALCUL INTÉGRAL,

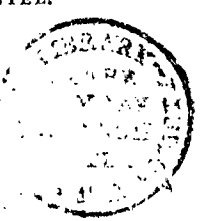
PAR S. F. LACROIX.

B2872

51999

QUATRIÈME ÉDITION,

REVUE, CORRIGÉE ET AUGMENTÉE.



PARIS,

BACHELIER (SUCCESSEUR DE Mme Ve COURCIER),

LIBRAIRE POUR LES MATHÉMATIQUES,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

ET A BRUXELLES,

A LA LIBRAIRIE PARISIENNE.

1828.

9x.9.8

Lac/Tra
51999

AVIS DU LIBRAIRE.

La première édition de ce Traité était précédée de Réflexions sur la manière d'enseigner les Mathématiques, et d'apprécier, dans les examens, le savoir de ceux qui les ont étudiées ; *on ne trouvera point ici ces Réflexions, parce qu'ayant reçu de nouveaux développemens, elles font partie de l'ouvrage que l'Auteur a publié sous le titre d'*Essais sur l'Enseignement en général, et sur celui des Mathématiques en particulier.

Tout Exemplaire du présent Traité qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la signature de l'Auteur, sera contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la Loi, les fabricateurs et les débitans de ces Exemplaires.

Lacroix

Bachelier

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

Calcul différentiel.

NOTIONS *préliminaires et principes de la différentiation des fonctions d'une seule variable*, page 1

Ce qu'on entend par le mot *fonction*, *ibid.*

De la *limite* dont est susceptible le rapport des accroissemens d'une fonction à ceux de la variable dont elle dépend, 3

Définitions relatives au Calcul différentiel, 5

Des différentielles des fonctions égales, et des quantités qui sont les limites d'une même grandeur variable, 8

Détermination de la limite du produit et de celle du quotient de deux quantités qui varient ensemble, 9

Règles pour différentier les fonctions algébriques d'une seule variable, 13

Des différentiations successives, 22

Développement d'une fonction quelconque d'un binôme, ou *Théorème de Taylor*, 25

Théorème de Stirling, pour développer les fonctions, 28

De la différentiation des fonctions transcendantes, 31

Des fonctions exponentielles et de leur développement, *ibid.*

Des fonctions logarithmiques et de leur développement, 35

Des fonctions exponentielles compliquées, 42

Des fonctions circulaires, 43

Développement des fonctions circulaires, 48

De la différentiation des fonctions de deux ou d'un plus grand nombre de variables, 52

Théorème de Taylor, étendu aux fonctions de deux variables, *ibid.*

Identité des coefficiens différentiels obtenus par des différentiations effectuées dans un ordre varié, page 56
Règles pour la différentiation des fonctions de [illegible]s, 58
Distinction entre les *différences* et les *différentielles*, 60
Recherche des coefficiens différentiels des [illegible], 61
Remarques sur les diverses acceptions [illegible] peut indiquer la différentiation des fonctions [illegible]ons qui s'y rapportent, 63
Règle générale pour différentier les fonctions, 64
Du développement en série des fonctions de [illegible]bles, 65

De la différentiation des équations quelconques à deux variables, 66

Règle générale, 69
Formation des différentielles successives d'une équation proposée, 71
De l'élimination des constantes, 75
De celle des fonctions variables, 77
Application au développement des fonctions, 78
Usage du Calcul différentiel pour trouver les racines égales des équations algébriques, 82

Application du Calcul différentiel à la théorie des courbes, 84

Réflexions sur la métaphysique du Calcul différentiel, 85
A quelles lignes correspondent les différentielles, 87
Note sur la manière dont Leibnitz envisageait le Calcul différentiel, *ibid.*
Note sur les différens ordres d'infiniment petits, 89
Comment on reconnaît de quel côté une courbe tourne sa concavité, 91
Limite du rapport de l'arc d'une courbe à la corde qui le soutend, *ibid.*
Expression de la différentielle de l'arc d'une courbe quelconque, 92
Expression de la différentielle de l'aire d'une courbe quelconque, 93
Expressions de la soutangente, de la tangente, de la normale et de la sounormale, 94
Équations de la tangente et de la normale, 96
Des asymptotes des courbes, 100

Des courbes osculatrices, 103

Du cercle osculateur et de sa détermination, page 103
Des osculations et des divers contacts en général, 108
Propriétés du cercle osculateur, 109
Définition de la *courbure* et du rayon de courbure, 110
Propriétés de la développée, 112
Application de la théorie du rayon de courbure, 114

Recherche des points singuliers des courbes, et examen des valeurs particulières que les coefficiens différentiels prennent dans certains cas, 118

Du *maximum* et du *minimum* des ordonnées et des abscisses des courbes, 119
De l'*inflexion* et du *rebroussement*, 121
Du *rebroussement de la seconde espèce*, 124
Des *points multiples*, 125
Des *points isolés* ou *conjugués*, 127
De ce que deviennent les coefficiens différentiels, dans les points singuliers, 128
Comment la série de Taylor tombe en défaut, 130
Règle générale pour découvrir les points singuliers, 135

Recherche des vraies valeurs des expressions qui deviennent $\frac{0}{0}$, 136

Règle générale pour les fonctions données explicitement par une seule variable, 137
——— pour celles qui dépendent d'une équation où les variables sont mêlées, 144
Détermination analytique des *maximums* et des *minimums*, 145

Exemple de l'Analyse d'une courbe, 151

Des courbes transcendantes, 162

De la logarithmique, *ibid.*
De la cycloïde, 165
Des spirales, 171
Des coordonnées polaires, 172
Expressions des différentielles des coordonnées polaires, des soutangentes, etc., 174
Transformation des coordonnées rectangles en polaires, et réciproquement, 177

Transformation, en coordonnées polaires, de l'expression du rayon de courbure, page 182

Du changement de la variable indépendante, ou comment on change la différentielle qu'on a prise pour constante, en une autre qui ne le soit plus, 184

Formules pour transformer une expression différentielle dans laquelle on a supposé constante l'une des différentielles, en une autre où toutes deux soient variables, 185
Passage de cette transformation à une relation donnée, 187
Interprétation géométrique de ces changemens, 189
De la différentiation des équations simultanées, 190
De l'élimination entre deux équations différentielles, *ibid.*

De la différentiation des équations contenant plus d'une variable indépendante, 191

Différentiation des équations à trois variables, *ibid.*
——— à plus de trois variables, 196
Élimination des fonctions arbitraires, 197

Application du Calcul différentiel à la théorie des surfaces courbes, 200

De la génération des surfaces, *ibid.*
Condition de leur continuité, équations différentielles de leurs sections, 203
Des lignes de plus grande pente, des plans tangens et des normales, 206
De la courbure des surfaces, 211

Des points singuliers des surfaces courbes, et des maximums *et* minimums *des fonctions de plusieurs variables,* 215

Procédé analytique pour déterminer ces *maximums* et ces *minimums*, 218

De l'application du Calcul différentiel aux courbes à double courbure, et des surfaces développables, 223

Leurs tangentes, plans osculateurs, différentielle de leur arc, *ibid.*

Des surfaces développables, et des plans normaux des courbes, 224
Des diverses courbures ou *flexions* des courbes, 232

SECONDE PARTIE.

Calcul intégral.

De l'intégration des fonctions rationnelles d'une seule variable, 235

Définition du Calcul intégral, *ibid.*
Note sur l'origine du signe $\int$, et sur les idées de Leibnitz concernant le Calcul intégral, 238
Constantes qu'on peut sortir du signe $\int$, 239
Intégration des fonctions monomes, *ibid.*
——— de la différentielle logarithmique, 240
——— des fonctions fractionnaires, 241
Décomposition des fractions à intégrer, en fractions partielles, et de l'intégration de celles-ci, 243
Procédés abrégés pour opérer cette décomposition, 248
Moyen d'éviter les imaginaires, 252
Exemple, 258

De l'intégration des fonctions irrationnelles, 262

Des fonctions contenant le radical $\sqrt{A+Bx+Cx^2}$, 263
Expressions des sinus et des cosinus en exponentielles imaginaires, 267
Recherche des facteurs de la fonction $x^n \mp a^n$, 270
——— de la fonction $x^{2n} \mp 2px^n + q$, 275

De l'intégration des différentielles binomes, 277

Dans quels cas on les rend rationnelles, *ibid.*
Ce que c'est que l'*intégration par parties*, 279
Procédé pour ramener les différentielles binomes à d'autres plus simples par rapport aux exposans, 280

De l'intégration par les séries, 289

Expression du logarithme, 290
Expression de l'arc de cercle par sa tangente, 291
Distinction des séries en ascendantes et descendantes, *ibid.*
Expression de l'arc de cercle par son sinus, 294

De l'intégration des fonctions logarithmiques et exponentielles, page 298

Des fonctions logarithmiques, *ibid.*
Des fonctions exponentielles, 302

De l'intégration des fonctions circulaires, 305

Conversion des puissances du cosinus et du sinus d'un arc, en cosinus et sinus de ses multiples, 309
Note sur la transformation inverse de la précédente, 314
Intégration immédiate des différentielles de la forme $dz \sin z^m \cos z^n$, 317

Méthode générale pour obtenir les valeurs approchées des intégrales, 322

De la nature des intégrales, et des constantes qu'il faut y ajouter, *ibid.*
Ce qu'on entend par les *limites* d'une intégrale, 323
Intégrales *indéfinies*, intégrales *définies*, ce que c'est, *ibid.*
Séries pour approcher d'une intégrale quelconque, 325
Comment une intégrale est une somme, 329
Limites de sa valeur, 330
Confirmation de ce qui précède, par des considérations géométriques, 331
Application de la méthode ci-dessus, 337
Développement des intégrales par la série de Bernoulli, 340
De l'intégration des fonctions différentielles du second ordre et des ordres supérieurs, 341

Application du Calcul intégral à la quadrature des courbes et à leur rectification, à l'évaluation des volumes terminés par des surfaces courbes et à la quadrature de leurs aires.

De la quadrature des courbes, 344

De celle des paraboles, *ibid.*
De celle des hyperboles et de leurs espaces asymptotiques, 347
Comment ceux de l'hyperbole ordinaire répondent aux logarithmes, 349
Du cercle, de l'ellipse et de l'hyperbole, 351

De leurs secteurs, page 353
De la logarithmique, 356
De la courbe dont l'équation est $y = \frac{a^x}{x}$, *ibid.*
De la cycloïde, 358
Des spirales, 359
De la rectification des courbes, 361
De celle des paraboles, *ibid.*
Du cercle, de l'ellipse et de l'hyperbole, 363
De la cycloïde, 364
Des spirales, 365
De la cubature des corps terminés par des surfaces courbes, de la quadrature de leurs aires, et de l'intégration des différentielles partielles, 366
Des surfaces de révolution, *ibid.*
Des volumes terminés par des surfaces courbes en général, 369
De l'intégration des différentielles partielles, ou des intégrales doubles, 371
Note sur les intégrales définies de ce genre, 372
Application à la sphère, 374
Des intégrales doubles, considérées comme des sommes, 376
Des aires des surfaces courbes en général, 378
Application à la sphère, 379
Des intégrales triples, 380
De l'intégration des différentielles totales contenant plusieurs variables indépendantes, 382
Différentielles à deux variables, *ibid.*
——— à plus de deux variables, 387
Comment on peut différentier sous le signe $\int$, 389
De l'intégration des équations différentielles à deux variables.
De la séparation des variables dans les équations différentielles du premier ordre, 391
Des équations homogènes, 393
De l'équation du premier degré et du premier ordre, 397

De l'équation de *Riccati*, page 399

Recherche du facteur propre à rendre intégrable une équation différentielle du premier ordre, 404

Équation d'où dépend le facteur, 40[illegible]
Théorème des fonctions homogènes, 4[illegible]0

Des équations du premier ordre dans lesquelles les différentielles passent le premier degré, 412

Équations que la différentiation rend plus faciles à intégrer, 417
Exemple d'une *solution particulière*, 419

De l'intégration des équations différentielles du second ordre et des ordres supérieurs, *ibid.*

Développement de l'intégrale d'une équation différentielle d'un ordre quelconque à deux variables, nombre des constantes arbitraires qu'il contient, 420
De la multiplicité des intégrales de ces équations, 424
Intégration de quelques équations qui ne renferment point les variables primitives, 427
——— d'équations qui n'en renferment qu'une, 431
Des équations du premier degré d'un ordre quelconque, 434
Des équations simultanées du premier degré, 450
De l'élimination entre les équations simultanées quelconques du premier ordre, 454

Des solutions particulières des équations différentielles du premier ordre, 456

Leur liaison avec l'intégrale complète, 458
Comment on les déduit de l'équation différentielle, 465

Méthodes pour résoudre par approximation les équations différentielles du premier et du second ordre, 471

Résolution de quelques problèmes géométriques dépendans des équations différentielles, 476

Problèmes des *trajectoires*, 478
De la construction géométrique des équations différentielles, 481
Interprétation géométrique des solutions particulières, 483

De l'intégration des équations différentielles contenant trois ou un plus grand nombre de variables.

Des équations différentielles totales, 486

Conditions nécessaires pour qu'une équation à trois variables où les différentielles ne passent pas le premier degré, puisse avoir pour intégrale une seule équation primitive, 488

Autre condition quand les différentielles sont élevées, 492

Des équations différentielles totales qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité, 493

Intégration des équations différentielles partielles du premier ordre, 496

Note sur les considérations par lesquelles Monge liait l'intégration des équations différentielles partielles avec la génération des surfaces, 504

De l'intégration des équations différentielles partielles des ordres supérieurs au premier, 505

Exemple d'intégrales en séries, 515

De la détermination des fonctions arbitraires dans les intégrales des équations différentielles partielles, 519

De la méthode des variations.

Recherche de la variation d'une fonction quelconque, 520

But de cette recherche, *ibid.*

Note sur la manière dont Euler représente les variations, par des différentielles partielles, 523

Transposition de la caractéristique δ après la caractéristique d, et sous le signe $\int$, *ibid.*

Développement de la variation des fonctions différentielles et des intégrales, 525

Équations de condition qui doivent avoir lieu pour qu'une fonction différentielle soit intégrable par elle-même, 531

Des maximums *et des* minimums *des formules intégrales indéterminées*, page 534

Ce que c'est que les formules intégrales *indéterminées*, *ibid.*
Caractères du *maximum* et du *minimum* de ces formules, 53[illegible]
Des équations qui déterminent la relation entre les variables, 5[illegible]
Des variations relatives aux limites des intégrales proposées, [illegible]37
Recherche de la ligne la plus courte entre deux points, 541
Recherche de la ligne de la plus vite descente, ou *brachystochrone*, 546
Des *maximums* et des *minimums* relatifs, 549
Exemple du problème des *isopérimètres*, *ibid.*

APPENDICE AU TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Des différences et des séries.

Du Calcul direct des différences, 551

Formation de la table des valeurs d'une fonction, par ses différences successives, 553
Notations et principes du Calcul aux différences, 555
Fonctions qui ont des différences constantes, 561
Construction des tables de logarithmes par les différences, *ibid.*

Application du Calcul des différences à l'interpolation des suites, 563

Quand les quantités à interpoler répondent à des indices équidifférens, 564
Quand les indices sont quelconques, 569
Formule de Lagrange, 572
Comment on peut employer à la même interpolation un nombre infini de fonctions diverses, 574
L'interpolation s'applique à la détermination approchée de $\int X dx$, 575

De l'analogie des différences avec les puissances, 577

Passage des différences aux différentielles, et démonstration du théorème de Taylor, *ibid.*

Analogie de la différentiation et de l'élévation aux puissances, page 580
Expression générale des différences par les différentielles, 581
Expression inverse, 582
Application à l'interpolation, 584

Du calcul inverse des différences, par rapport aux fonctions explicites d'une seule variable, 586

Définitions, notations, nature des *constantes arbitraires* à introduire, 588
De l'intégration des fonctions algébriques rationnelles, 589
De l'intégration des fonctions transcendantes, 597
Développement général de $\Sigma^m u$, 599
Analogie des intégrales et des puissances négatives, 603
De l'intégration par parties, *ibid.*

Application du Calcul des différences à la sommation des suites, 605

Séries directes et inverses des *nombres figurés*, 607

De l'intégration des équations aux différences à deux variables, 609

Comparaison des équations aux différences avec les équations différentielles, 611
Intégration de l'équation du premier degré et du premier ordre, 613
Des équations du premier degré dans tous les ordres, 615
Correspondance entre ces équations et les suites récurrentes 619
Construction géométrique des équations aux différences, 621
Des équations où les différences des deux variables sont aussi variables, et problème général qui s'y rapporte, 623
Des équations aux *différences mêlées*, 625

Application du Calcul intégral à la théorie des suites, 626

Sommation des suites par des intégrales, *ibid.*
Sommation des diverses portions de la série de Taylor, 632
Exemples des valeurs particulières que prennent les intégrales définies, 635
Expression de la circonférence du cercle en produits d'un nombre infini de facteurs, due à Wallis, 637
Application des intégrales définies à l'interpolation des suites, 645

Sommation de la suite $lr+l2.....+lx$, page 647
Exemple de l'usage des intégrales définies pour exprimer les intégrales des équations différentielles partielles, 650
Développement des fonctions en séries de sinus et de cosinus d'arcs multiples, 652
Théorèmes de M. Fourier, 655
Autre démonstration donnée par M. Poisson, 674
NOTE A, sur la méthode des limites, 607
NOTE B, sur les logarithmes imaginaires, 674
NOTE C, sur les intégrales doubles et définies, dont le coefficient différentiel devient infini entre les limites données, et sur les intégrales appelées *singulières*, 679

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET DE CALCUL INTÉGRAL.

PREMIÈRE PARTIE.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

Notions préliminaires et principes de la différentiation des fonctions d'une seule variable.

1. Dans cette partie de l'Analyse, on prend pour sujet le passage d'une ou de plusieurs quantités par différens états de grandeur, et les changemens qui en résultent dans d'autres quantités dont la valeur dépend de celle des premières (*).

2. Pour exprimer qu'une quantité dépend d'une ou de plusieurs autres, soit par des opérations quel-

(*) L'ordre et la brièveté m'ont paru demander que l'on séparât les notions préliminaires, purement analytiques, des applications géométriques; mais le lecteur qui croirait avoir besoin, pour fixer ses idées, de voir quelques applications, pourra consulter à la fin du livre, la note A.

conques, soit même par des relations impossibles à assigner algébriquement, mais dont l'existence est déterminée par des conditions certaines, on dit que la première est *fonction* des autres. L'usage de ce mot en éclaircira la signification.

On emploie souvent une lettre comme signe ou *caractéristique* du mot fonction; ainsi les symboles

$$u = f(x), \quad v = F(x), \quad z = \varphi(x),$$

expriment que u, v et z sont diverses fonctions de x.

3. La quantité considérée comme changeant de grandeur, ou pouvant en changer, est appelée *variable*; et l'on donne le nom de *constante* à celle que l'on considère comme conservant toujours la même valeur dans le cours du calcul. On voit d'après cela que c'est la nature de la question proposée qui détermine quelles sont les quantités qu'on doit regarder comme variables ou comme constantes.

4. Pour éclaircir ceci, je vais donner quelques exemples. Soit $u = ax$, a étant regardé comme une constante; u est une fonction de x, de l'ordre le plus simple, puisque c'est une quantité proportionnelle à cette variable. Si l'on suppose que x devienne $x+h$, et qu'on représente par u' la nouvelle valeur de u, on aura.... $u' = ax + ah$, d'où $u' - u = ah$; et en divisant les deux membres par h, il viendra $\frac{u'-u}{h} = a$, c'est-à-dire que le rapport de l'accroissement de la fonction à celui de la variable est indépendant de leur valeur particulière.

Je passe à la fonction un peu plus compliquée $u = ax^2$; en y mettant $x+h$ au lieu de x, il vient

$u' = a(x^2 + 2xh + h^2)$, et en retranchant la première équation de la seconde, $u' - u = 2axh + ah^2$; divisant les deux membres par h, on aura $\frac{u'-u}{h} = 2ax + ah$.

Ici le rapport des accroissemens de la fonction et de la variable est composé de deux parties; l'une ne dépend point de la valeur particulière des accroissemens, et l'autre est affectée de h. Si l'on conçoit que cette quantité aille en diminuant, le résultat s'approchera sans cesse de $2ax$, et n'y atteindra qu'en supposant $h = 0$; en sorte que $2ax$ est la *limite* du rapport $\frac{u'-u}{h}$, c'est-à-dire *la valeur vers laquelle ce rapport tend à mesure que la quantité* h *diminue, et dont il peut approcher autant qu'on le voudra.*

Il est aisé de voir que la différence $u' - u$ s'anéantit toujours en même temps que h, puisque c'est l'existence seule de cette dernière quantité qui donne lieu à la première; cependant leur rapport ne s'anéantit pas : il est de l'espèce de quantités indiquée dans le n° 70 des *Élémens d'Algèbre.*

Lorsque $u = ax^3$, on a, par la substitution de $x + h$ au lieu de x,

$$u' = a(x+h)^3 = ax^3 + 3ax^2h + 3axh^2 + ah^3;$$

en retranchant la première équation de la seconde, on trouve $u' - u = 3ax^2h + 3axh^2 + ah^3$, et prenant le rapport des accroissemens, $\frac{u'-u}{h} = 3ax^2 + 3axh + ah^2$.

On voit encore ici un terme indépendant de toute valeur particulière des accroissemens, et vers lequel leur rapport tend sans cesse, lorsque h diminue, en sorte que ce rapport a aussi une limite qui est $3ax^2$.

Soit encore $u = \frac{a}{x}$; il viendra $u' = \frac{a}{x+h}$, puis $u' - u = \frac{a}{x+h} - \frac{a}{x} = -\frac{ah}{x^2+xh}$, en réduisant au même dénominateur les deux termes du second membre: on trouve ensuite que le rapport des accroissemens $\frac{u'-u}{h} = -\frac{a}{x^2+xh}$, valeur qui ne s'évanouit pas quand $h = 0$, mais atteint la limite $-\frac{a}{x^2}$.

Cet exemple diffère des *précédens*, en ce que la limite $-\frac{a}{x^2}$ ne se montre point à part de l'expression générale; mais pour isoler cette limite, il suffit d'ajouter et de retrancher en même temps $-\frac{a}{x^2}$ au second membre de l'équation ci-dessus, qui devient alors

$$\frac{u'-u}{h} = -\frac{a}{x^2} + \frac{a}{x^2} - \frac{a}{x^2+xh},$$

et de réduire les deux derniers termes au même dénominateur; car on obtient

$$\frac{u'-u}{h} = -\frac{a}{x^2} + \frac{ah}{x^3+x^2h},$$

valeur complète, dont le premier terme est la limite, et dont le second s'évanouit quand $h = 0$.

Ce premier terme, ou cette limite, n'est pas particulier aux fonctions que je viens d'examiner; l'exposition des procédés par lesquels on l'obtient pour toutes les fonctions employées dans les élémens de Mathématiques, et ensuite la considération des courbes (58, 59) montreront évidemment qu'il se rencontre dans toute fonction

en général. Ainsi, *lorsque les accroissemens respectifs d'une fonction et de sa variable s'évanouissent, leur rapport ne s'évanouit pas ; mais il atteint une limite dont il s'est approché par degrés ; et il existe entre cette limite et la fonction dont elle dérive, une dépendance mutuelle qui détermine l'une par l'autre, et réciproquement.*

5. Je ferai d'abord connaître les signes par lesquels on exprime les nouvelles relations que les notions précédentes établissent entre les grandeurs. Pour en montrer la convenance, je reprends la fonction $u = ax^3$, déjà considérée dans le n° 4.

En y mettant $x + h$, au lieu de x, et retranchant la quantité ax^3 du résultat, on a obtenu, dans l'expression

$$u' - u = 3ax^2h + 3axh^2 + ah^3,$$

le développement de la *différence* des deux états de la fonction u, ordonné suivant les puissances de l'accroissement h qu'on suppose à la variable x; et la limite $3ax^2$ du rapport des accroissemens $u' - u$ et h, ne dépend que de la considération du premier terme $3ax^2h$ de cette différence (4). Ce premier terme, qui n'est qu'une portion de la différence, s'appelle *différentielle;* et on le désigne par du, en se servant de la lettre d, initiale du nom, comme d'une caractéristique : on aura donc, dans l'exemple proposé, $du = 3ax^2h$.

Pour passer de là à $3ax^2$, qui est la limite cherchée, il faudra diviser par h, et l'on obtiendra $\frac{du}{h} = 3ax^2$; mais quand il s'agit d'une variable simple, comme la quantité x, qui se change en $x' = x + h$, on a $x' - x = h$; la différence et la différentielle ne sont alors qu'une même chose : on remplace en conséquence la quantité h par le signe dx, afin de mettre de l'uniformité dans les

calculs, et il vient

$$du = 3ax^2dx, \quad \frac{du}{dx} = 3ax^2.$$

La première expression sera la différentielle de u ou de ax^3, et la seconde, qui appartient à la limite du rapport des changemens simultanés de la fonction et de sa variable, prendra le nom de *coefficient différentiel*, parce que la quantité qu'elle représente n'est autre chose que le multiplicateur de la différentielle dx, dans l'expression de la différentielle du. Il suit de là que *la limite du rapport des accroissemens, ou le coefficient différentiel, s'obtiendra en divisant la différentielle de la fonction par celle de la variable*; et réciproquement, *on obtiendra la différentielle en multipliant la limite du rapport des accroissemens, ou le coefficient différentiel, par la différentielle de la variable.*

Cette remarque est importante, parce qu'il y a des fonctions dont le coefficient différentiel se trouve plus facilement que la différentielle. En effet, pour parvenir immédiatement à cette dernière, *il faut écrire* $x + dx$ *au lieu de* x, *dans la fonction proposée, développer le résultat suivant les puissances de* dx, *en s'arrêtant au terme affecté de la première puissance, et retrancher du résultat, l'expression primitive.* On voit que cette méthode suppose qu'on sache développer la fonction proposée, ce qui peut demander des secours étrangers, dont la considération des limites dispense le plus souvent.

D'après ces notions, on peut dire que *le Calcul différentiel est la recherche de la limite du rapport des accroissemens simultanés d'une fonction et de la variable dont elle dépend.*

6. Il faut bien se garder de confondre en général la différentielle avec la différence $u' - u$. En effet, dans l'exemple du n° 4, l'une est $3ax^2h$, et l'autre

$$3ax^2h + 3axh^2 + ah^3;$$

mais on voit que lorsque la quantité h est très petite, la différentielle $3ax^2h$ forme la partie la plus considérable de la différence $u' - u$, et que la différentielle s'approche de plus en plus de la différence, à mesure que h diminue. En général, *il y a d'autant moins d'erreur à prendre la différentielle pour la différence, que l'on suppose plus petite la valeur de l'accroissement de la variable.*

La même conséquence se tire aussi de la considération des limites; car si le rapport des accroissemens simultanés $u' - u$ et h a pour limite une fonction p, et que pour une valeur quelconque de h, on ait

$\frac{u' - u}{h} = P$, ce qui revient à $\frac{u' - u}{h} = p + (P - p)$,

il faudra que la quantité $P - p$ diminue en même temps que h, et s'évanouisse quand $h = 0$: l'équation $\frac{u' - u}{h} = p$ sera donc d'autant plus exacte, que l'accroissement h sera plus petit, et, dans cette hypothèse, $u' - u = ph$ (*).

De là résulte la forme des premiers termes du développement du second état u'. En effet, la quantité $P - p$ s'évanouissant avec h, doit nécessairement avoir cet accroissement au nombre de ses facteurs; et ce qu'on peut

(*) C'est sur ce principe que Leibnitz a fondé le Calcul différentiel, en regardant les différentielles comme des différences infiniment petites.

faire de plus général, est de supposer que $P-p=Qh^n$ l'exposant n étant positif, mais quelconque d'ailleurs, et Q ne devenant pas infini lorsque $h=0$: alors l'équation

$$\frac{u'-u}{h}=p+Qh^n \quad \text{donne} \quad u'=u+ph+Qh^{n+1}.$$

7. Il est aisé de voir que deux fonctions égales ont des différentielles égales; car, lorsque deux fonctions sont égales entre elles, quelle que soit la valeur de la variable dont elles dépendent, il faut que les changemens respectifs qu'elles reçoivent en conséquence de celui qu'on attribue à cette variable, soient toujours égaux. Si, par exemple, u et v désignent des fonctions de x telles que $u=v$, quel que soit x, et que quand x devient $x+\mathrm{d}x$, u se change en u' et v en v', on aura encore $u'=v'$: retranchant de cette équation la précédente, il en résultera

$$u'-u=v'-v;$$

puis divisant par $\mathrm{d}x$, on obtiendra

$$\frac{u'-u}{\mathrm{d}x}=\frac{v'-v}{\mathrm{d}x},$$

quels que soient x et $\mathrm{d}x$. Si donc p et q désignent les limites respectives des rapports ci-dessus, les valeurs générales de ces rapports pourront, d'après ce qui précède, être représentées par $p+\alpha$, $q+\beta$, p et q ne dépendant pas de $\mathrm{d}x$, tandis que α et β décroissent et s'évanouissent en même temps que $\mathrm{d}x$; et l'on aura

$$p+\alpha=q+\beta, \quad \text{d'où} \quad p-q=\beta-\alpha.$$

Il suit de là que $p=q$; car si l'on supposait... $p-q=D$, il en résulterait que la quantité $\beta-\alpha$ ne

pourrait pas tomber au-dessous de D, tandis qu'elle s'évanouit : il faut donc que $D=0$ (*); donc $pdx=qdx$ et $du=dv$, en observant que, d'après le n° 5, pdx et qdx sont les différentielles des fonctions u et v.

L'inverse de cette proposition n'est pas généralement vraie, et l'on aurait tort d'affirmer que deux différentielles égales appartiennent à des fonctions égales. En effet, si l'on avait $a+bx$, en substituant $x+dx$ à x, on obtiendrait $a+bx+bdx$, et en retranchant $a+bx$, on trouverait bdx, résultat dans lequel il ne reste aucune trace de la constante a. La différentielle bdx appartient donc également à $a+bx$ ou à bx, et elle convient en général aux différens cas que présente la fonction $a+bx$, lorsqu'on donne à a toutes les valeurs possibles. On voit aisément par là, que lorsqu'on différentie une fonction quelconque, toutes les constantes séparées des variables par les signes + et — disparaissent tandis que les autres restent dans la différentielle.

8. Avant de passer à la recherche des différentielles par les limites, il faut remarquer,

1°. Que *la limite du produit de deux quantités variables en même temps, est le produit de leurs limites correspondantes*; 2°. que *la limite des quotiens des mêmes quantités, est aussi le quotient de leurs limites.*

En effet, soient P et Q les deux quantités proposées, p et q leurs limites correspondantes; les premières, considérées dans leur état général, peuvent être représentées par $p+\alpha$, $q+\beta$, en désignant par α et β des quantités susceptibles de s'évanouir en même temps, après avoir

(*) Ceci prouve que *lorsque deux quantités sont la limite d'une même quantité variable, elles sont égales entre elles.*

passé par tous les degrés de petitesse (4) : on aura donc en général,

$$PQ = (p + \alpha)(q + \beta) = pq + p\beta + q\alpha + \alpha\beta.$$

Le second membre de cette équation se réduit à pq, lorsque, pour prendre les limites, on fait $\alpha = 0$, $\beta = 0$. On voit d'ailleurs qu'en donnant aux quantités α et β des valeurs convenables, on peut rendre aussi petite qu'on voudra la différence

$$PQ - pq = p\beta + q\alpha + \alpha\beta.$$

Maintenant, si l'on fait $PQ = R$, et $pq = r$, r sera la limite de R; mais puisque $Q = \frac{R}{P}$, $q = \frac{r}{p}$, il s'ensuit que la limite du quotient est aussi le quotient des limites.

9. Au moyen des remarques précédentes on obtient le coefficient différentiel d'une fonction rapportée à une variable dont elle ne dépend pas immédiatement. Soient, en effet, trois quantités v, u, x, telles que la première soit une fonction de la seconde, et celle-ci une fonction de la troisième, c'est-à-dire qu'on ait

$$v = f(u), \quad u = F(x);$$

il semble d'abord qu'il faudrait, par l'élimination de u, obtenir l'expression immédiate de v en x; mais on va voir qu'il n'en est pas besoin. En effet, si ces quantités passent simultanément à un nouvel état de grandeur, représenté par v', u', x', ou prennent les accroissemens respectifs

$$v' - v, \quad u' - u, \quad x' - x,$$

on aura

$$\frac{v' - v}{x' - x} = \frac{v' - v}{u' - u} \times \frac{u' - u}{x' - x};$$

et les limites des trois rapports

$$\frac{v'-v}{x'-x},\quad \frac{v'-v}{u'-u},\quad \frac{u'-u}{x'-x}$$

étant représentées par

$$\frac{dv}{dx},\quad \frac{dv}{du},\quad \frac{du}{dx},$$

on conclura de la première remarque du n° précédent que

$$\frac{dv}{dx}=\frac{dv}{du}\times\frac{du}{dx}\ (*).$$

Pour bien montrer le sens de cette expression, je vais l'appliquer à un exemple, en faisant

$$v=bu^3,\quad u=ax^2.$$

On trouve d'abord, par les n°s 4 et 5,

$$\frac{dv}{du}=3bu^2,\quad \frac{du}{dx}=2ax,$$

et la formule ci-dessus donne ensuite $\frac{dv}{dx}=6abu^2x$, résultat où l'on peut remplacer u^2 par sa valeur a^2x^4, et qui devient alors $6a^3bx^5$. Ainsi l'on a, dans ce calcul, transposé l'élimination de u après la différentiation.

En indiquant cette élimination avec les symboles généraux employés au commencement de cet article,

(*) On pourrait croire d'abord que ce résultat est évident par lui-même, si l'on ne faisait pas attention à la différence qui existe entre le du diviseur de dv, et le du divisé par dx. Le premier est un accroissement simple, complet et indépendant du second, qui n'est qu'une partie de l'accroissement que reçoit u à cause de celui de x (5) : ce n'est qu'en les considérant tous deux comme infiniment petits qu'on pourrait les prendre dans la même acception (6).

on aura $$v = f[F(x)],$$

ce qui veut dire que v est une fonction d'une autre fonction de x; et, d'après ce qui précède, *le coefficient différentiel d'une fonction de fonction s'obtiendra en multipliant l'un par l'autre, les coefficiens différentiels de ces fonctions, rapportées chacune à sa variable immédiate.*

Lorsque deux quantités u et x sont liées par une dépendance mutuelle, on peut dire également que u est fonction de x, ou bien que x est fonction de u, selon que l'on veut regarder u comme déterminé par x, ou x comme déterminé par u; le coefficient différentiel peut aussi se présenter sous chacun de ces points de vue; et comme

$$\frac{x'-x}{u'-u} = \frac{1}{\frac{u'-u}{x'-x}},$$

il suit de la seconde remarque du n° précédent, que

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{\frac{du}{dx}},$$

puisque l'unité étant une quantité constante, est elle-même sa limite.

Soit, par exemple, $u = x^3$, d'où $x = \sqrt[3]{u} = u^{\frac{1}{3}}$; on aura

$$\frac{du}{dx} = 3x^2, \quad \text{et} \quad \frac{dx}{du} = \frac{1}{3x^2},$$

valeur qui revient à $\frac{1}{3u^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}$.

Plus généralement encore, lorsqu'on suppose $v = f(u)$

$x = F(u)$, c'est-à-dire que deux des variables sont exprimées par la troisième, on a $\frac{v'-v}{x'-x} = \frac{\frac{v'-v}{u'-u}}{\frac{x'-x}{u'-u}}$, et par conséquent, à la limite,

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\frac{dv}{du}}{\frac{dx}{du}}.$$

10. Je vais appliquer maintenant ce qui précède à la recherche des différentielles des fonctions qui se présentent dans les Élémens d'Algèbre, c'est-à-dire des sommes, des différences, des produits, des quotiens, des puissances et des racines. Premièrement, lorsque plusieurs quantités dépendantes de x, et dont on sait trouver la différentielle, sont jointes ensemble par addition et soustraction comme dans $u+v-w$, si la substitution de $x+dx$, au lieu de x, doit changer

u en $u+\alpha$, v en $v+\beta$, w en $w+\gamma$,

l'expression $u+v-w$ deviendra

$$u+v-w+\alpha+\beta-\gamma.$$

Son changement, formé des termes $\alpha+\beta-\gamma$, et comparé à l'accroissement dx de la variable x, donnera

$$\frac{\alpha}{dx}+\frac{\beta}{dx}-\frac{\gamma}{dx},$$

quantité dont la limite sera

$$p+q-r,$$

en désignant par p, q, r, les limites respectives des rap-

ports particuliers $\frac{\alpha}{dx}$, $\frac{\beta}{dx}$, $\frac{\gamma}{dx}$; et si l'on multiplie par dx la quantité $p+q-r$, le résultat $pdx+qdx-rdx$ sera la différentielle de la fonction proposée; mais pdx, qdx, rdx, sont les différentielles propres de chacune des fonctions u, v et w, et on les représente par du, dv, dw: on aura donc

$$d(u+v-w)=du+dv-dw,$$

c'est-à-dire que *la différentielle d'une fonction de* x, *composée de plusieurs termes, s'obtiendra en prenant la différentielle de chaque terme avec le signe dont ce terme est affecté.*

11. Secondement, si dans le produit des deux fonctions, u et v, u se change en $u+\alpha$, v en $v+\beta$, ce produit devient

$$uv+u\beta+v\alpha+\alpha\beta;$$

et son accroissement

$$u\beta+v\alpha+\alpha\beta,$$

comparé à dx, donne l'expression

$$u\frac{\beta}{dx}+v\frac{\alpha}{dx}+\frac{\alpha}{dx}\beta.$$

En désignant comme ci-dessus, par p et q, les limites respectives des rapports $\frac{\alpha}{dx}$, $\frac{\beta}{dx}$, puis faisant attention que l'accroissement β s'évanouit en même temps que dx, dont les quantités u et v sont d'ailleurs indépendantes, on reconnaît que la limite du terme $\frac{\alpha}{dx}\beta$ est $p.0$, par conséquent zéro (8), et que celle des deux autres est

$$uq+vp.$$

On conclut de là (5) que la différentielle de uv est

$$uq\mathrm{d}x + vp\mathrm{d}x;$$

mais $q\mathrm{d}x$ et $p\mathrm{d}x$ sont représentés par $\mathrm{d}v$ et $\mathrm{d}u$: donc $\mathrm{d}.uv = u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u$ (*).

La formule $\mathrm{d}.uv = u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u$, nous apprend que *pour avoir la différentielle du produit de deux fonctions, il faut multiplier chacune par la différentielle de l'autre, et ajouter ensemble les deux résultats.*

Quand l'un des facteurs est constant, u par exemple, on a $\mathrm{d}u = 0$, et par conséquent $\mathrm{d}.uv = u\mathrm{d}v$.

Pour obtenir immédiatement cette dernière formule, il ne faut que changer v en $v+\beta$, d'où il résulte l'accroissement $u\beta$, et ensuite le rapport $u\frac{\beta}{\mathrm{d}x}$, dont la limite $uq = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$, et par conséquent $\mathrm{d}.uv = u\mathrm{d}v$.

Si l'on divise les deux membres de l'équation

$$\mathrm{d}.uv = u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u,$$

par la fonction primitive uv, on trouvera

$$\frac{\mathrm{d}.uv}{uv} = \frac{\mathrm{d}u}{u} + \frac{\mathrm{d}v}{v};$$

ce qui conduira facilement à l'expression de la différentielle d'un produit composé d'autant de facteurs qu'on voudra. Pour y parvenir, on supposera que $v = ts$; il viendra

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = \frac{\mathrm{d}.ts}{ts} = \frac{\mathrm{d}t}{t} + \frac{\mathrm{d}s}{s},$$

(*) Lorsque l'on trouve un point après la caractéristique d, cela veut dire qu'elle porte sur tout ce qui la suit immédiatement; ainsi $\mathrm{d}.uv$ est la même chose que $\mathrm{d}(uv)$, et $\mathrm{d}.x^n$ la même chose que $\mathrm{d}(x^n)$.

et par conséquent

$$\frac{\mathrm{d}.uts}{uts} = \frac{\mathrm{d}u}{u} + \frac{\mathrm{d}t}{t} + \frac{\mathrm{d}s}{s};$$

on trouvera de la même manière que

$$\frac{\mathrm{d}.utsr\ldots\text{etc.}}{utsr\ldots\text{etc.}} = \frac{\mathrm{d}u}{u} + \frac{\mathrm{d}t}{t} + \frac{\mathrm{d}s}{s} + \frac{\mathrm{d}r}{r} + \text{etc.}$$

Si l'on fait évanouir les dénominateurs dans l'équation

$$\frac{\mathrm{d}.uts}{uts} = \frac{\mathrm{d}u}{u} + \frac{\mathrm{d}t}{t} + \frac{\mathrm{d}s}{s},$$

on trouvera $\mathrm{d}.uts = ts\mathrm{d}u + us\mathrm{d}t + ut\mathrm{d}s$; et l'on verra aisément que, *quel que soit le nombre des facteurs, la différentielle de leur produit sera égale à la somme des produits de la différentielle de chacun, multipliée par tous les autres.*

2. On obtient la différentielle de $\frac{u}{v}$ en faisant $\frac{u}{v} = t$; car il vient alors $u = vt$, et d'après ce qui précède, $\mathrm{d}u = v\mathrm{d}t + t\mathrm{d}v$; prenant la valeur de $\mathrm{d}t$, et substituant au lieu de t la fraction $\frac{u}{v}$, on aura $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{v} - \frac{u\mathrm{d}v}{v^2}$, ou, en réduisant au même dénominateur,

$$\mathrm{d}t = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2},$$

d'où il résulte que *pour trouver la différentielle d'une fraction, il faut multiplier le dénominateur par la différentielle du numérateur, retrancher de ce produit celui du numérateur par la différentielle du dénominateur, et diviser le tout par le quarré du dénominateur.*

Quand le numérateur de la fraction proposée est constant, u, ne dépendant point de x, n'a point de différentielle, c'est-à-dire que $du=0$, et il vient seulement

$$dt = -\frac{u\,dv}{v^2}.$$

13. La fonction u^n désignant, lorsque n est un nombre entier positif, le produit de n facteurs égaux à u, on déduira du n° 11,

$$\frac{d.u^n}{u^n} = \frac{d.uuuu....}{uuuu...}$$
$$= \frac{du}{u} + \frac{du}{u} + \frac{du}{u} + \frac{du}{u} + .$$

où le dernier membre renfermera autant de fois $\frac{du}{u}$ qu'il y a de facteurs dans u^n; c'est-à-dire n; on aura donc

$$\frac{d.u^n}{u^n} = \frac{n\,du}{u},$$

d'où l'on conclura $d.u^n = nu^{n-1}du$.

Si le nombre n est fractionnaire, en le représentant par $\frac{r}{s}$, on fera $u^{\frac{r}{s}} = v$, d'où $u^r = v^s$; et comme les nombres r et s sont supposés entiers, on aura, d'après ce qui précède,

$$ru^{r-1}du = sv^{s-1}dv;$$

d'où l'on tirera

$$dv = \frac{ru^{r-1}}{sv^{s-1}}\,du = \frac{ru^{r-1}}{\frac{r}{s}(s-1)}\,du.$$

En réduisant, on trouve

$$dv = \frac{r}{s} u^{\frac{r}{s}-1} du,$$

ce qui revient encore à $d.u^n = nu^{n-1}du$, n étant égal

Enfin, le nombre n étant négatif, on a $u^{-n} = \frac{1}{u^n}$, d'où l'on tire, par la dernière formule du n° 12,

$$d.u^{-n} = d.\frac{1}{u^n} = \frac{-d.u^n}{u^{2n}};$$

et comme, d'après ce qui précède, $d.u^n = nu^{n-1}du$, dans tous les cas où n est positif, on a donc

$$d.u^{-n} = \frac{-nu^{n-1}du}{u^{2n}} = -nu^{-n-1}du.$$

De cette énumération, on conclut que *pour différentier une puissance quelconque d'une fonction, il faut la multiplier par son exposant, diminuer ensuite cet exposant d'une unité, et multiplier le résultat par la différentielle de la fonction* (*).

14. Les règles énoncées dans les n°s 10, 11, 12, 13, suffisent pour différentier toutes les fonctions où la variable n'est engagée que par addition, soustraction, multiplication, division, élévation aux puissances en-

(*) J'aurais pu déduire immédiatement du développement du binome $(x+dx)^n$, la différentielle de x^n, puisque ce développement étant $x^n+nx^{n-1}dx+$etc., si l'on en retranche x^n, le premier terme de la différence sera $nx^{n-1}dx$; mais je n'ai pas voulu supposer la démonstration de la formule du binome, parce que le Calcul différentiel en fournit une très générale et très simple.

tières ou fractionnaires, positives ou négatives, fonctions qui, résultant des opérations algébriques, se nomment par cette raison *fonctions algébriques*. On n'a besoin que de se rappeler que la différentielle de la simple variable x est dx (5).

D'abord, pour la fonction monome $u = ax^n$, dans laquelle a désigne une constante, la règle des produits (11) donne $du = a\,d.x^n$, et la règle des puissances (13) conduit à $du = nax^{n-1}dx$.

Passons maintenant aux fonctions complexes; soit

1°. $u = a + b\sqrt{x} - \frac{c}{x}$: en prenant séparément la différentielle de chaque terme de cette fonction, le premier disparaît parce qu'il est constant (7); le second, mis sous la forme $bx^{\frac{1}{2}}$, donne, par l'application de la règle du n° 13, $\frac{1}{2}bx^{\frac{1}{2}-1}dx$, ou $\frac{bdx}{2\sqrt{x}}$; le troisième $-\frac{c}{x}$ conduit à $+\frac{cdx}{x^2}$ (12); réunissant les résultats partiels (10), on trouvera

$$du = \left(\frac{b}{2\sqrt{x}} + \frac{c}{x^2}\right)dx, \quad \text{et} \quad \frac{du}{dx} = \frac{b}{2\sqrt{x}} + \frac{c}{x^2}.$$

2°. $u = a + \frac{b}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{c}{x\sqrt[3]{x}} + \frac{e}{x^2}$: en écrivant cette fonction comme il suit,

$$u = a + bx^{-\frac{2}{3}} - cx^{-1-\frac{1}{3}} + ex^{-2},$$

l'application de la règle du n° 13 donnera

$$du = -\frac{2}{3}\frac{bdx}{x^{\frac{5}{3}}} + \frac{4}{3}\frac{cdx}{x^{\frac{7}{3}}} - \frac{2edx}{x^3},$$

ce qui revient à $du = -\frac{2bdx}{3x\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4cdx}{3x^2\sqrt[3]{x}} - \frac{2edx}{x^3}$.

3°. $u = (a+bx^m)^n$: cette fonction ne peut être décomposée en monomes, sans un développement préalable, mais qui n'est pas nécessaire pour sa différentiation, parce qu'en faisant $a+bx^m = z$, elle prend la forme monome $u = z^n$, et en y appliquant la règle des puissances (13), on trouve

$$du = nz^{n-1}dz = n(a+bx^m)^{n-1}d(a+bx^m)$$
$$= n(a+bx^m)^{n-1} \times mbx^{m-1}dx = mnbx^{m-1}dx(a+bx^m)^{n-1}.$$

15. Comme on a souvent besoin de différentier des radicaux du second degré, on a formé, pour ces fonctions, une règle à part qui résulte du calcul suivant.

Soit $v = \sqrt{u}$, d'où $v = u^{\frac{1}{2}}$;
il vient

$$dv = \tfrac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}du = \tfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{du}{2\sqrt{u}};$$

et par conséquent *la différentielle d'un radical du second degré, s'obtient en divisant celle de la quantité qui se trouve sous le signe, par le double du radical.*

16. La règle donnée (11) pour différentier les produits, étant appliquée à la fonction

$u = x(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}$, conduit à

$$du = dx(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2} + x\sqrt{a^2-x^2}.d(a^2+x^2)$$
$$+ x(a^2+x^2)d\sqrt{a^2-x^2}.$$

Les deux derniers termes de cette expression renferment des opérations qui ne sont qu'indiquées, mais qui s'effectuent successivement, en observant que

$$\mathrm{d}(a^2+x^2)=\mathrm{d}.x^2=2x\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}\sqrt{a^2-x^2}=\frac{\mathrm{d}(-x^2)}{2\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{-x\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}};$$

et l'on trouve ensuite

$$\mathrm{d}u=\left\{(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}+2x^2\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2(a^2+x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}\right\}\mathrm{d}x;$$

réduisant tous les termes au même dénominateur, on a enfin

$$\mathrm{d}u=\frac{(a^4+a^2x^2-4x^4)\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

La règle concernant la différentiation des fractions, appliquée à la fonction $u=\frac{a^2-x^2}{a^4+a^2x^2+x^4}$, donne immédiatement

$$\mathrm{d}u=\frac{(a^4+a^2x^2+x^4)\mathrm{d}(a^2-x^2)-(a^2-x^2)\mathrm{d}(a^4+a^2x^2+x^4)}{(a^4+a^2x^2+x^4)^2},$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{d}u=\frac{-2x(2a^4+2a^2x^2-x^4)\mathrm{d}x}{(a^4+a^2x^2+x^4)^2}.$$

Je terminerai ces exemples par la fonction

$$u=\sqrt[4]{\left(a-\frac{b}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}\right)^3},$$

qui renferme plusieurs opérations algébriques à effectuer successivement. Pour en faciliter la différentiation, on peut faire

$$\frac{b}{\sqrt{x}}=y,\qquad \sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}=z,$$

et l'on aura

$$u = \sqrt[4]{(a-y+z)^3} = (a-y+z)^{\frac{3}{4}};$$

la règle du n° 13 donnera

$$\begin{aligned} du &= \tfrac{3}{4}(a-y+z)^{\frac{3}{4}-1}\,d(a-y+z) \\ &= \tfrac{3}{4}(a-y+z)^{-\frac{1}{4}}(-dy+dz) \\ &= \frac{-3dy+3dz}{4\sqrt[4]{a-y+z}}; \end{aligned}$$

on trouvera ensuite

$$dy = d\frac{b}{\sqrt{x}} = -b\frac{d\sqrt{x}}{x} = \frac{-bdx}{2x\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned} dz &= d.(c^2-x^2)^{\frac{2}{3}} = \tfrac{2}{3}(c^2-x^2)^{\frac{2}{3}-1}d(c^2-x^2) \\ &= \tfrac{2}{3}(c^2-x^2)^{-\frac{1}{3}} \times -2xdx = \frac{-4xdx}{3\sqrt[3]{c^2-x^2}}; \end{aligned}$$

et substituant ces valeurs et celles de y et de z dans l'expression de du, il viendra

$$du = \left\{ \frac{\frac{3b}{2x\sqrt{x}} - \frac{4x}{\sqrt[3]{c^2-x^2}}}{4\sqrt[4]{a-\frac{b}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}}} \right\} dx$$

Des différentiations successives.

17. Le coefficient différentiel étant une nouvelle fonction de x, peut être soumis à la différentiation, et donner, par la limite du rapport de son accroissement

à celui de la variable x, son propre coefficient différentiel qui sera aussi une fonction de x. En faisant ainsi succéder des différentiations les unes aux autres, on déduit de la fonction proposée une suite de limites ou de coefficiens différentiels, que l'on distingue en ordres, d'après le nombre de différentiations qu'il a fallu effectuer pour les obtenir.

Si l'on fait $\frac{du}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = q$, $\frac{dq}{dx} = r$, etc.,

p représentera le coefficient différentiel du premier ordre de la fonction proposée, q celui de la fonction p, ou le coefficient du second ordre de la fonction proposée, r celui de la fonction q, ou le coefficient du troisième ordre de la fonction proposée, etc.

Il faut observer d'abord que les coefficiens q, r, etc., se tirent des différentielles successives de du, prises en y regardant l'accroissement dx comme une constante. En effet, les équations

$$\frac{du}{dx} = p, \quad \frac{dp}{dx} = q, \quad \frac{dq}{dx} = r, \text{ etc.},$$

donneront

$$du = p\,dx, \quad dp = q\,dx, \quad dq = r\,dx, \text{ etc.};$$

mais si l'on différentie $p\,dx$ sans y faire varier dx, on aura $dp\,dx$, expression qui devient $q\,dx^2$ (*), lorsqu'on y met pour dp sa valeur $q\,dx$, et qu'il suffit de diviser par dx^2 pour en tirer celle de q. Soient donc

$$d(du) = ddu = d^2u, \quad d(d^2u) = d^3u, \text{ etc.},$$

(*) Il faut bien prendre garde que les expressions dx^2, dx^3 .. sont équivalentes à $(dx)^2$, $(dx)^3$ .... et non pas à $d.x^2$, $d.x^3$..... (voyez la note, page 15).

les symboles des différentielles successives de du, prises en y regardant dx comme constant; et rappelons-nous toujours que l'exposant qui affecte la caractéristique d, indique une opération répétée, et non pas une puissance de la lettre d, qui n'est jamais considérée comme une quantité, mais seulement comme un signe: nous aurons alors, au moyen des valeurs précédentes de dp, dq, etc., les équations

$$du = p\,dx, \quad d^2u = dp\,dx = q\,dx^2;$$
$$= dq\,dx^2 = r\,dx^3, \text{ etc.},$$

desquelles nous tirerons

$$p = \frac{du}{dx}, \quad q = \frac{d^2u}{dx^2}, \quad r = \frac{d^3u}{dx^3}, \text{ etc.}$$

18. Si la fonction proposée était, par exemple, ax^n, on trouverait $d.ax^n = nax^{n-1}dx$ (14); les facteurs na et dx étant regardés comme constans dans la différentielle première $nax^{n-1}dx$, il suffit, pour obtenir la différentielle seconde, de différentier x^{n-1} et de multiplier le résultat par $nadx$; mais $d.x^{n-1} = (n-1)x^{n-2}dx$: on aura donc $d^2.ax^n = n(n-1)ax^{n-2}dx^2$.

On trouvera d'une manière semblable,

$$d^3.ax^n = n(n-1)(n-2)ax^{n-3}dx^3,$$
$$d^4.ax^n = n(n-1)(n-2)(n-3)ax^{n-4}dx^4;$$
etc.,

et les coefficiens différentiels auront les valeurs suivantes:

$$\frac{d.ax^n}{dx} = nax^{n-1},$$
$$\frac{d^2.ax^n}{dx^2} = n(n-1)ax^{n-2},$$

$$\frac{d^3.ax^n}{dx^3} = n(n-1)(n-2)ax^{n-3},$$

$$\frac{d^4.ax^n}{dx^4} = n(n-1)(n-2)(n-3)dx^{n-4},$$

etc.

On remarquera sans peine que dans le cas où l'exposant n est un nombre entier positif, la fonction ax^n n'a qu'un nombre limité de différentielles dont la plus élevée est $d^n.ax^n = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 1.adx^n$; expression qui n'est plus susceptible de différentiation, puisqu'elle ne contient plus de variables : on aura donc alors pour le dernier coefficient différentiel,

$$\frac{d^n.ax^n}{dx^n} = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 1.a,$$

c'est-à-dire une quantité constante.

19. Les différentiations manifestent dans les fonctions des propriétés qui en facilitent beaucoup le développement. Rien n'est plus aisé que de déduire de ce qui précède le développement de l'expression $(x+y)^n$; mais au lieu de nous arrêter à ce cas particulier, nous allons nous occuper d'une fonction quelconque du même binome $x+y$. Nous ferons d'abord remarquer qu'*une fonction quelconque du binome* $x+y$ *donne le même coefficient différentiel, quelle que soit celle des deux quantités* x, y *qu'on prenne pour variable.* Si par exemple cette fonction est $(x+y)^n$, on trouve, dans l'un et l'autre cas, $n(x+y)^{n-1}$. En général, si l'on fait $x+y=x'$, dans une fonction quelconque $f(x+y)$, elle devient $f(x')$, et l'on a $df(x') = p'dx'$, le coefficient différentiel p' étant une fonction de x' dans laquelle dx' n'entre pas, et qui demeure par conséquent

la même, soit qu'on prenne $dx' = dx$, en faisant varier x, ou $dx' = dy$, en faisant varier y.

20. Cela posé, si l'on fait

$$f(x+y) = L + My^{\alpha} + Ny^{\beta} + Py^{\gamma} + \text{etc.},$$

L, M, N, P, etc., étant des fonctions inconnues de x, sans y, et α, β, γ, etc., des exposans indéterminés, il est d'abord évident qu'aucun de ces exposans ne peut être négatif; car un terme de la forme $My^{-\alpha}$ ou $\frac{M}{y^{\alpha}}$, par exemple, devenant infini lorsque $y = 0$, rendrait infini le second membre de l'équation ci-dessus, tandis que le premier se réduirait à $f(x)$: mais si les exposans sont tous positifs, on aura alors $L = f(x)$.

Formant ensuite le coefficient différentiel du développement de $f(x+y)$, en prenant d'abord x pour variable, on trouvera

$$\frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dx}y^{\alpha} + \frac{dN}{dx}y^{\beta} + \frac{dP}{dx}y^{\gamma} + \text{etc.};$$

puis prenant y pour variable, au lieu de x, on obtiendra le résultat

$$\alpha My^{\alpha-1} + \beta Ny^{\beta-1} + \gamma Py^{\gamma-1} + \text{etc.},$$

qui devra être identique avec le précédent, quel que soit y, ce qui ne peut arriver sans que les exposans des puissances de y et leurs coefficiens ne soient les mêmes dans l'un et dans l'autre. Or, si les exposans sont rangés par ordre de grandeur dans le premier, ils le seront aussi dans le second : il faudra donc qu'on ait

$$\alpha - 1 = 0; \quad \beta - 1 = \alpha, \quad \gamma - 1 = \beta, \text{ etc.},$$

d'où

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 2, \qquad \gamma = 3, \text{ etc.};$$

et la comparaison des coefficiens donnera les équations

$$M = \frac{dL}{dx}, \quad N = \frac{1}{2}\frac{dM}{dx}, \quad P = \frac{1}{3}\frac{dN}{dx}, \text{ etc.},$$

desquelles, en faisant

$$f(x) = u, \quad \text{et } f(x+y) = u',$$

on tirera

$$L = u, \; M = \frac{1}{1}\frac{du}{dx}, \; N = \frac{1}{1.2}\frac{d^2u}{dx^2}, \; P = \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3u}{dx^3}, \text{ etc.},$$

$$u' = u + \frac{du}{dx}\frac{y}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{y^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{y^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Telle est la formule appelée *théorème de Taylor*, du nom du géomètre anglais qui l'a découverte (*).

21. Ce théorème donne tout de suite le développement de $(x+y)^n$; car, dans ce cas,

$$u = x^n, \quad \frac{du}{dx} = nx^{n-1}, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}, \text{ etc.},$$

d'où l'on conclut

(*) La démonstration ci-dessus revient pour le fond à celle que Lagrange a donnée dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1772, page 187, et depuis, dans la *Théorie des Fonctions analytiques*; mais l'emploi des signes différentiels l'abrège et la simplifie beaucoup.

Le théorème de Taylor étant devenu la base des applications du Calcul différentiel, on en a donné beaucoup de démonstrations; j'en ai rapporté plusieurs dans mon *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*, in-4°; *voyez* la 2e édition, tome I, pages 160 et 277; tome III, pages 60, 396 et 399 note.

$$(x+y)^n = x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}y^3 + \text{etc.}$$

Les règles de la différentiation ayant été établies ci-dessus, sans supposer le développement de la puissance n du binome, on doit le regarder maintenant comme prouvé pour tous les cas où l'exposant n est entier ou fractionnaire, positif ou négatif.

En mettant, par exemple, les expressions

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{a^2+x^2} \\ \sqrt[3]{(a^2-x^2)^2} \\ \dfrac{1}{a+x} \\ \dfrac{1}{\sqrt{a^4+x^4}} \end{array}\right\} \text{sous la forme} \left\{\begin{array}{l} a\left(1+\dfrac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ a^{\frac{4}{3}}\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}} \\ a^{-1}\left(1+\dfrac{x}{a}\right)^{-1} \\ a^{-1}\left(1+\dfrac{x^4}{a^4}\right)^{-\frac{1}{4}} \end{array}\right.$$

on en obtient le développement, suivant le procédé indiqué dans le n° 144 des Élémens d'Algèbre; mais alors la formule ne se terminant plus, on tombe sur une *série infinie*, comme celle qu'on a fait remarquer dans le n° 236 de l'ouvrage cité.

22. Si l'on fait $x = 0$, et qu'on désigne par U', U'', U''', etc., les valeurs particulières que prennent

$$u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^3u}{dx^3}, \text{etc.},$$

par cette supposition qui change $f(x+y)$ en $f(y)$, il viendra

$$f(y) = U + U'\frac{y}{1} + U''\frac{y^2}{1.2} + U'''\frac{y^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

mais cette équation ayant lieu quel que soit y, on pourra écrire x au lieu de y, ce qui ne changera rien aux quantités U, U', U'', U''', etc., qui ne contiennent point cette lettre, et l'on aura alors la formule

$$f(x) \text{ où } u = U + U'\frac{x}{1} + U''\frac{x^2}{1.2} + U'''\frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

qui exprimera le développement de $f(x)$ suivant les puissances *ascendantes* de x.

En faisant $u = (a+x)^n$, d'où il résulte d'abord

$$\frac{du}{dx} = n(a+x)^{n-1}, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = n(n-1)(a+x)^{n-2}, \text{ etc.},$$

valeurs que $x = 0$ change en

$$U = a^n, \quad U' = na^{n-1}, \quad U'' = n(n-1)a^{n-2}, \text{ etc.},$$

on obtient encore

$$(a+x)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}x^2 + \text{etc.}(*).$$

(*) M. Peacock a fait remarquer que le développement de $f(x)$ rapporté ci-dessus, et faussement attribué au géomètre anglais Maclaurin, avait été donné dès 1717, par son compatriote Stirling, dans ses *Lineæ tertii ordinis Newtonianæ*, Prop. III. La manière dont Stirling y parvient ne diffère de la suivante que par la notation.

Soit

$$u = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.},$$

A, B, C, D, E, etc. étant des coefficiens constans et indéterminés

23. Le théorème de Taylor donne aussi le développement du second état d'une fonction quelconque $u = f(x)$, lorsque x devient $x + h$, puisqu'en changeant y en h, on a $f(x+h)$, ou

$$u' = u + \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Il suit de là que les divers coefficiens différentiels ont encore la propriété remarquable de former, lorsqu'on les divise respectivement par les produits

$$1;\quad 1.2,\quad 1.2.3,\quad \text{etc},$$

les multiplicateurs des puissances de l'accroissement h, dans le développement complet de la différence

$$u' - u = \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.} \quad (*).$$

---

nés ; si l'on passe aux coefficiens différentiels

$$\frac{du}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \text{etc.},$$
$$\frac{d^2u}{dx^2} = 1.2C + 2.3Dx + 3.4Ex^2 + \text{etc.},$$
$$\frac{d^3u}{dx^3} = 1.2.3D + 2.3.4Ex + \text{etc.},$$

et qu'on y fasse $x = 0$, ainsi que dans u, en désignant par U, U', U'', U''', etc. les valeurs que prennent alors cette fonction et ses coefficiens différentiels, sous leur forme non développée, on aura

$$A = U,\ B = \frac{1}{1}U',\ C = \frac{1}{1.2}U'',\ D = \frac{1}{1.2.3}U''',\ \text{etc.},$$

et par conséquent

$$u = U + U'\frac{x}{1} + U''\frac{x^2}{1.2} + U'''\frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

(*) On voit dans cette expression deux signes différens, savoir, dx et h, qui représentent des accroissemens de x ; mais il faut

Ce développement, lorsqu'on y change h en dx, devient (17)

$$u' - u = \frac{du}{1} + \frac{d^2u}{1.2} + \frac{d^3u}{1.2.3} + \text{etc.}$$

forme très simple, qui montre comment la différence de u, correspondante à l'accroissement quelconque dx, se compose avec les différentielles des divers ordres, relatives au même accroissement.

De la différentiation des fonctions transcendantes.

24. Les fonctions qui ne sont pas comprises dans l'énumération faite au n° 14, se nomment *transcendantes*. La fonction exponentielle $u = a^x$ est la plus simple de ce genre. Lorsqu'on y substitue $x + dx$ au lieu de x, on trouve le rapport des accroissemens

$$\frac{a^{x+dx} - a^x}{dx} = a^x \frac{(a^{dx} - 1)}{dx};$$

pour le développer suivant les puissances de dx, on fait $a = 1 + h$, et il vient

---

se rappeler que le premier n'étant introduit dans le calcul que pour former les différentielles, et disparaissant par la division indiquée pour passer aux coefficiens différentiels, reste toujours indéterminé; l'accroissement h, au contraire, désigne une quantité qui peut être déterminée lorsqu'on se propose de calculer le changement effectif que subit la fonction u, pour un changement assigné à x.

Rien ne s'oppose cependant à ce que l'on écrive dx au lieu de h; mais alors les coefficiens différentiels se changent dans les différentielles, comme on le voit plus loin.

$$a^{dx} = (1+b)^{dx} = 1 + \frac{dx}{1}b + \frac{dx(dx-1)}{1.2}b^2 + \frac{dx(dx-1)(dx-2)}{1.2.3}b^3 + \text{etc.},$$

puis

$$\frac{a^{dx}-1}{dx} = \frac{b}{1} + \frac{dx-1}{1.2}b^2 + \frac{(dx-1)(dx-2)}{1.2.3}b^3 + \text{etc.};$$

et si l'on fait $dx = 0$, dans le second membre de cette équation, il restera, pour la limite,

$$\left(\frac{b}{1} - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \text{etc.}\right);$$

remettant pour b sa valeur $a-1$, il en résultera (5)

$$\frac{d.a^x}{dx} = a^x\left(\frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \text{etc.}\right)$$

ainsi, en prenant

$$k = \frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \text{etc.},$$

on aura $d.a^x = ka^x dx$. Telle est la forme de la différentielle de la fonction proposée; et l'on trouvera bientôt une nouvelle expression du nombre constant k.

25. Il est visible que

$$\begin{aligned} d^2.a^x &= k dx d.a^x = k^2 a^x dx^2, \\ d^3.a^x &= k^3 a^x dx^3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d^n.a^x &= k^n a^x dx^n; \end{aligned}$$

et il suit de là que

$$\frac{du}{dx} = ka^x, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = k^2a^x, \quad \frac{d^3u}{dx^3} = k^3a^x, \quad \text{etc.}$$

Lorsque $x = 0$, la fonction u et ses coefficiens différentiels deviennent

$$U = 1, \quad U' = k, \quad U'' = k^2, \quad U''' = k^3, \quad \text{etc.};$$

on obtiendra donc (22)

$$a^x = 1 + \frac{kx}{1} + \frac{k^2x^2}{1.2} + \frac{k^3x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

26. Le développement de la fonction a^x, trouvé ci-dessus, servira pour reconnaître de quelle quantité la série représentée par k tire son origine.

Si l'on suppose $x = \frac{1}{k}$, il viendra

$$a^{\frac{1}{k}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \text{etc.};$$

et en désignant par e la valeur du second membre, dont les douze premiers termes convertis en décimales donnent

$$e = 2,7182818,$$

on aura l'équation

$$a^{\frac{1}{k}} = e, \quad \text{d'où l'on tirera} \quad a = e^k;$$

prenant alors le logarithme de chaque membre, on obtiendra

$$kle = la, \quad \text{ou} \quad k = \frac{la}{le};$$

on aura donc par là

$$\mathrm{d}.a^x = ka^x\mathrm{d}x = \frac{l\dot{a}}{le}\,a^x\mathrm{d}x \quad (*)$$

27. Le nombre e se présente souvent dans les recherches analytiques ; on le prend pour base d'un système logarithmique, que j'ai appelé *Népérien*, du nom de Néper, inventeur des logarithmes, et que je représente par la caractéristique l' (**) : on a alors $l'e = 1$, et il vient

$$\mathrm{d}.a^x = a^x\mathrm{d}x.l'a,$$

$$a^x = 1 + \frac{x(l'a)}{1} + \frac{x^2(l'a)^2}{1.2} + \frac{x^3(l'a)^3}{1.2.3} + \text{etc.} \quad (25).$$

Si l'on faisait $a = e$, il viendrait seulement

(*) Élégant et simple, le procédé suivi ci-dessus pour parvenir à ce résultat, et employé par Lagrange, a paru défectueux à quelques géomètres, à cause que la série trouvée d'abord pour k (24), n'est convergente que quand a diffère peu de l'unité. Mais outre que ce premier développement ne sert qu'à obtenir la forme de la différentielle cherchée, on peut toujours partir d'une exponentielle dont la base soit très voisine de l'unité. Il suffit pour cela de changer

$$a^x \text{ en } a^{\frac{1}{m}.mx} = (\sqrt[m]{a})^{mx} = a'^{x'}.$$

En donnant à m une valeur suffisamment grande, $\sqrt[m]{a}$ ou a' approchera de l'unité aussi près qu'on voudra, et l'on aura

$$\mathrm{d}.a^x = \mathrm{d}.a'^{x'} = \frac{la'}{le}\,a'^{x'}\mathrm{d}x';$$

mais $la' = \frac{la}{m}$, $\mathrm{d}x' = m\mathrm{d}x$; donc $\mathrm{d}.a^x = \frac{la}{le}\,a^x\mathrm{d}x$, quel que soit a.

(**) Ces logarithmes étaient connus sous les noms fort impropres de *logarithmes naturels* ou *hyperboliques*.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

expression où il n'entre plus de logarithmes.

Si l'on prend a pour base d'un système de logarithmes, on aura alors $la = 1$, $x = lu$, et par conséquent

$$u = 1 + \frac{1}{1}\frac{lu}{le} + \frac{1}{1.2}\left(\frac{lu}{le}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{lu}{le}\right)^3 + \text{etc.},$$

série qui fait connaître le nombre u par son logarithme, et qui finit toujours par être convergente.

En effet, si l'on pose pour abréger $\frac{lu}{le} = M$, deux termes consécutifs, pris dans un rang quelconque, étant représentés par

$$\frac{M^n}{1.2.3\ldots n} + \frac{M^{n+1}}{1.2.3\ldots n(n+1)},$$

seront dans le rapport de 1 à $\frac{M}{n+1}$; mais le nombre n augmentant avec celui des termes de la série, finira toujours par l'emporter sur M, qui ne change point de valeur : ainsi les termes de la série deviendront enfin décroissans.

28. On peut obtenir maintenant la différentielle de la fonction logarithmique, au moyen du second théorème du numéro 9; car ayant trouvé $\frac{du}{dx} = \frac{la}{le}a^x$, lorsqu'on regarde u comme la fonction de x, dans l'équation $u = a^x$, il s'ensuit que $\frac{dx}{du} = \frac{le}{la} \cdot \frac{1}{a^x}$, lorsqu'on re-

garde x comme fonction de u, ce qui répond à l'équation $x = \frac{lu}{la}$; mais alors a étant la base du système, $la = 1$, et l'on a seulement

$$\frac{dx}{du} = \frac{le}{a^x} = \frac{le}{u},$$

d'où il résulte

$$\frac{dlu}{du} = \frac{le}{u} \quad \text{et} \quad dlu = le\,\frac{du}{u}.$$

Pour passer du système dont la base serait e à celui dont la base serait a (*Algèbre*, 250), en désignant ces systèmes par les caractéristiques l' et l, on aurait

$$lu = le \cdot l'u;$$

et comme l'on compare tous les systèmes de logarithmes au système Népérien, on appelle *module* le nombre le, par lequel il faut multiplier $l'u$, pour obtenir le logarithme correspondant dans un autre système : on dit en conséquence que *la différentielle du logarithme, ou la différentielle logarithmique, est égale au produit du module, par la différentielle du nombre, divisée par le nombre même.*

29. Si l'on voulait passer de là au développement de x en u, ou du logarithme suivant les puissances du nombre, on trouverait que les quantités

$$x, \quad \frac{dx}{du}, \quad \frac{d^2x}{du^2}, \quad \text{etc.},$$

deviennent infinies par la supposition de $u = 0$, et l'on en conclurait que le logarithme ne saurait se développer dans la forme

$$x = A + Bu + Cu^2 + Du^3 + \text{etc.}$$

C'est aussi ce qu'il est facile de reconnaître *à priori*, en observant que la fonction x devient infinie lorsque $u = 0$ (*Alg.* 251); ce qui ne résulte pas de la série ci-dessus, qui se réduit alors à $x = A$.

Il n'en serait pas de même si l'on changeait u en $1 + u$; car on aurait

$$x = l(1+u), \quad \frac{dx}{du} = \frac{le}{1+u} = le(1+u)^{-1},$$

$$\frac{d^2x}{du^2} = -le(1+u)^{-2}, \quad \frac{d^3x}{du^3} = 2le(1+u)^{-3}, \text{ etc.};$$

faisant alors $u = 0$ et $le = M$, on obtiendrait

$$l(1+u) = M\left\{u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} - \text{etc.}\right\} \text{ (*)}.$$

(*) On aura remarqué sans doute que l'équation $k = \frac{la}{le}$, du n° 26, jointe à l'expression du n° 24,

$$k = \frac{(a-1)}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \text{etc.}$$

conduit à

$$la = le\left\{\frac{(a-1)}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \text{etc.}\right\};$$

et en faisant $a = 1 + u$, on retrouvera le développement obtenu ci-dessus.

Lagrange a montré qu'on pouvait rendre cette série convergente, en observant que $la = mla\sqrt[m]{a}$, d'où

$$la = mle\left\{\frac{\sqrt[m]{a}-1}{1} - \frac{(\sqrt[m]{a}-1)^2}{2} + \frac{(\sqrt[m]{a}-1)^3}{3} - \text{etc.}\right\};$$

parce que $\sqrt[m]{a} - 1$ décroît plus rapidement que m n'augmente. Il suit de là qu'en prenant m très grand, on aura, de plus en plus exactement,

$$la = mle(\sqrt[m]{a} - 1).$$

30. La série du second membre n'est assez convergente (*Alg.* 236) pour être employée au calcul des logarithmes, que lorsque u est une fraction; mais on a trouvé des moyens de la transformer en d'autres qui s'appliquent, avec plus ou moins d'avantage, aux différens cas. On a observé d'abord qu'en changeant $+u$ en $-u$, il venait

$$l(1-u)=M\left\{-u-\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}-\frac{u^5}{5}-\text{etc.}\right\},$$

et retranchant cette équation de la précédente, on a trouvé

$$l(1+u)-l(1-u)=l\left(\frac{1+u}{1-u}\right)=2M\left\{\frac{u}{1}+\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}+\text{etc.}\right\};$$

faisant ensuite $\frac{1+u}{1-u}=1+\frac{z}{n}$, ce qui donne $u=\frac{z}{2n+z}$, et observant que $l\left(1+\frac{z}{n}\right)=l\left(\frac{n+z}{n}\right)=l(n+z)-ln$, il en est résulté

$$(n+z)-ln=2M\left\{\frac{z}{2n+z}+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^5+\text{etc.}\right\},$$

d'où l'on a conclu

$$(n+z)=ln+2M\left\{\frac{z}{2n+z}+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^5+\text{etc.}\right\}.$$

Cette série, qui fait connaître le logarithme de $n+z$, lorsqu'on a celui de n, donne, en y supposant $n=1$, et $z=1$,

$$l2=2M\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}+\text{etc.}\right\},$$

puisque $l1=0$. Elle est déjà très convergente et le de-

vient encore plus pour un nombre plus grand. Si l'on prend $M = 1$, on trouve $l2 = 0,69314718$.

Le module M s'obtient en calculant le logarithme d'un même nombre dans le système qu'on veut adopter, et dans le système népérien, et en prenant le rapport des deux résultats (28). On arrive assez promptement au module des logarithmes ordinaires, en calculant d'abord le logarithme népérien de 5 par celui de 4, qu'on déduit de celui de 2, puisque $4 = 2l2$; puis connaissant $l5$ et $l2$, on a $l10 = l5 + l2$. On trouve ainsi

$$l10 = 2,3025850 93;$$

et divisant par ce dernier logarithme, l'unité qui est le logarithme ordinaire de 10, on a, pour le module cherché,

$$M = 0,43429448 2.$$

Tel est le nombre par lequel il faut multiplier les logarithmes népériens pour obtenir les logarithmes ordinaires (ou de Briggs).

Réciproquement, pour revenir aux logarithmes népériens, il faut diviser les logarithmes ordinaires par ce nombre, ou les multiplier par

$$\frac{1}{0,43429448 2} = 2,3025850 93.$$

31. Je vais donner quelques exemples de l'application des règles de la différentiation des fonctions logarithmiques; mais pour plus de simplicité, je supposerai dorénavant que les logarithmes sont népériens, à moins que je n'avertisse expressément du contraire.

Soit 1°. $u = l\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)$; en faisant $\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = z$,

on aura (9) $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx}$, d'où $du = \frac{dz}{z}$, puisque.... $\frac{du}{dz} = \frac{1}{z}$ (28) ; mais

$$dz = \frac{dx\sqrt{a^2+x^2} - \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2+x^2}}}{a^2+x^2} = \frac{a^2dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

donc $du = \frac{a^2dx}{x(a^2+x^2)}$.

2°. $u = l\left\{\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right\}$; on fera

$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x} = y$, $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x} = z$,

ce qui donnera

$$u = l\left(\frac{y}{z}\right) = ly - lz, \quad du = \frac{dy}{y} - \frac{dz}{z};$$

mais on a

$$dy = \frac{dx}{2\sqrt{1+x}} - \frac{dx}{2\sqrt{1-x}} = \frac{-dx}{2\sqrt{1-x^2}}\{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\}$$

$$= -\frac{zdx}{2\sqrt{1-x^2}},$$

$$dz = \frac{dx}{2\sqrt{1+x}} + \frac{dx}{2\sqrt{1-x}} = \frac{dx}{2\sqrt{1-x^2}}\{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\}$$

$$= \frac{ydx}{2\sqrt{1-x^2}},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy}{y} - \frac{dz}{z} = -\frac{zdx}{2y\sqrt{1-x^2}} - \frac{ydx}{2z\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{-(y^2+z^2)dx}{2yz\sqrt{1-x^2}};$$

et en observant que $y^2 + z^2 = 4$, $yz = 2x$,
on trouvera enfin $du = -\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$.

Cet exemple est remarquable par les réductions qu'éprouve la différentielle, et par sa simplicité, eu égard à la fonction dont elle dérive; il sera facile maintenant d'effectuer le calcul des exemples suivans, dont je ne rapporterai que les résultats.

3°. $u = l\{x + \sqrt{1+x^2}\}$, $\quad du = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$;

4°. $u = \frac{1}{\sqrt{-1}} l\{x\sqrt{-1} + \sqrt{1-x^2}\}$, $\quad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

5°. $u = l\left\{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}\right\}^{\frac{1}{2}}$, $\quad du = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

6°. Si l'on avait $u = (lx)^n$, en faisant $lx = z$, on trouverait

$$u = z^n, \qquad du = nz^{n-1}dz;$$

et remettant au lieu de z et de dz, leurs valeurs, il viendrait

$$d.(lx)^n = n(lx)^{n-1}\frac{dx}{x}.$$

7°. Soit enfin $u = l.lx$, c'est-à-dire, le logarithme du logarithme de x; posant, comme ci-dessus, $lx = z$, on aura d'abord

$$u = lz, \qquad du = \frac{dz}{z}, \qquad dz = d.lx = \frac{dx}{x},$$

d'où l'on déduira ensuite $du = \frac{dx}{xlx}$.

32. La considération des logarithmes facilite beau-

coup la différentiation des formules exponentielles, lorsqu'elles sont compliquées.

1°. Soit, par exemple, $u = z^y$, z et y étant deux fonctions quelconques de x; en prenant le logarithme de chaque membre, on aura $lu = ylz$, et différentiant ensuite, on obtiendra

$$\frac{du}{u} = dylz + yd.lz \quad (11, 28), \text{ ou}$$

$$= dylz + y\frac{dz}{z},$$

et de là

$$du = u\left(dylz + y\frac{dz}{z}\right), \qquad d.z^y = z^y\left(dylz + y\frac{dz}{z}\right).$$

2°. Soit $u = a^{b^x}$; on fera $b^x = y$, et l'on aura

$$u = a^y, \qquad du = a^y dy la \quad (27);$$

mais $dy = d.b^x = b^x dx lb$: donc

$$du = a^{b^x} b^x dx la lb.$$

3°. Soit $u = z^{t^s}$, z, t et s, étant des fonctions de x, on fera $t^s = y$; il viendra

$$u = z^y, \qquad du = z^y\left(dylz + \frac{ydz}{z}\right)$$

$$dy = t^s\left(dslt + \frac{sdt}{t}\right),$$

et par conséquent

$$du = z^{t^s} t^s\left(dslt\,dlz + \frac{sdt\,lz}{t} + \frac{dz}{z}\right)$$

Au moyen de ces formules, on trouvera facilement la différentielle d'une fonction exponentielle quelconque.

33. Les sinus, les cosinus, les tangentes et les autres lignes trigonométriques, considérées par rapport à l'arc de cercle dont elles dépendent, sont aussi des fonctions transcendantes; on les nomme assez ordinairement *fonctions circulaires.*

Cherchons d'abord la différentielles de $\sin x$; pour cela considérons les équations

$$\sin(a+b) = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{R},$$

$$\sin(a-b) = \frac{\sin a \cos b - \sin b \cos a}{R} \quad (\textit{Trig.}\ 11),$$

et retranchons la seconde de la première, pour obtenir

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = \frac{2\sin b \cos a}{R},$$

au moyen de quoi nous trouverons

$$\sin(x+\mathrm{d}x) - \sin x = \frac{2\sin \frac{1}{2}\mathrm{d}x \cos(x+\frac{1}{2}\mathrm{d}x)}{R},$$

en faisant

$$a+b = x+\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad a-b = x.$$

Prenant ensuite le rapport des accroissemens de x et de $\sin x$, nous aurons

$$\frac{\sin(x+\mathrm{d}x) - \sin x}{\mathrm{d}x} = \frac{2\sin \frac{1}{2}\mathrm{d}x \cos(x+\frac{1}{2}\mathrm{d}x)}{R\mathrm{d}x}$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2}\mathrm{d}x}{\frac{1}{2}\mathrm{d}x} \cdot \frac{\cos(x+\frac{1}{2}\mathrm{d}x)}{R},$$

en divisant par 2 le numérateur et le dénominateur du second membre. Pour passer à la limite, il faut chercher ce que deviennent les deux facteurs lorsque l'accroisse-

ment dx s'évanouit (8), circonstance qui réduit d'abord le second facteur à $\frac{\cos x}{R}$.

Quant au premier, $\frac{\sin \frac{1}{2} dx}{\frac{1}{2} dx}$, sa limite est l'unité; car de $\text{tang } a = \frac{R \sin a}{\cos a}$, on déduit $\frac{\sin a}{\text{tang } a} = \frac{\cos a}{R}$; et puisque $\cos a = R$, lorsque $a = 0$, le rapport entre le sinus et la tangente a donc l'unité pour limite, quand l'arc s'évanouit: or, l'arc étant moindre que la tangente, et plus grand que le sinus, le rapport $\frac{\sin a}{a}$ sera toujours compris entre $\frac{\sin a}{\text{tang } a}$ et 1, et aura par conséquent aussi 1 pour limite.

On aura donc, en vertu de ces remarques,

$$\frac{\text{d.sin } x}{dx} = \frac{\cos x}{R}, \text{ ou } \text{d.sin } x = \frac{dx \cos x}{R}.$$

34. Cette différentielle obtenue, les autres s'en déduisent sans peine; car

1°. $\cos x = \sin (1^q - x)$, $\text{d.cos } x = \text{d.sin } (1^q - x)$; mais, par ce qui précède,

$$\text{d.sin } (1^q - x) = \frac{1}{R} \text{d } (1^q - x) \cos (1^q - x)$$

$$= -\frac{1}{R} dx \cos (1^q - x),$$

et $\cos (1^q - x) = \sin x$; donc

$$\text{d.cos } x = -\frac{dx \sin x}{R};$$

2°. $\text{sin.verse } x = R - \cos x$: donc

$$\text{d.sin.verse } x = -\text{d.cos } x = \frac{dx \sin x}{R};$$

3°. $\text{tang}\, x = \dfrac{R \sin x}{\cos x}$,

$$\text{d.tang}\, x = \frac{R\cos x\,\text{d}.\sin x - R\sin x\,\text{d}.\cos x}{\cos x^2} \quad (12)$$
$$= \frac{(\cos x^2 + \sin x^2)\,\text{d}x}{\cos x^2};$$

mais $\cos x^2 + \sin x^2 = R^2$: donc

$$\text{d.tang}\, x = \frac{R^2\,\text{d}x}{\cos x^2};$$

4°. $\cot x = \dfrac{R^2}{\text{tang}\, x}$,

$$\text{d.cot}\, x = -\frac{R^2\,\text{d.tang}\, x}{\text{tang}\, x^2} = -\frac{R^4\,\text{d}x}{\text{tang}\, x^2 \cos x^2} = -\frac{R^2\,\text{d}x}{\sin x^2},$$

en mettant pour $\text{tang}\, x$ sa valeur;

5°. $\text{séc}\, x = \dfrac{R^2}{\cos x}$,

$$\text{d.séc}\, x = -\frac{R^2\,\text{d}.\cos x}{\cos x^2} = \frac{R\,\text{d}x \sin x}{\cos x^2} = \frac{\text{d}x\,\text{tang}\, x\,\text{séc}\, x}{R^2}$$

puisque $\dfrac{R\sin x}{\cos x} = \text{tang}\, x$ et $\dfrac{R^2}{\cos x} = \text{séc}\, x$;

6°. $\text{coséc}\, x = \dfrac{R^2}{\sin x}$,

$$\text{d.coséc}\, x = -\frac{R^2\,\text{d}.\sin x}{\sin x^2} = -\frac{R\,\text{d}x\cos x}{\sin x^2} = -\frac{\text{d}x \cot x\,\text{coséc}\, x}{R^2}.$$

Dans l'usage ordinaire on fait le rayon $R = 1$, ce qui simplifie les formules ci-dessus, et donne

$$\text{d}.\sin x = \text{d}x\cos x, \quad \text{d}.\cos x = -\text{d}x \sin x,$$
$$\text{d.tang}\, x = \frac{\text{d}x}{\cos x^2}, \quad \text{d}.\cot x = -\frac{\text{d}x}{\sin x^2}.$$

35. Avec ces formules, on peut trouver la différentielle de toute expression renfermant des sinus, cosinus, tangentes, etc.; il faudra pour cela différentier en regardant ces quantités comme des fonctions particulières, et mettre au lieu de leurs différentielles les résultats ci-dessus : je n'en donnerai qu'un seul exemple, savoir, $u = \cos x^{\sin x}$. On fera

$$\cos x = z, \qquad \sin x = y;$$

on aura $u = z^y$ et

$$du = \mathrm{d}.z^y = z^y\left(\mathrm{d}y\,lz + \frac{y\,\mathrm{d}z}{z}\right) \quad (32)$$

$$= \mathrm{d}x\cos x^{\sin x}\left(\cos x\,l.\cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right).$$

36. Après avoir traité les sinus, cosinus, etc., comme des fonctions de l'arc, il convient de regarder l'arc successivement comme une fonction de son sinus, de son cosinus, etc., et d'en déterminer la différentielle sous ces divers points de vue. Pour cela, soit x la fonction proposée, et u la variable dont cette fonction dépend; 1°. à cause de $\sin x = u$ et $\cos x = \sqrt{R^2 - u^2}$, l'équation $\mathrm{d}.\sin x = \frac{\mathrm{d}x\cos x}{R}$, donne $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x\sqrt{R^2-u^2}}{R}$, et par conséquent (9) $\mathrm{d}x = \frac{R\mathrm{d}u}{\sqrt{R^2-u^2}}$: telle est la valeur de la différentielle de l'arc exprimée par le sinus et par sa différentielle.

2°. Si l'on voulait exprimer la différentielle de l'arc par son cosinus, il faudrait partir de l'équation

$$\mathrm{d}.\cos x = -\frac{\mathrm{d}x\sin x}{R},$$

qui donne, en faisant $\cos x = u$,

$$du = -\frac{dx\sqrt{R^2-u^2}}{R} \quad \text{ou} \quad dx = -\frac{Rdu}{\sqrt{R^2-u^2}}.$$

Pour passer de là au sinus verse, on ferait $u = R-y$, puisque $\cos x = R - \text{sin.verse } x$; on aurait par conséquent $du = -dy$ et $dx = \frac{Rdy}{\sqrt{2Ry-y^2}}$.

3°. Soit $\text{tang } x = u$; l'équation $d.\text{tang } x = \frac{R^2 dx}{\cos x^2}$ donne $du = \frac{R^2 dx}{\cos x^2}$ et $dx = \frac{du \cos x^2}{R^2}$; mais comme... $\text{séc } x = \frac{R^2}{\cos x}$, on a $\cos x^2 = \frac{R^4}{\text{séc } x^2}$, par conséquent

$$dx = \frac{R^2 du}{\text{séc } x^2}; \quad \text{et à cause que}$$

$$\text{séc } x^2 = R^2 + \text{tang } x^2 = R^2 + u^2,$$

il vient enfin

$$dx = \frac{R^2 du}{R^2+u^2}.$$

En faisant $R = 1$, les trois expressions de dx obtenues ci-dessus en du, se réduisent à

$$dx = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}, \quad dx = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}, \quad dx = \frac{du}{1+u^2}.$$

Je terminerai cet article par l'exemple suivant.

Soit x un arc ayant pour sinus la fonction $2u\sqrt{1-u^2}$; on fera

$$2u\sqrt{1-u^2} = z,$$

l'on aura

$$dx = \frac{dz}{\sqrt{1-}}$$

mais $$dz = \frac{2du(1-2u^2)}{\sqrt{1-u^2}},$$

et $$\sqrt{1-z^2} = 1-2u^2 :$$

donc $$dx = \frac{2du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

37. On peut, par le moyen des expressions différentielles obtenues précédemment, former les développemens des principales fonctions circulaires.

1°. Pour $\sin x$, on a

$$\frac{du}{dx} = \cos x, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = -\sin x, \quad \frac{d^3u}{dx^3} = -\cos x,$$
$$\frac{d^4u}{dx^4} = \sin x, \text{ etc.};$$

faisant $x = 0$, il viendra, par le n° 22, $U = 0$, et $U' = 1$, $U'' = 0$, $U''' = -1$, $U'''' = 0$, etc., d'où l'on conclura

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}$$

2°. On trouvera pour $\cos x$

$$\frac{du}{dx} = -\sin x, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = -\cos x, \quad \frac{d^3u}{dx^3} = \sin x,$$
$$\frac{d^4u}{dx^4} = \cos x, \text{ etc.};$$

faisant $x = 0$, il en résultera $U = 1$, et $U' = 0$, $U'' = -1$, $U''' = 0$, $U'''' = 1$, etc., ce qui donnera

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

Ces deux formules, dont la loi est très évidente et très simple, offrent une des méthodes les plus exactes

et les plus expéditives pour calculer le sinus et le cosinus correspondans à un arc donné, surtout lorsque cet arc n'est pas très grand. On en trouvera d'analogues pour la tangente et les autres lignes trigonométriques; mais la loi de ces dernières formules n'est pas aussi simple que celles des précédentes, et elles sont beaucoup moins commodes dans l'application que les relations qui donnent la tangente, la sécante, etc., par le moyen du sinus et du cosinus; c'est pourquoi je ne m'y arrêterai pas; mais je ferai remarquer que les premières, finissant toujours par devenir convergentes (27), s'étendent aux arcs surpassant même la circonférence.

38. On pourrait former de même le développement de l'arc, soit par le sinus, soit par la tangente; mais dans ce cas, l'expression des coefficiens différentiels, se compliquant à mesure que leur ordre s'élève, laisserait difficilement apercevoir la loi qu'ils suivent, inconvénient que n'a pas le procédé ci-dessous.

Le coefficient différentiel de l'arc considéré comme fonction du sinus, étant

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = (1-u^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (36),$$

on peut le développer en série par la formule du binome (21); et en ne faisant aucune réduction aux coefficiens numériques, on trouve

$$\frac{du}{dx} = 1 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1.3}{2.4}u^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}u^6 + \text{etc.}$$

Ce développement, ne contenant que des puissances paires de u, montre que celui de x n'en doit contenir que d'impaires, et qu'il faut poser en conséquence

$$x = Au + Bu^3 + Cu^5 + Du^7 + \text{etc.},$$

sans terme indépendant de u, afin que l'arc x s'évanouisse quand $u = 0$: cela fait, en différentiant, on obtient

$$\frac{dx}{du} = A + 3Bu^2 + 5Cu^4 + 7Du^6 + \text{etc.},$$

et comparant à la première série, on trouve

$$A = 1, \quad 3B = \frac{1}{2}, \quad 5C = \frac{1.3}{2.4}, \quad 7D = \frac{1.3.5}{2.4.6}, \text{etc.},$$

d'où

$$x = \frac{u}{1} + \frac{1}{2}\frac{u^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{u^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{u^7}{7} + \text{etc.}$$

Comme on ne peut pas prendre $u > 1$, on voit que la série ci-dessus ne saurait donner pour x une valeur plus grande que le quart de la circonférence; cette expression de l'arc par son sinus est donc moins générale que celles du sinus et du cosinus par l'arc.

Pour exprimer l'arc par la tangente, il faut développer d'abord

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{1+u^2} = (1+u^2)^{-1} \quad (36),$$

ce qui donne

$$\frac{dx}{du} = 1 - u^2 + u^4 - u^6 + \text{etc.};$$

et posant

$$x = Au + Bu^3 + Cu^5 + Du^7 + \text{etc.},$$

d'où il résulte

$$\frac{dx}{du} = A + 3Bu^2 + 5Cu^4 + 7Du^6 + \text{etc.},$$

il vient

$$x = \frac{u}{1} - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + \text{etc.}$$

Ce dernier développement donne une expression remarquable de l'arc $0^g,5$, dont la tangente est, comme l'on sait, égale à 1; en effet, si l'on suppose $u = 1$, il vient

$$0^g,5 = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \text{etc.}$$

Cette série est trop peu convergente pour être employée; mais on peut calculer le même arc en plusieurs parties, dont chacune, ayant une tangente plus petite que l'unité, sera exprimée par une série très convergente. Le géomètre anglais Machin a trouvé que l'arc de $0^g,5$ est égal à quatre fois celui qui a pour tangente $\frac{1}{5}$, moins l'arc dont la tangente est $\frac{1}{239}$, ce dont il est aisé de s'assurer en observant que si $\text{tang}\, a = \frac{1}{5}$, il en résulte (*Trig.* 27.)

$$\text{tang}\, 2a = \frac{2\,\text{tang}\, a}{1 - \text{tang}\, a^2} = \frac{5}{12},$$

$$\text{tang}\, 4a = \frac{2\,\text{tang}\, 2a}{1 - (\text{tang}\, 2a)^2} = \frac{120}{119}.$$

Le dernier nombre, un peu plus fort que l'unité, tangente de $0^g,5$, montre que $4a > 0^g,5$; faisant donc

$$4a = A, \qquad 0^g,5 = B,$$

on a, par la différence $4a - 0^g,5$ ou $A - B$,

$$\text{tang}(A - B) = \frac{\text{tang}\, A - \text{tang}\, B}{1 + \text{tang}\, A\, \text{tang}\, B} = \frac{1}{239};$$

et posant $A - B = b$, il vient $0^g,5 = 4a - b$.

Or, en prenant successivement $u = \frac{1}{5}$, $u = \frac{1}{239}$, on

trouve les valeurs de a et de b, et ensuite

$$0^{r},5 = \left\{\begin{array}{l} 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \text{etc.}\right) \\ -\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3(239)^3} + \frac{1}{5(239)^5} - \text{etc.}\right) \end{array}\right\},$$

d'où l'on déduira promptement que la demi-circonférence $= 3,14159265\overset{3}{5}$.

De la différentiation des fonctions de deux ou d'un plus grand nombre de variables.

39. Soit $f(x, y)$ une fonction quelconque de x et de y; en supposant d'abord que la variable x change seule et devienne $x + h$, il faudra regarder y comme une constante, et traiter la fonction proposée de même qu'une fonction de x seule : on aura donc par le théorème du n° 23, en faisant pour abréger $f(x, y) = u$,

$$f(x+h, y) = u + \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Pour trouver ce que devient la fonction proposée, lorsque y seul prend un accroissement k, on regarderait x comme une constante, et $f(x, y)$, ou u, comme une fonction de y seul; par là on aurait

$$f(x, y+k) = u + \frac{du}{dy}\frac{k}{1} + \frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Dans le cas où les quantités x et y varient en même temps et deviennent $x + h$ et $y + k$, comme on n'a assigné aucune forme particulière à la fonction $f(x, y)$, il n'est pas possible d'y faire à la fois les deux substitutions indiquées; mais il est aisé de voir qu'on parviendra au même résultat en changeant d'abord x en

$x+h$, et mettant ensuite $y+k$ pour y, dans le développement qu'on aura obtenu par la première opération.

On a déjà

$$f(x+h;y)=u+\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$

u représentant $f(x,y)$. Pour développer les coefficiens des différens termes de cette série, en ayant égard au changement arrivé à y, j'observerai d'abord que dans chacun d'eux, x *doit être regardé comme* une quantité constante, *et qu'on doit les traiter par conséquent comme des fonctions de la seule variable* y. D'après cela, $f(x,y)$, ou u, deviendra

$$u+\frac{du}{dy}\frac{k}{1}+\frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Si, dans ce développement, on écrit $\frac{du}{dx}$, au lieu de u, on aura pour résultat ce que devient la fonction $\frac{du}{dx}$, lorsque y se change en $y+k$; c'est-à-dire,

$$\frac{du}{dx}+\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy}\frac{k}{1}+\frac{d^2\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^3\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Mais comme, en partant de la fonction u, l'expression $\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy}$ indique deux différentiations faites successivement, la première en ayant égard à la variabilité de x seule, et la seconde en ne considérant que celle de y, on donne à cette expression une forme plus simple en l'écrivant ainsi qu'il suit : $\frac{d^2u}{dydx}$. On représente

de même $\frac{d^2\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy^2}$ par $\frac{d^3u}{dy^2dx}$; et en général, il faut entendre par $\frac{d^{n+m}u}{dy^n dx^m}$, le coefficient différentiel de l'ordre n, relatif à la fonction $\frac{d^m u}{dx^m}$, en n'y supposant que y variable, tandis que cette fonction est elle-même le coefficient différentiel de l'ordre m de la fonction proposée, en n'y supposant que x variable.

Cela posé, la substitution de $y+k$ au lieu de y changera

$\frac{du}{dx}$ en $\frac{du}{dx}+\frac{d^2u}{dydx}\frac{k}{1}+\frac{d^3u}{dy^2dx}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^4u}{dy^3dx}\frac{k^3}{1.2.3}+$ etc.,

$\frac{d^2u}{dx^2}$ en $\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^3u}{dydx^2}\frac{k}{1}+\frac{d^4u}{dy^2dx^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^5u}{dy^3dx^2}\frac{k^3}{1.2.3}+$ etc.;

$\frac{d^3u}{dx^3}$ en $\frac{d^3u}{dx^3}+\frac{d^4u}{dydx^3}\frac{k}{1}+\frac{d^5u}{dy^2dx^3}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^6u}{dy^3dx^3}\frac{k^3}{1.2.3}+$ etc.,

etc.

En substituant ces valeurs dans le développement de $f(x+h, y)$, et en ordonnant de manière que tous les termes dans lesquels les exposans de h et de k font une même somme, soient placés dans une même colonne, il viendra

$$\left.\begin{aligned} f(x+h,y+k)=u&+\frac{du}{dy}\frac{k}{1}+\frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{etc.}\\ &+\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dydx}\frac{kh}{1.1}+\frac{d^3u}{dy^2dx}\frac{k^2h}{1.2.1}+\text{etc.}\\ &+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dydx^2}\frac{kh^2}{1.1.2}+\text{etc.}\\ &+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}\\ &+\text{etc.}\end{aligned}\right\}$$

our bien entendre ce que signifie cette formule, il suffit de faire $u = x^m y^n$, et d'en déduire le développement de $(x+h)^m(y+k)^n$, qu'il est aisé de former *à priori*.

4o. On a obtenu le développement précédent en mettant d'abord $x+h$ au lieu de x, et ensuite $y+k$ au lieu de y, mais on aurait pu procéder dans un ordre inverse, et commencer par la substitution relative à y; alors $f(x, y)$ serait devenue

$$f(x, y+k),$$

ou

$$u + \frac{du\,k}{dy\,1} + \frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

La substitution de $x+h$, au lieu de x, dans cette série, aurait d'abord changé u en

$$u + \frac{du\,h}{dx\,1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

et ensuite

$$\frac{du}{dy} \text{ en } \frac{du}{dy} + \frac{d^2u}{dxdy}\frac{h}{1} + \frac{d^3u}{dx^2dy}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^4u}{dx^3dy}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} \text{ en } \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^3u}{dxdy^2}\frac{h}{1} + \frac{d^4u}{dx^2dy^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^5u}{dx^3dy^2}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

$$\frac{d^3u}{dy^3} \text{ en } \frac{d^3u}{dy^3} + \frac{d^4u}{dxdy^3}\frac{h}{1} + \frac{d^5u}{dx^2dy^3}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^6u}{dx^3dy^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

etc.;

on aurait eu par conséquent

$$f(x+h, y+k) = u + \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{du}{dy}\frac{k}{1} + \frac{d^2u}{dxdy}\frac{hk}{11} + \frac{d^3u}{dx^2dy}\frac{h^2}{1.2}\frac{k}{1} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dxdy^2}\frac{h}{1}\frac{k^2}{1.2} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$
$$+ \text{etc.}$$

Il est évident que ce second développement doit être identique avec le premier; car il est indifférent de changer d'abord x en $x+h$ et ensuite y en $y+k$, ou de faire les mêmes substitutions dans un ordre inverse, puisque d'une manière ou de l'autre on obtient également $f(x+h, y+k)$.

Si l'on compare, dans ces deux développemens, les termes qui sont affectés des mêmes puissances de h et de k; on trouvera cette suite d'équations,

$$\frac{d^2u}{dydx} = \frac{d^2u}{dxdy},$$
$$\frac{d^3u}{dydx^2} = \frac{d^3u}{dx^2dy},$$
$$\frac{d^3u}{dy^2dx} = \frac{d^3u}{dxdy^2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{d^{n+m}u}{dy^ndx^m} = \frac{d^{m+n}u}{dx^mdy^n},$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

Il résulte de la première, que *le coefficient différentiel du second ordre d'une fonction de deux variables, pris en différentiant par rapport à l'une d'elles et*

ensuite par rapport à l'autre, reste le même, quel que soit l'ordre qu'on ait suivi dans les différentiations.

Soit, par exemple, $u=x^m y^n$; si l'on différentie d'abord en regardant x comme seule variable, on a $\frac{du}{dx}=mx^{m-1}y^n$; différentiant ensuite ce résultat, en ne faisant varier que y, on obtient $\frac{d^2u}{dydx}=mnx^{m-1}y^{n-1}$: en opérant dans un ordre inverse, on trouve

$$\frac{du}{dy}=nx^m y^{n-1}, \quad \frac{d^2u}{dxdy}=mnx^{m-1}y^{n-1},$$

et l'on voit que le dernier résultat est le même dans les deux cas. Les autres équations rapportées ci-dessus ne sont que des conséquences de la première.

41. En retranchant $f(x, y)$, ou u, de $f(x+h, y+k)$, rangeant sur une même ligne les termes compris dans chaque colonne, et les réduisant au même dénominateur, on trouve

$$\left.\begin{aligned} f(x+h,y+k)-f(x,y)=&\frac{1}{1}\left(\frac{du}{dx}h+\frac{du}{dy}k\right)\\ &+\frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}h^2+2\frac{d^2u}{dxdy}hk+\frac{d^2u}{dy^2}k^2\right)\\ &+\text{etc.}\end{aligned}\right\}$$

Si l'on étend aux fonctions de deux variables la définition que j'ai donnée (5) de la différentielle d'une fonction, on verra que celle de $f(x, y)$, ou de u, est comprise dans les deux termes qui forment la première ligne du développement précédent; et en changeant h en dx et k en dy, on aura

$$df(x,y)=du=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy.$$

Il suit de là que la *différentielle totale* d'une fonction de deux variables renferme deux parties, savoir : $\frac{du}{dx}\,dx$, ou la différentielle prise en regardant x comme seule variable, et $\frac{du}{dy}\,dy$, ou la différentielle prise en regardant y comme seule variable.

On peut donc appliquer aux fonctions de deux variables, les règles données (10 et suiv.) pour la différentiation de celles qui dépendent d'une seule, et pour cela *on différentiera la fonction proposée, d'abord par rapport à l'une des variables, et ensuite par rapport à l'autre; la somme des deux résultats sera la différentielle totale cherchée.*

42. Je ne crois pas qu'il soit nécessaire de donner beaucoup d'exemples relatifs à la différentiation des fonctions de deux variables, puisqu'elle rentre dans celle des fonctions qui n'en contiennent qu'une; je me bornerai donc aux suivans.

On voit sur-le-champ, d'après la règle ci-dessus, que

$$\mathrm{d}(x+y) = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y,$$
$$\mathrm{d}.xy = y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y,$$
$$\mathrm{d}.\frac{x}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{y} - \frac{x\mathrm{d}y}{y^2} = \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2}.$$

Soit encore 1°. $u = x^m y^n$; on a

$$\frac{du}{dx}\,\mathrm{d}x = mx^{m-1}y^n\mathrm{d}x,$$
$$\frac{du}{dy}\,\mathrm{d}y = nx^m y^{n-1}\mathrm{d}y;$$

donc

$$\mathrm{d}u = mx^{m-1}y^n\mathrm{d}x + nx^m y^{n-1}\mathrm{d}y = x^{m-1}y^{n-1}(my\mathrm{d}x + nx\mathrm{d}y);$$

2°. $u = \frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}} = ay(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$; on a

$$\frac{du}{dx}dx = -\frac{ayx\,dx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{du}{dy}dy = \frac{a\,dy}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{ay^2dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}};$$

donc

$$du = -\frac{ayx\,dx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{a\,dy}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{ay^2dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ou *en réduisant*,

$$= \frac{-axy\,dx + ax^2dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}};$$

3°. $u = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{y}\right)$, expression qui est celle d'un arc de cercle dont le rayon est 1, et la tangente $\frac{x}{y}$; pour la différentier on fera $\frac{x}{y} = z$, d'où il résultera $u = \text{arc}(\text{tang} = z)$, et $du = \frac{dz}{1+z^2}$ (36); puis mettant au lieu de z et de dz leur valeur, on trouvera

$$du = \frac{\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}} = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2+x^2}.$$

43. La manière dont on écrit les différentielles des fonctions qui dépendent de plusieurs variables, donne lieu à des remarques importantes. Il ne faut pas con-

fondre alors $\frac{du}{dx}dx$ avec du, comme on pourrait le faire si u ne renfermait que la seule variable x, parce qu'ici le du de l'expression $\frac{du}{dx}$, ne désigne pas la différentielle totale de la fonction u, mais seulement la partie que produit la variation de x (41); et comme c'est le diviseur dx qui marque cette restriction (39), il faut le conserver pour distinguer $\frac{du}{dx}dx$, de la différentielle totale représentée simplement par du: il en est de même de $\frac{du}{dy}dy$, par rapport à y (41).

Les quantités $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, ... $\frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n}$, sont appelées souvent *différences partielles;* mais ce langage n'est pas exact; car les formules qu'on désigne ainsi n'expriment point la différence entre deux quantités.

Les vraies *différences partielles* de u sont d'abord

$$f(x+h, y) - f(x, y),$$
$$f(x, y+k) - f(x, y),$$

la première étant prise en n'ayant égard qu'au changement de x, et la seconde en ne supposant que celui de y. Les expressions

$$\frac{du}{dx}h, \quad \frac{du}{dy}k, \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dx}dx, \quad \frac{du}{dy}dy,$$

qui ne sont que les premiers termes des développemens de ces différences, doivent être nommées *différentielles partielles* (5); $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, resteront toujours les *coefficiens différentiels* du premier ordre de la fonction proposée,

et en général, $\frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n}$ sera, dans l'ordre $m+n$, le coefficient différentiel pris en différentiant m fois par rapport à x, et n fois par rapport à y; mais il faut remarquer qu'une fonction d'une seule variable n'a dans chaque ordre qu'un coefficient différentiel (17), tandis qu'une fonction de deux variables a deux coefficiens différentiels pour le premier ordre, trois pour le second, quatre pour le troisième, et ainsi de suite.

44. Voici comment on peut trouver ces divers coefficiens, en partant des deux premiers.

On a d'abord

$$du = \frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy,$$

prenant ensuite la différentielle des fonctions $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dy}$, qui doivent être traitées comme des fonctions de deux variables, il vient

$$d\,\frac{du}{dx} = \frac{d^2u}{dx^2}\,dx + \frac{d^2u}{dydx}\,dy,$$
$$d\,\frac{du}{dy} = \frac{d^2w}{dxdy}\,dx + \frac{d^2u}{dy^2}\,dy;$$

et parce que la différentielle seconde n'est autre chose que la différentielle de la différentielle première, on aura

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}\,dx^2 + 2\,\frac{d^2u}{dxdy}\,dxdy + \frac{d^2u}{dy^2}\,dy^2,$$

en regardant dx et dy comme des constantes, et en observant que les coefficiens différentiels dont les dénominateurs ne présentent que les divers arrangemens d'un même produit en dx et dy, sont identiques (40).

Si l'on différentie les coefficiens différentiels qui se trouvent dans le résultat précédent, il viendra

$$\mathrm{d}\,\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}\,\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}y\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}\,\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}\,\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2} = \frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}y^3}\,\mathrm{d}y,$$

et par conséquent,

$$\mathrm{d}^3u = \frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}\mathrm{d}x^3 + 3\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y + 3\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2 + \frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}y^3}\mathrm{d}y^3,$$

On continuera facilement cette formation, et l'on remarquera sans doute l'analogie des résultats avec les puissances du binome.

Il faut observer que, d'après la notation précédente, la série du n° 41 rentre dans celle du n° 23, lorsqu'on substitue $\mathrm{d}x$ à h, et $\mathrm{d}y$ à k; en sorte que si l'on désigne $\mathrm{f}(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y)$, par u', on a encore

$$u' - u = \frac{\mathrm{d}u}{1} + \frac{\mathrm{d}^2u}{1.2} + \frac{\mathrm{d}^3u}{1.2.3} + \text{etc.},$$

formule tout aussi générale que celle du n° 41, puisque les accroissemens $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ sont également arbitraires.

45. Il est aisé d'étendre ces considérations aux fonctions d'un nombre quelconque de variables, et de s'assurer que si l'on a

$$u = \mathrm{f}(t, x, y, z),$$

il en résulte,

$$\mathrm{f}(t+g, x+h, y+k, z+l) - \mathrm{f}(t, x, y, z) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}g + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}h + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}k + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}l + \text{etc.},$$

d'où l'on conclura

$$du = \frac{du}{dt}dt + \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz,$$

en désignant par

$$\frac{du}{dt}, \quad \frac{du}{dx}, \quad \frac{du}{dy}, \quad \frac{du}{dz},$$

les coefficiens différentiels de la fonction u, pris en y faisant varier seulement t, ou x, ou y, ou z.

Cette notation, due à Fontaine, est la plus simple et la plus expressive de toutes celles qu'on a proposées pour remplir les mêmes indications. Euler, dans la crainte que l'on ne confonde, par exemple, le coefficient différentiel $\frac{du}{dt}$ avec le rapport de la différentielle totale du à la différentielle dt, rapport qui est équivalent à

$$\frac{\frac{du}{dt}dt + \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz}{dt},$$

désigne ce rapport par $\frac{du}{dt}$, tandis qu'il exprime le coefficient différentiel par $\left(\frac{du}{dt}\right)$. Le sens du discours rend presque toujours cette distinction superflue; Fontaine d'ailleurs avait pourvu au cas où elle était absolument nécessaire, en proposant d'écrire le rapport ainsi : $\frac{1}{dt}du$; et comme ce rapport est employé plus rarement que le coefficient différentiel, il avait affecté à ce dernier le signe le plus simple, ce qui est conforme à la théorie de toutes les nomenclatures, et précisément le contraire de ce qu'a fait Euler.

46. Les résultats du Calcul différentiel devant toujours être indépendans des accroissemens des variables, le rapport $\frac{1}{dt}du$, ne saurait avoir un sens déterminé, qu'autant que les variables x, y, z, sont, au moins implicitement, des fonctions de t; et alors du exprime la différentielle d'une fonction composée d'un nombre quelconque d'autres fonctions de la même variable. En effet, si l'on suppose que les variables x, y, z dépendent de la variable t, et que l'on substitue aux accroissemens g, h, k, l, des expressions de la forme

$$dt,\ pdt,\ qdt,\ rdt,$$

l'ensemble des termes qui ne contiendront dt qu'à la première puissance, se composera des termes où les accroissemens g, h, k, l, ne passent pas cette puissance, et ne se multiplient pas entre eux : on aura donc encore

$$du = \frac{du}{dt}dt + \frac{du}{dx}pdt + \frac{du}{dy}qdt + \frac{du}{dz}rdt,$$

ce qui revient à

$$du = \frac{du}{dt}dt + \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz,$$

en remplaçant pdt, qdt, rdt, par les différentielles dx, dy, dz, que ces quantités représentent.

Ainsi *la différentielle d'une fonction renfermant un nombre quelconque d'autres fonctions d'une seule variable, est la somme des différentielles partielles relatives à chacune de ces fonctions.*

La règle du n° 11 n'est qu'un cas particulier de cet énoncé, car si l'on prend $u = txyz$, il donnera

$$du = xyzdt + tyzdx + txzdy + txydz.$$

De même, quand $u = z^y$, on a

$$\frac{du}{dz}dz = yz^{y-1}dz \quad (13), \qquad \frac{du}{dy}dy = z^y dy lz \quad (27),$$

et par conséquent

$$du = yz^{y-1}dz + z^y dy lz.$$

47. Je dirai ici très peu de chose sur la manière de réduire en séries les fonctions de deux variables, parce qu'il arrive le plus souvent qu'on ne les développe que par rapport à l'une des variables, en supposant à l'autre une valeur constante, et qu'alors ces fonctions doivent être traitées de même que celles d'une seule variable. Il sera peut-être utile néanmoins de faire voir que la formule du n° 39 s'emploie à développer les fonctions de deux variables, comme celle du n° 21 s'applique aux fonctions qui n'en renferment qu'une (22).

Si l'on fait $x = 0$, $y = 0$, dans la formule du n° 41, c'est-à-dire dans u et dans chacun de ses coefficiens différentiels, elle donnera le développement de $f(h, k)$ ordonné suivant les puissances des quantités h et k; mais on pourra écrire x au lieu de h, et y au lieu de k, et il en résultera

$$f(x, y) = u + \frac{1}{1}\left\{\frac{du}{dx}x + \frac{du}{dy}y\right\} + \frac{1}{1.2}\left\{\frac{d^2u}{dx^2}x^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}xy + \frac{d^2u}{dy^2}y^2\right\} + \text{etc.},$$

en observant de faire x et y nuls, tant dans u que dans les expressions qu'on obtiendra pour chacun des coefficiens différentiels (*).

(*) On pourrait encore arriver au développement de $f(x, y)$ par la différentiation, ainsi qu'on est parvenu à celui de $f(x)$, dans

De la différentiation des équations quelconques à deux variables.

48. Jusqu'ici je n'ai différentié que des *équations séparées*, c'est-à-dire dans lesquelles la variable se trouvait seule dans un membre, et la fonction dans l'autre; telles sont les équations de la forme $Y=X$, Y étant une fonction de y, et X une fonction de x; mais le plus grand nombre des équations que l'on rencontre dans les recherches analytiques ne se présente pas ainsi: la variable et la fonction y sont souvent mêlées ou combinées entre elles.

Lorsqu'on a une équation quelconque $f(x,y)=0$, entre x et y, son effet est de déterminer x par y, ou y par x, en sorte que l'une de ces quantités est fonction de l'autre; et si l'on change x en $x+h$, et y en $y+k$, il faut encore que l'on ait

$$f(x+h,\ y+k)=0,$$

---

la note de la page 29; car si l'on suppose

$$u=A+Bx+Cy+Dx^2+Exy+Fy^2+\text{etc.},$$

les lettres A, B, C, etc., désignant des quantités indépendantes de x et de y, et qu'on différentie cette équation par rapport à x et par rapport à y, plusieurs fois de suite, de manière à former les expressions des coefficiens différentiels

$$\frac{du}{dx},\quad \frac{du}{dy},\quad \frac{d^2u}{dx^2},\quad \frac{d^2u}{dxdy},\quad \frac{d^2u}{dy^2},\quad \text{etc.}$$

on aura, en égalant à zéro x et y, après les différentiations,

$$\frac{du}{dx}=B,\qquad \frac{du}{dy}=C,$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=1.2D,\qquad \frac{d^2u}{dxdy}=1.1E,\qquad \frac{d^2u}{dy^2}=1.2F,\ \text{etc.}:$$

la valeur de A se trouvera en cherchant celle de la fonction u, lorsque x et y sont nuls.

d'où

$$f(x+h,\ y+k)-f(x,\ y)=0,$$

équation qui, par le n° 41, se développe dans la forme

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{1}\left(\frac{du}{dx}h+\frac{du}{dy}k\right)\\&+\frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}h^2+2\frac{d^2u}{dxdy}hk+\frac{d^2u}{dy^2}k^2\right)\\&+\text{etc.}\end{aligned}\right\}=0,$$

u représentant $f(x, y)$.

Cela posé, chercher le coefficient différentiel de y, c'est chercher la limite du rapport $\frac{k}{h}$; or, si dans l'équation ci-dessus, on fait $k=\varpi h$, tous ses termes deviennent divisibles par h; et lorsqu'on pose ensuite $h=0$, pour passer à la limite demandée, il ne reste plus que

$$\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}\varpi=0,$$

où ϖ doit être remplacé par sa limite $\frac{dy}{dx}$ (5) : on aura donc

$$\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}=0,\quad\text{ou}\quad\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy=0.$$

Le dernier résultat, se confondant avec la différentielle totale de la fonction u (43), montre que *pour trouver le coefficient différentiel du premier ordre d'une fonction* y, *donnée par une équation* $u=0$ *entre deux variables* x *et* y, *il faut différentier le premier membre de cette équation, comme si les variables étaient indépendantes l'une de l'autre, égaler ensuite à zéro le résultat, et prendre la valeur de* $\frac{dy}{dx}$.

Cela fait, si l'on observe que la valeur de $\frac{dy}{dx}$ que je représenterai par p, ne contenant que x et y, est, en vertu de l'équation $u = 0$, une fonction de x seul, on en conclura que p doit changer quand on fait varier x, et prendre un accroissement que je désignerai par l; mais alors on peut regarder le premier membre de l'équation

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}\,p = 0,$$

comme une fonction de x, y et p, égalée à zéro, qui doit toujours rester nulle; et si on la représente par u', on aura, par la formule du n° 45,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{du'}{dx}\,h + \frac{du'}{dy}\,k + \frac{du'}{dp}\,l \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}\right\} = 0.$$

Or, tous les termes de cette expression deviendront divisibles par h, si l'on y fait $k = \varpi h$, $l = \rho h$; et ceux qui ne sont pas écrits, contenant les quantités h, k et l, à des puissances plus élevées que la première, s'évanouiront lorsqu'on fera $h = 0$, pour passer à la limite où l'on doit remplacer

$$\varpi \text{ par } \frac{dy}{dx} \text{ et } \rho \text{ par } \frac{dp}{dx};$$

il ne restera donc que

$$\frac{du'}{dx} + \frac{du'}{dy}\,\frac{dy}{dx} + \frac{du'}{dp}\,\frac{dp}{dx} = 0$$

ce qui revient à

$$\frac{du'}{dx}\,dx + \frac{du'}{dy}\,dy + \frac{du'}{dp}\,dp = 0.$$

et se confond avec la différentielle totale de la fonction u' : ainsi, *pour former l'équation qui exprime la relation entre le coefficient différentiel du premier ordre et celui du second, il faut différentier l'équation qui détermine le premier de ces coefficiens, en le regardant lui-même comme une nouvelle variable, puis diviser le résultat par* dx.

Faisant ensuite $\frac{dp}{dx} = q$, l'équation qu'on vient d'obtenir pourra être considérée comme une fonction u'' de x, y, p et q, égalée à zéro, et donnera une équation équivalente à $du'' = 0$, qui déterminera le coefficient différentiel r de la fonction q, c'est-à-dire le coefficient différentiel du 3e ordre de y, par les précédens.

On voit par là que *les équations qui expriment les relations des coefficiens différentiels d'une fonction donnée par une équation entre deux variables, se déduisent les unes des autres, par des différentiations successives, en traitant chacun de ces coefficiens comme une nouvelle variable.*

49. L'exemple suivant éclaircira tout ce qui précède. Soit l'équation

$$y^2 - 2mxy + x^2 - a^2 = 0;$$

la fonction u est ici $y^2 - 2mxy + x^2 - a^2$: si on la différentie, en y faisant varier x et y, et qu'on égale le résultat à zéro, on trouvera

$$2ydy - 2mxdy - 2mydx + 2xdx = 0,$$

ou
$$ydy - mxdy - mydx + xdx = 0 \quad (1);$$

en supprimant le facteur commun 2; et l'on en tirera

$$\frac{dy}{dx} = \frac{my - x}{y - mx}.$$

Pour avoir $\frac{dy}{dx}$, en x seul, il faudra substituer dans cette expression la valeur de y, qui, dans l'équation proposée, est

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 - x^2 + m^2x^2};$$

et il viendra

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + m^2x \pm m\sqrt{a^2 - x^2 + m^2x^2}}{\pm\sqrt{a^2 - x^2 + m^2x^2}}$$

$$= m \pm \frac{-x + m^2x}{\sqrt{a^2 - x^2 + m^2x^2}},$$

résultat semblable à celui qu'on déduirait immédiatement de l'expression

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 - x^2 + m^2x^2},$$

obtenue en résolvant l'équation proposée.

Maintenant, si l'on fait $\frac{dy}{dx} = p$, d'où il résulte $dy = pdx$, l'équation (1) se change en

$$(y - mx)p - my + x = 0;$$

et si on la différentie de nouveau, en considérant que y et p sont des fonctions de x, on arrive à

$$(y - mx)dp + p(dy - mdx) - mdy + dx = 0;$$

mettant ensuite pdx pour dy, qdx pour dp, et réduisant, il vient

$$(y - mx)q + p^2 - 2mp + 1 = 0,$$

équation qui donne la relation que le coefficient différentiel du second ordre q, ou $\frac{d^2y}{dx^2}$ (17), doit avoir

avec celui du premier ordre p, ou $\frac{dy}{dx}$, et avec les variables x et y.

En continuant de différentier de la même manière, on formerait l'équation de laquelle dépend le coefficient différentiel du troisième ordre, et ainsi de suite.

5o. Si l'on fait attention que $q = \frac{d^2y}{dx^2}$, et que... $d^2y = d(dy)$, on reconnaîtra que l'équation

$$(y - mx)q + p^2 - 2mp + r = 0,$$

se déduit immédiatement de l'équation

$$ydy - mxdy - mydx + xdx = 0 \qquad (1),$$

lorsqu'on la différentie en y faisant varier dy comme une fonction de x, et divisant ensuite par dx^2. En effet, on a premièrement

$$yd^2y - mxd^2y + dy^2 - 2mdxdy + dx^2 = 0 \qquad (2),$$

secondement

$$(y - mx)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2} - 2m\frac{dy}{dx} + 1 = 0,$$

équation qui, lorsqu'on y change $\frac{dy}{dx}$ en p, $\frac{d^2y}{dx^2}$ en q, devient celle que j'ai obtenue plus haut pour déterminer q.

En général, faire varier les quantités p, q, etc., comme des fonctions de x, c'est prendre les différentielles des expressions équivalentes $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, différentielles qui sont respectivement représentées par $\frac{d^2y}{dx}$, $\frac{d^3y}{dx^2}$, etc., c'est enfin regarder les quantités dy, d^2y, etc., comme des fonctions de x.

L'équation (1) est *la différentielle première* de la pro-

posée; l'équation (2) en est *la différentielle seconde*, etc.; et, d'après la remarque ci-dessus, *les différentielles d'une équation* PRIMITIVE *proposée se déduisent les unes des autres par la différentiation, en regardant* y, dy, d^2y, *etc., comme des fonctions de* x.

On passe aux équations qui donnent les coefficiens différentiels, en observant que ces coefficiens sont représentés par

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \text{ etc.},$$

ou en faisant

$$dy = pdx, \qquad d^2y = qdx^2, \quad \text{etc.}$$

Par ces dernières substitutions, les différentielles disparaissent, et il ne reste dans les résultats que les fonctions p, q, etc., absolument indépendantes de la valeur de l'accroissement dx.

51. L'équation proposée,

$$y^2 - 2mxy + x^2 - a^2 = 0,$$

étant du second degré, donne pour y deux valeurs, par le moyen desquelles l'équation

$$(y - mx)\,dy - (my - x)\,dx = 0 \qquad (1),$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{my - x}{y - mx},$$

donne aussi pour le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, deux valeurs correspondantes à celles de la fonction y.

Si, au lieu de résoudre l'équation proposée, pour en tirer la valeur de y, on éliminait cette variable, au moyen de l'équation différentielle (1), on aurait d'abord, en vertu de celle-ci,

$$y = \frac{x(mdy - dx)}{dy - mdx};$$

substituant dans la première, il viendrait, après les réductions,

$$(x^2-a^2-m^2x^2)dy^2-(2mx^2-2ma^2-2m^3x^2)dxdy + (x^2-m^2x^2-a^2m^2)dx^2=0.$$

Cette dernière étant résolue par rapport à dy, donnerait les mêmes résultats que ceux qu'on obtient en différentiant les valeurs de y (49); et après l'avoir divisée par dx^2, on en tirerait immédiatement celles du coefficient différentiel. On aurait alors

$$(x^2-a^2-m^2x^2)\frac{dy^2}{dx^2}-(2mx^2-2ma^2-2m^2x^2)\frac{dy}{dx} + x^2-m^2x^2-a^2m^2=0;$$

et en dégageant la seconde puissance du coefficient différentiel, exprimée par $\frac{dy^2}{dx^2}$, on arriverait à

$$\frac{dy^2}{dx^2}-2m\frac{dy}{dx}+\frac{x^2-m^2x^2-a^2m^2}{x^2-a^2-m^2x^2}=0.$$

52. Il est facile d'appliquer ce qui précède à des exemples plus compliqués, où dans lesquels les variables montent à un degré plus élevé. Soit encore l'équation

$$y^3-3axy+x^3=0;$$

la différentiation donnera

$$3y^2dy-3axdy-3aydx+3x^2dx=0;$$

ou, en supprimant le facteur commun 3,

$$y^2dy-axdy-aydx+x^2dx=0 \qquad (1),$$

et par conséquent

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}.$$

La fonction y, dans cet exemple, étant donnée par une équation du troisième degré, doit avoir trois valeurs; et en les substituant successivement dans l'expres-

sion de $\frac{dy}{dx}$, on obtiendra un pareil nombre de valeurs pour le coefficient différentiel. On voit en général que ce coefficient aura toujours un nombre de valeurs égal à celui dont la fonction y est susceptible dans l'équation proposée : il en sera de même à l'égard de la différentielle.

Si l'on éliminait y entre les deux équations

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0,$$
$$y^2dy - axdy - aydx + x^2dx = 0 \qquad (1),$$

on aurait pour résultat une équation du troisième degré par rapport à dy, et qui renfermerait les trois valeurs dont cette différentielle est susceptible.

Ayant trouvé l'expression de dy ou celle de $\frac{dy}{dx}$, on parviendra à celles de d^2y et de $\frac{d^2y}{dx^2}$, en différentiant par rapport à dy, à y et à x, suivant la règle établie n° 50, l'équation (1), différentielle première de la proposée. En opérant ainsi et réduisant, on aura

$$y^2d^2y - axd^2y + 2ydy^2 - 2adxdy + 2xdx^2 = 0,$$

ou bien

$$(y^2 - ax)d^2y + 2ydy^2 - 2adxdy + 2xdx^2 = 0 \quad (2) :$$

voilà la différentielle seconde de l'équation proposée. Si on la combine avec la différentielle première, on pourra éliminer dy, et le résultat donnera l'expression de d^2y en x, dx et y. On chassera, si l'on veut, la fonction y, au moyen de l'équation proposée.

En divisant l'équation (2) par dx^2, elle prend la forme

$$(y^2 - ax)\frac{d^2y}{dx^2} + 2y\frac{dy^2}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + 2x = 0,$$

et ne renferme plus que les coefficiens différentiels $\frac{d^2y}{dx^2}$ et $\frac{dy}{dx}$. Mettant au lieu de $\frac{dy}{dx}$ sa valeur $\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$, tirée de (1), il viendra

$$(y^2-ax)\frac{d^2y}{dx^2}$$
$$+2y\left(\frac{ay-x^2}{y^2-ax}\right)^2-2a\left(\frac{ay-x^2}{y^2-ax}\right)+2x=0,$$

et en réduisant au même dénominateur,

$$(y^2-ax)^3\frac{d^2y}{dx^2}+2xy^4-6ax^2y^2+2x^4y+2a^3xy=0;$$

mais la quantité

$$2xy^4-6ax^2y^2+2x^4y$$

n'est autre chose que

$$2xy(y^3-3axy+x^3):$$

elle est donc nulle en vertu de l'équation proposée, et par conséquent on a

$$(y^2-ax)^3\frac{d^2y}{dx^2}+2a^3xy=0,$$

ou
$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}.$$

En différentiant l'équation (2) par rapport à d^2y, dy, y et x, on formera la différentielle troisième de l'équation proposée, et l'on en tirera la valeur de d^3y, lorsqu'on aura éliminé d^2y et dy à l'aide des équations (1) et (2); divisant le résultat par dx^3, on aura l'expression du coefficient $\frac{d^3y}{dx^3}$. En continuant ainsi l'on parviendra aux différentielles ultérieures.

53. La remarque du n° 7, sur les constantes qui disparaissent par la différentiation des fonctions, s'applique également aux équations. Si l'on avait, par

exemple, $y^2 = ax + b$, la différentielle $2ydy = adx$, étant indépendante de b, appartiendrait à chacune des équations particulières qui résultent de la proposée, en donnant à b toutes les valeurs possibles.

Mais l'on peut aussi parvenir, dans le cas actuel, à une équation indépendante de a, quoique la différentiation n'ait point fait disparaître cette constante : il suffit pour cela d'éliminer a entre les deux équations

$$y^2 = ax + b, \qquad 2ydy = adx;$$

et l'on trouvera

$$y^2dx = 2xydy + bdx.$$

Quoique cette dernière équation ne soit pas la différentielle immédiate de la proposée, elle en dérive cependant de manière qu'étant divisée par dx, elle exprime la relation qui doit exister entre la variable x, la fonction y et le coefficient $\frac{dy}{dx}$, quel que soit a.

Si la constante qu'on élimine n'est pas au premier degré dans l'équation proposée, le résultat qu'on obtiendra renfermera des puissances de dy et de dx supérieures à la première : je prendrai pour exemple,

$$y^2 - 2ay + x^2 = a^2.$$

En différentiant on trouvera

$$ydy - ady + xdx = 0,$$

d'où

$$a = \frac{ydy + xdx}{dy};$$

et substituant dans la proposée, il viendra, après avoir ordonné par rapport à dy et divisé par dx^2,

$$(x^2 - 2y^2)\frac{dy^2}{dx^2} - 4xy\frac{dy}{dx} - x^2 = 0 :$$

telle est la relation qui doit exister entre la variable x,

la fonction y et son coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, indépendamment d'aucune valeur particulière de la constante a.

En résolvant l'équation

$$y^2 - 2ay + x^2 = a^2,$$

par rapport à a, on en aurait tiré

$$a = -y \pm \sqrt{2y^2 + x^2};$$

et a étant alors dégagé des variables x et y, la différentiation seule l'aurait fait disparaître: on aurait trouvé

$$-dy \pm \frac{2ydy + xdx}{\sqrt{2y^2 + x^2}} = 0.$$

En faisant évanouir le radical, on s'assurera que cette équation est la même que celle qui résulte de l'élimination.

54. On peut faire disparaître autant de constantes qu'on voudra, en différentiant un nombre de fois égal à celui de ces constantes. Soit

$$y^2 = m(a^2 - x^2);$$

on aura d'abord

$$ydy = -mxdx;$$

différentiant de nouveau, on trouvera

$$yd^2y + dy^2 = -mdx^2;$$

substituant pour m sa valeur $-\frac{ydy}{xdx}$, tirée de l'équation précédente, et divisant par dx^2, il viendra

$$xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy^2}{dx^2} - y\frac{dy}{dx} = 0,$$

résultat indépendant des constantes m et a.

55. La différentiation, combinée avec l'élimination,

fournit le moyen de faire disparaître les exposans. Soit par exemple

$$P^n = Q,$$

P et Q étant des fonctions quelconques de x et de y; en prenant la différentielle de cette équation, il viendra

$$nP^{n-1}\mathrm{d}P = \mathrm{d}Q, \quad \text{ou} \quad nP^n\mathrm{d}P = P\mathrm{d}Q,$$

en multipliant les deux membres par P; et si l'on met pour P^n sa valeur, on obtiendra

$$nQ\mathrm{d}P = P\mathrm{d}Q,$$

équation dans laquelle la quantité P est délivrée de l'exposant n.

On parvient au même résultat, en prenant le logarithme de chaque membre de l'équation proposée; on a successivement

$$nlP = lQ, \qquad n\frac{\mathrm{d}P}{P} = \frac{\mathrm{d}Q}{Q} \quad (28),$$

et par conséquent $nQ\mathrm{d}P = P\mathrm{d}Q$.

Cette remarque sert à développer, suivant les puissances de x, la fonction

$$(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{etc.})^n,$$

quel que soit l'exposant n. On pose pour cela,

$$(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{etc.})^n = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.};$$

en passant aux logarithmes, il vient

$$nl(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{etc.}) = l(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.});$$

différentiant ensuite, on obtient

$$\frac{n(b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 + \text{etc.})\mathrm{d}x}{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{etc.}} = \frac{(B + 2Cx + 3Cx^2 + 4Ex^3 + \text{etc.})\mathrm{d}x}{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}};$$

supprimant le facteur commun dx, faisant disparaître les dénominateurs, développant et ordonnant, par rapport aux puissances de x, on a l'équation

$$\left.\begin{array}{rrrrrr} nbA + & 2ncAx + & 3ndAx^2 + & 4neAx^3 + & \text{etc.} \\ + & nbBx + & 2ncBx^2 + & 3ndBx^3 + & \text{etc.} \\ & + & nbCx^2 + & 2ncCx^3 + & \text{etc.} \\ & & + & nbDx^3 + & \text{etc.} \end{array}\right\} =$$

$$\left.\begin{array}{rrrrrr} aB + & 2aCx + & 3aDx^2 + & 4aEx^3 + & \text{etc.} \\ + & bBx + & 2bCx^2 + & 3bDx^3 + & \text{etc.} \\ & + & cBx^2 + & 2cCx^3 + & \text{etc.} \\ & & + & dBx^3 + & \text{etc.} \end{array}\right\}$$

qui doit être identique quelque valeur qu'ait x; il faut donc que les coefficiens de chacune des puissances de cette quantité soient les mêmes dans les deux membres : de là résultent les équations

$$\begin{aligned} nbA &= aB, \\ 2ncA + nbB &= 2aC + bB, \\ 3ndA + 2ncB + nbC &= 3aD + 2bC + cB, \\ &\text{etc.}, \end{aligned}$$

dont on tirera les valeurs des coefficiens B, C, D, etc.

Le coefficient A semble demeurer indéterminé, mais on en trouve la valeur en faisant $x = o$ dans l'équation

$$(a + bx + \text{etc.})^n = A + Bx + \text{etc.},$$

qui par cette hypothèse se réduit à

$$a^n = A.$$

Substituant cette expression dans les équations précédentes, on en conclut

$$B=\frac{n}{1}a^{n-1}b,$$

$$C=na^{n-1}c+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2,$$

$$D=na^{n-1}d+\frac{n(n-1)}{1.1}a^{n-2}bc+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3,$$

etc.,

d'où $(a+bx+cx^2+dx^3+\text{etc.})^n =$

$$a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}bx+\left\{na^{n-1}c+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2\right\}x^2$$

$$+\left\{na^{n-1}d+\frac{n(n-1)}{1.1}a^{n-2}bc+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3\right\}x^3$$

$+$ etc.

56. On peut faire disparaître aussi les transcendantes d'une équation, en la combinant avec ses différentielles. L'une des plus simples de ces fonctions est

$$l(a+bx+cx^2+dx^3+\text{etc}),$$

si l'on représente son développement par

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.},$$

et qu'on prenne la différentielle de l'équation

$$l(a+bx+cx^2+dx^3+\text{etc.})=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.},$$

on trouvera

$$\frac{b+2cx+3dx^2+\text{etc.}}{a+bx+cx^2+dx^3+\text{etc.}}=B+2Cx+3Dx^2+\text{etc.},$$

et l'on déterminera les coefficiens A, B, C, D, etc. comme à l'ordinaire.

Soit encore pour exemple

$$\sin(a+bx+cx^2+dx^3+\text{etc.})$$
$$=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.};$$

en faisant, pour abréger,

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.} = u,$$
$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.} = y,$$

il en résultera $y = \sin u$; et en différentiant, il viendra $dy = du \cos u$. On pourrait éliminer $\cos u$ au moyen de sa valeur $\sqrt{1 - \sin u^2}$, qui donne $\cos u = \sqrt{1 - y^2}$, et l'on aurait alors $dy = du\sqrt{1 - y^2}$; mais il resterait encore à faire disparaître le radical.

Pour éviter cet inconvénient, on différentiera une seconde fois l'équation $dy = du \cos u$, en se rappelant que u est une fonction de x, aussi bien que y; et il viendra $d^2y = d^2u \cos u - du^2 \sin u$: mettant pour $\sin u$ et $\cos u$, leurs valeurs y et $\frac{dy}{du}$, on aura

$$d^2y = \frac{dy}{du} d^2u - y du^2, \text{ ou } du d^2y - dy d^2u + y du^3 = 0.$$

Il ne s'agit plus maintenant que de substituer à y, dy, d^2y, du, d^2u, du^3, leur valeur; or

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.},$$

donne

$$dy = (B + 2Cx + 3Dx^2 + \text{etc.})\, dx,$$
$$d^2y = (2C + 2.3Dx + \text{etc.})\, dx^2;$$

et pour ne pas m'engager dans de trop longs calculs, je réduirai la fonction proposée à $\sin(a + bx + cx^2)$, en faisant d, e, etc. $= 0$: dans ce cas particulier,

$$du = (b + 2cx)\, dx,$$
$$d^2u = 2c dx^2,$$
$$du^3 = (b^3 + 6b^2cx + 12bc^2x^2 + 8c^3x^3)\, dx^3.$$

Au moyen de ces valeurs, l'équation

$$du d^2y - dy d^2u + y du^3 = 0,$$

devient divisible par dx^3; et en l'ordonnant par rapport à x, elle prend la forme suivante :

$$\left.\begin{array}{rrrr} 2bC + & 6bDx + & 12bEx^2 + \text{etc.} \\ + & 4cCx + & 12cDx^2 + \text{etc.} \\ + b^3A + & 6b^2cAx + & 12bc^2Ax^2 + \text{etc.} \\ + & b^3Bx + & 6b^2cCx^2 + \text{etc.} \\ & + & b^3Cx^2 + \text{etc.} \\ - 2cB - & 4cCx - & 6cDx^2 - \text{etc.} \end{array}\right\} = 0,$$

En égalant à zéro les coefficiens de chaque puissance de x, on obtiendra les équations qui détermineront C, D, E, etc.; mais pour A et B, il faut recourir aux équations

$$y = \sin u \quad \text{et} \quad \mathrm{d}y = \mathrm{d}u \cos u.$$

Lorsque $x = 0$, il vient

$$u = a, \quad y = A, \quad \mathrm{d}u = b\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}y = B\mathrm{d}x;$$

et il résulte de ces valeurs,

$$A = \sin a, \qquad B = b \cos a.$$

57. Le calcul différentiel, dont nous n'avons encore fait usage que pour le développement des fonctions, peut aussi être utile dans la résolution des équations algébriques; mais ici nous nous bornerons à montrer comment la remarque du n° 18 conduit à la détermination des racines égales.

Soit $V = 0$, une équation ayant un nombre n de racines égales à a; son premier membre V sera nécessairement de la forme

$$V = X(x - a)^n,$$

X contenant les facteurs inégaux; et si l'on différentie, en commençant par le facteur $(x-a)^n$, on trouvera

$$\frac{dV}{dx} = nX(x-a)^{n-1} + \frac{dX}{dx}(x-a)^n,$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = n(n-1)X(x-a)^{n-2} + 2n\frac{dX}{dx}(x-a)^{n-1} + \frac{d^2X}{dx^2}(x-a)^n,$$

etc.,

ce qui suffit pour faire voir que le facteur $x-a$ demeurera commun à tous les termes des coefficiens différentiels de V, tant que l'exposant de leur ordre sera $< n$. Ces coefficiens s'évanouiront donc jusqu'à l'ordre n exclusivement, quand on y fera $x=a$; et les équations

$$V=0, \quad \frac{dV}{dx}=0, \quad \frac{d^2V}{dx^2}=0, \ldots \frac{d^{n-1}V}{dx^{n-1}}=0,$$

auront lieu en même temps, au moyen d'un diviseur commun : pour la première et la seconde, ce diviseur sera $(x-a)^{n-1}$.

On reconnaîtra sans peine que les équations $\frac{dV}{xd}=0$, $\frac{d^2V}{dx^2}=0$, etc., sont précisément celles que l'on a désignées par $A=0$, $B=0$, etc., dans le n° 205 des *Élémens d'Algèbre*.

Ces considérations s'appliqueront aisément au cas où la proposée renfermera plusieurs espèces de racines égales, c'est-à-dire, sera de la forme

$$X(x-a)^n(x-b)^p=0;$$

car en différentiant le premier membre, suivant la règle du n° 11, on trouvera

$$\left.\begin{array}{l} nX(x-a)^{n-1}(x-b)^p + pX(x-a)^n(x-b)^{p-1} \\ + \frac{dX}{dx}(x-a)^n(x-b)^p \end{array}\right\},$$

quantité qui s'évanouit aussi lorsqu'on fait $x=a$ ou $x=b$, et dont le diviseur commun avec le premier

membre de l'équation proposée, est évidemment

$$(x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1}.$$

On peut opérer de même, quel que soit le nombre des facteurs $(x-a)^n$, $(x-b)^p$, $(x-c)^q$, etc., et l'on trouvera toujours que le *diviseur commun aux fonctions* V, $\frac{dV}{dx}$, *doit contenir les facteurs égaux elles-mêmes chacun à une puissance moindre d'une unité, que dans l'équation proposée* $V = 0$.

Application du Calcul différentiel à la théorie des courbes.

58. Les considérations géométriques prouvent d'une manière bien évidente que le rapport des accroissemens d'une fonction et de sa variable est en général susceptible de limite.

Toute fonction d'une seule variable peut être représentée par l'ordonnée d'une courbe dont cette variable est l'abscisse (Trig. 86); *et le rapport de l'ordonnée de la courbe avec la soutangente correspond au coefficient différentiel de la fonction.* En effet, si, dans une courbe
FIG. 1. quelconque *CD*, *fig.* 1, on mène par deux points M et M' une sécante MM' prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre en S, l'axe des abscisses AB, et par le premier point une tangente MT; qu'on tire les deux ordonnées PM, $P'M'$, et la droite MQ, parallèle à AB, les triangles semblables $M'QM$ et MPS montreront que les rapports $\frac{M'Q}{MQ}$ et $\frac{PM}{PS}$ sont toujours égaux. Mais si l'on conçoit que le point M' se rapproche sans cesse du point M, le point S se rapprochera aussi du point T; la ligne PS tendra donc à devenir égale à la sou-

tangente PT : le rapport $\frac{PM}{PS}$ s'approchera de même du rapport $\frac{PM}{PT}$ qu'il aura pour limite, et qui sera par conséquent aussi celle du rapport des accroissemens MQ et $M'Q$, que reçoivent simultanément l'abscisse MP et l'ordonnée PM.

Il suit de là, que lorsque l'expression du rapport $\frac{PM}{PT}$ sera connue, elle fournira le coefficient différentiel de la fonction correspondante à l'ordonnée (7), et que, réciproquement, si cette fonction est connue, son coefficient différentiel déterminera la soutangente PT, puisqu'en désignant PM par y, et son coefficient différentiel par p, on aura $p = \frac{y}{PT}$, d'où $PT = \frac{y}{p}$, valeur au moyen de laquelle on mènera la tangente au point M.

59. On voit donc que, par son principe fondamental, le Calcul différentiel résout directement le *problème des tangentes*, pour les courbes dont on a l'équation; aussi est-ce en cherchant la solution de ce problème, que les géomètres sont parvenus au Calcul différentiel, qu'on a présenté depuis sous des points de vue très variés; mais quelle que soit l'origine qu'on lui assigne, il reposera toujours immédiatement sur un *fait analytique* antérieur à toute hypothèse, comme la chute des corps graves vers la surface de la terre, est antérieure aux diverses explications qu'on en a données : et ce fait est précisément la propriété dont jouissent toutes les fonctions d'admettre une limite dans le rapport que leurs accroissemens ont avec ceux de la variable dont elles dépendent. Cette limite, différente pour chaque fonction, et toujours indépen-

dante des valeurs absolues des accroissemens, caractérise d'une manière qui lui est propre, la *marche* de la fonction dans les divers états par lesquels elle peut passer. En effet, plus les accroissemens de la variable indépendante sont petits, plus les valeurs successives de la fonction sont resserrées, plus enfin cette fonction approche d'être soumise à la loi de continuité dans ses changemens, et plus leur rapport à ceux de la variable indépendante approche d'être égal à la fonction assignée par le calcul. On doit entendre par la loi *de continuité*, celle qui s'observe dans la description des lignes par le mouvement, et d'après laquelle les points consécutifs d'une même ligne se succèdent sans aucun intervalle. La manière d'envisager les grandeurs dans le calcul, ne paraît pas d'abord admettre cette loi, puisqu'on suppose toujours un intervalle entre deux valeurs consécutives de la même variable; mais en le faisant évanouir, pour passer à la limite, on exprime qu'il y a continuité.

Il me paraît maintenant très évident que la métaphysique précédente renferme l'explication philosophique des propriétés du Calcul différentiel et du Calcul intégral, soit par rapport aux recherches sur les courbes, soit par rapport à celles qui concernent le mouvement. La difficulté des unes et des autres ne vient que de ce qu'il y a continuité dans les changemens des lignes ou dans ceux des vitesses; et la considération des limites (ou toute autre équivalente), donne le moyen d'établir cette continuité dans le Calcul (*).

60. Lorsque l'on donne à l'abscisse des valeurs suc-

(*) Ceux qui désireraient plus de développement, dans ces considérations générales, pourront consulter la note *A*, placée à la fin de l'Ouvrage.

cessives, les ordonnées qui répondent à ces valeurs, déterminent sur la courbe, des points que l'on peut regarder comme les sommets des angles d'un polygone inscrit à cette courbe.

Si l'on prend, par exemple, sur l'axe des abscisses les points P, P', P'', etc., *fig.* 2, distans entre eux fig. 2.
d'une même quantité h, on aura

$$AP = x, \quad AP' = x + h, \quad AP'' = x + 2h, \quad \text{etc.};$$

qu'on élève les ordonnées correspondantes PM, $P'M'$, $P''M''$, etc., et que l'on joigne les points M, M', M'', etc., par des cordes, on formera le polygone $MM'M''$ etc., qui différera d'autant moins de la courbe proposée, que les points M, M', M'', etc., se rapprocheront davantage, mais en même temps le nombre de ses côtés augmentera de plus en plus, puisque la distance PP' sera contenue un nombre de fois de plus en plus grand dans une abscisse déterminée AB. La courbe CD sera évidemment la limite de tous ces polygones, et par conséquent les propriétés qui conviendront à cette limite, conviendront aussi à la courbe proposée (*).

(*) Leibnitz a toujours envisagé le Calcul différentiel sous un point de vue à peu près semblable.

« Sentio autem et hanc et alias (methodos) hactenus adhibitas » omnes, deduci posse ex generali quodam meo dimetiendorum » curvilineorum principio, *quod figura curvilinea censenda sit* » *æquipollere polygono infinitorum laterum;* unde sequitur, » quicquid de tali polygono demonstrari potest, sive ita, ut nullus » habeatur ad numerum laterum respectus, sive ita, ut tantò » magis verificetur, quantò major sumitur laterum numerus, ita, » ut error tandem fiat quovis dato minor; id de curva posse pro- » nuntiari. » (*Acta Eruditorum*, *ann.* 1684, *pag.* 585.)

Il est évident que cette métaphysique est aussi très lumineuse, et ne diffère de celle que j'ai présentée ci-dessus que parce que la *limite* y est désignée comme un polygone d'un nombre infini de côtés infiniment petits.

Cela posé, si l'on mène MQ et $M'Q'$ parallèles à l'axe AB, $M'Q$ sera la différence des deux ordonnées consécutives PM et $P'M'$, $M''Q'$ celle des ordonnées $P'M'$ et $P''M''$. En prolongeant la droite MM' jusqu'en N'', on formera les triangles égaux $MM'Q$, $M'N''Q'$, qui donneront $M'Q = N''Q'$; il en résultera $M''N'' = N''Q' - M''Q'$ ou $M''N'' = M''Q' - N''$, et par conséquent $M''Q' - M'Q = \pm M''N''$ selon que la courbe est concave ou convexe vers l'axe des abscisses. $M''N''$ sera donc la différence des lignes $M'Q$ et $M''Q'$.

Le calcul différentiel donne l'expression de ces diverses droites; car l'on a successivement (23)

$$PM = y,$$

$$P'M' = y + \frac{dy}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.},$$

$$P''M'' = y + \frac{dy}{dx}\frac{2h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{4h^2}{1.2} + \text{etc.},$$

$$P'M' - PM = M'Q = \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \text{etc.},$$

$$P''M'' - P'M' = M''Q' = \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{3h^2}{2} + \text{etc.},$$

$$M''Q' - M'Q = \pm M''N'' = \frac{d^2y}{dx^2}h^2 + \text{etc.};$$

d'où il suit que si l'on change h en dx, la valeur de $M'Q$ approchera de plus en plus de la différentielle première dy, celle de $M''N''$, de la différentielle seconde d^2y, à mesure que l'on prendra dx plus petit. En considérant un quatrième point du polygone, on trouverait de même la ligne correspondante à la différentielle troisième.

61. Les lignes PM, $M'Q$, $M''N''$, ont, par rapport au calcul des limites, une subordination marquée par

l'exposant dont l'accroissement h est affecté dans leur premier terme, exposant qui est le même que celui de l'ordre de la différentielle à laquelle ils correspondent. On voit en effet que le rapport de $M'Q$ à PM diminue sans cesse et finit par s'évanouir, lorsque $h=0$, qu'il en est de même du rapport de $M'N''$ à $M'Q$; mais que si l'on comparait la première de celles-ci au quarré de la seconde, et qu'on supprimât d'abord le facteur h^2, commun aux deux termes du rapport, ce rapport aurait alors une limite assignable qui serait celui de $\frac{d^2y}{dx^2}$ à $\frac{dy^2}{dx^2}$ (*).

62. *On voit en même temps*, par ce qui précède, que le coefficient différentiel du premier ordre $\frac{dy}{dx}$, exprimant le rapport $\frac{PM}{PT}$, *fig.* 1, donne la tangente trigonométrique de l'angle MTP, que fait, avec l'axe des abscisses AB, la droite qui touche la courbe au point M, et caractérise la marche de la courbe aux environs du point M; car si AB désigne le côté positif de l'axe des abscisses, l'angle MTP et sa tangente seront positifs, quand les ordonnées iront en croissant comme dans la figure 1, et négatifs dans le cas contraire. FIG. 1.

(*) Ceci fournit une explication bien simple des différens ordres d'*infiniment petits* que Leibnitz admettait. Il regardait la différentielle première comme infiniment petite à l'égard de l'ordonnée, la différentielle seconde comme infiniment petite à l'égard de la différentielle première, et ainsi de suite. D'après ce principe, il négligeait les unes par rapport aux autres; et c'est en effet ce qu'il faut faire lorsque l'on veut passer aux *limites*; puisqu'il ne peut rester dans l'expression de la limite du rapport des séries ci-dessus, que les termes où h est au degré le plus bas, et que la différentielle d'un ordre quelconque m, étant nécessairement de la forme $d^m y = t dx^m$ (17), est comparable seulement aux expressions différentielles homogènes, ou du même degré, par rapport à l'accroissement dx.

Cela peut se conclure aussi de l'expression de $M'Q'$ — $M'Q$, différence des ordonnées consécutives PM et $P'M'$, en observant qu'il est toujours possible de prendre l'accroissement h assez petit, pour que le premier terme $\frac{dy}{dx}h$ surpassant la somme de tous les autres, détermine alors le signe du résultat de la série; car une expression de la forme

$$Ah^{\alpha} + Bh^{\beta} + Ch^{\gamma} + \text{etc.},$$

dans laquelle les exposans α, β, γ, etc., sont tous positifs et vont en croissant, peut être mise sous cette autre,

$$h^{\alpha}(A + Bh^{\beta-\alpha} + Ch^{\gamma-\alpha} + \text{etc.}),$$

par laquelle on voit que la partie $Bh^{\beta-\alpha} + Ch^{\gamma-\alpha} + \text{etc.}$, du second facteur, décroissant jusqu'à zéro, lorsque h diminue jusqu'à s'évanouir, doit, avant d'arriver à ce terme, devenir plus petite que la quantité A qui est indépendante de h (*). Dans cet état de choses, c'est le signe de A qui détermine celui de toute l'expression, qui sera donc positive si A est positif, et négative dans le cas contraire.

Il suit de là que la fonction y sera croissante ou décroissante, selon que $\frac{dy}{dx}$ sera positif ou négatif.

De plus, si l'on fait attention que lorsque l'ordonnée est positive, la différence $M''Q' - M'Q$, *fig.* 2, est négative ou positive selon que la courbe est concave ou convexe vers l'axe des abscisses, et que cette circonstance doit avoir lieu quelque près qu'on suppose les

FIG. 2.

(*) On trouvera à la fin de ce Traité un procédé pour assigner les valeurs de h qui remplissent cette condition dans la série de Taylor.

points P, P', P'', ou quelque petite que soit h, on en conclura que le terme $\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2}$, qui commence le développement de $M''Q' - M'Q$, et qui peut être rendu le plus considérable, doit avoir le même signe que la différence $M''Q' - M'Q$; or, la quantité h^2 étant essentiellement positive, il suit de ce qui précède que $\frac{d^2y}{dx^2}$ est négatif quand la courbe est concave vers son axe des abscisses, et positif dans le cas contraire.

L'inspection des courbes *en* placées au-dessous de l'axe des abscisses, montre que les signes de $\frac{d^2y}{dx^2}$ doivent être pris dans un ordre inverse quand l'ordonnée est négative, et que par conséquent *une courbe est concave ou convexe vers l'axe des abscisses, selon que l'ordonnée et son coefficient différentiel du second ordre sont de signes contraires ou de même signe.*

63. On suppose ordinairement comme une chose évidente, qu'*un petit arc de courbe peut être pris pour sa corde*, c'est-à-dire que *le rapport de l'arc et de sa corde a pour limite l'unité* : cette proposition, très importante, a néanmoins besoin d'être démontrée, et peut l'être comme il suit.

Le triangle rectangle $MM'Q$, *fig.* 3, donne

$$MM' = \sqrt{MQ^2 + M'Q^2};$$

on a de plus (60),

$$MQ = h, \quad M'Q = \frac{dy}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

On peut mettre ce développement sous la forme

$$ph + Ph^2,$$

en faisant

$$\frac{dy}{dx} = p, \text{ et } \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.} = P$$

on obtiendra

$$MM' = \sqrt{h^2 + (ph + Ph^2)^2} = h\sqrt{1 + (p + P$$

Menant ensuite la tangente MN, on trouvera

$$NQ = MQ \operatorname{tang} NMQ = \frac{dy}{dx}h = ph \quad (62),$$

$$MN = \sqrt{h^2 + p^2h^2} = h\sqrt{1 + p^2},$$

$$M'N = NQ - M'Q = -\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} - \text{etc.} = -Ph^2;$$

et l'on conclura de là

$$\frac{MN + M'N}{MM'} = \frac{h\sqrt{1+p^2} - Ph^2}{h\sqrt{1+(p+Ph)^2}} = \frac{\sqrt{1+p^2} - Ph}{\sqrt{1+(p+Ph)^2}},$$

rapport qui a pour limite,

$$\frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+p^2}} = 1.$$

Mais l'arc MOM' est toujours compris entre la corde MM' et la ligne brisée $MN + M'N$; donc, à plus forte raison, le rapport $\frac{MOM'}{MM'}$ a pour limite l'unité.

64. Il est évident que l'arc d'une courbe est une fonction de l'abscisse; et pour avoir le coefficient différentiel de cette fonction, il faut chercher la limite du rapport $\frac{MOM'}{PP'}$; or on a

$$\frac{MOM'}{PP'} = \frac{MM'}{PP'} \times \frac{MOM'}{MM'}.$$

Substituant la valeur du premier rapport du second membre, puis faisant $h=0$ pour passer à la limite, le deuxième rapport deviendra l'unité, et l'on aura (8) $\sqrt{1+p^2}$; si l'on nomme donc z l'arc CM, on obtiendra

$$\frac{dz}{dx}=\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}, \quad \text{ou} \quad dz=\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Le cercle dont l'équation est

$$x^2+y^2=a^2,$$

donnant

$$xdx+ydy=0, \quad \text{ou} \quad dy=-\frac{xdx}{y},$$

on trouve

$$dz=\sqrt{dx^2+\frac{x^2dx^2}{y^2}}=\frac{dx}{y}\sqrt{x^2+y^2}$$
$$=\frac{adx}{y}=\frac{adx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

résultat qui rentre dans celui du n° 36, lorsqu'on suppose $a=R$.

65. La différentielle de l'aire du *segment ACMP*, *fig.* 4, d'une courbe, s'obtient en observant que le rapport des rectangles $PP'QM$ et $PP'M'N$, qui ont même base, est égal à $\frac{P'M'}{PM}$, et que sa limite est par conséquent l'unité. Mais le trapèze curviligne $PP'M'M$, qui représente l'accroissement que reçoit le segment $ACMP$ lorsque l'abscisse augmente de PP', étant toujours compris entre les deux rectangles dont on vient de parler, son rapport avec l'un quelconque de ces rectangles a aussi pour limite l'unité. Cela posé, il est visible que FIG. 4.

$$\frac{PP'M'M}{PP'} = \frac{PP'QM}{PP'} \cdot \frac{PP'M'M}{PP'QM} = PM.\frac{PP'M'M}{PP'QM}$$

et d'après ce qui vient d'être dit, la limite de la dernière expression ci-dessus est $PM \times 1$ ou PM. En nommant donc s la fonction de x, correspondante à l'aire $ACMP$, son coefficient différentiel (8) sera

$$\frac{ds}{dx} = y, \quad \text{d'où} \quad ds = y\,dx.$$

Dans le cercle,

$$ds = dx\sqrt{a^2 - x^2};$$

ainsi, quoiqu'on ne puisse pas assigner l'expression algébrique du segment circulaire, on parvient à celle de sa différentielle par la considération des limites; et l'on en aurait le développement en série, au moyen du théorème du n° 22, ou par un procédé semblable à celui du n° 38.

66. Connaissant, par le coefficient $\frac{dy}{dx}$, l'angle MTP, rien n'est plus aisé que de construire la tangente MT, fig. 1; mais on se sert plus ordinairement de la *sous-tangente* PT, qui se calcule en observant que

$$\frac{PM}{PT} = \frac{dy}{dx} \text{ donne } PT = \frac{PM.dx}{dy} = \frac{y\,dx}{dy} \text{ (*)}.$$

Le triangle PMT, rectangle en T, donne la *tangente*

$$MT = \sqrt{PM^2 + PT^2} = y\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}.$$

La considération des triangles semblables PMT et

(*) On fait ici abstraction du signe que doit avoir la ligne PT, par rapport à l'abscisse AP, comme on le verra plus loin.

PMR (*Trig.* 161), donne la *sounormale*

$$PR = PM\,\frac{PM}{PT} = \frac{y\,dy}{dx}.$$

Le triangle PMR, rectangle en P, donne la *normale*

$$MR = \sqrt{\overline{PM}^2 + \overline{PR}^2} = y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}.$$

67. Voici maintenant quelques applications de ces formules.

L'équation générale des lignes du second degré étant

$$y^2 = mx + nx^2 \ (\textit{Trig.}\ 157),$$

on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m+2nx}{2y} = \frac{m+2nx}{2\sqrt{mx+nx^2}};$$

et l'on tire de là

$$PT = \frac{y\,dx}{dy} = \frac{2(mx+nx^2)}{m+2nx},$$

$$MT = y\sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}} = \sqrt{mx+nx^2+4\left(\frac{mx+nx^2}{m+2nx}\right)^2},$$

$$PR = \frac{y\,dy}{dx} = \frac{m+2nx}{2},$$

$$MR = y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} = \sqrt{mx+nx^2+\tfrac{1}{4}(m+2nx)^2}.$$

Dans le cas où $n = 0$, la courbe devient une parabole (*Trig.* 160), et alors on a seulement

$$PT = 2x, \qquad MT = \sqrt{mx+4x^2},$$

$$PR = \frac{m}{2}, \qquad MR = \sqrt{mx+\tfrac{1}{4}m^2}.$$

On déduirait de ces valeurs, les résultats et les cons-

tructions indiquées dans l'*Application de l'Algèbre à la Géométrie*, pour les lignes du second degré.

Dans la courbe représentée par l'équation

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0,$$

on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax};$$

on trouvera

$$PT = \frac{y^3 - axy}{ay - x^2} = \frac{2axy - x^3}{ay - x^2},$$

valeur qui se construira facilement, lorsqu'on aura assigné celle de x et déterminé celle de y (*Trig.* 68).

68. Il est souvent plus commode, et surtout plus élégant, de considérer la tangente et la normale par leur équation (*Trig.* 157). Pour obtenir celle de la première, je vais chercher en général les relations qui doivent avoir lieu lorsque deux lignes se touchent. En considérant d'abord ces lignes comme ayant deux points
FIG. 1. M et M', *fig.* 1, communs, il est évident que leurs équations doivent donner les mêmes valeurs de l'ordonnée PM et de la différence $M'Q$, correspondantes à l'abscisse AP et à son accroissement PP'. Si donc l'on entend par x, y, les coordonnées particulières au point M dans la courbe proposée, et qu'on désigne par x', y', celles des points quelconques de la ligne qui la coupe en M et en M', on aura, pour ces deux points,

$$y' = y, \quad \frac{dy'}{dx'}h + \text{etc.} = \frac{dy}{dx}h + \text{etc.} \qquad (60).$$

La seconde équation est divisible par h, et lorsqu'on passe à la limite, en supposant $h = 0$, elle se réduit à

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx};$$

mais dans cette hypothèse, les deux points d'intersection se réunissent en un seul, qui devient un point de contact pour les lignes proposées, puisqu'elles n'ont plus que celui-là de commun. Il suit de là que lorsque deux lignes se touchent, on a, pour le point de contact seulement,

$$y' = y, \quad \frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx}.$$

Lorsqu'il s'agit de la ligne droite dont l'équation est de la forme

$$y' = Ax' + B \text{ (Trig. 87)}, \text{ et donne } \frac{dy'}{dx'} = A,$$

les conditions du contact de cette droite avec la courbe proposée, sont

$$y = Ax + B, \qquad A = \frac{dy}{dx},$$

d'où l'on conclut

$$B = y - x\frac{dy}{dx} \quad \text{et} \quad y' = \frac{dy}{dx}x' + y - x\frac{dy}{dx},$$

ou

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x).$$

D'après cette équation, celle de la normale qui est perpendiculaire à la tangente et qui passe par le point M, sera

$$y' - y = -\frac{dx}{dy}(x' - x) \text{ (Trig. 90)}.$$

En faisant, dans ces équations, $y' = 0$ pour déterminer l'intersection de la droite avec l'axe des x, on en tire

$$x' - x = -\frac{y\,dx}{dy} \quad \text{et} \quad x' - x = \frac{y\,dy}{dx}.$$

La première de ces valeurs, répondant à $AT - AP$, est celle de la soutangente PT prise négativement,

parce que le point T' est en arrière du point P; la seconde valeur, étant celle de $AR - AP$, donne la sounormale PR positivement, parce que le point R est au-delà du point P.

69. Pour le cercle dont l'équation est

$$y^2 + x^2 = a^2,$$

on trouve

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y};$$

l'équation de sa tangente sera par conséquent

$$y' - y = -\frac{x}{y}(x' - x), \quad \text{ou} \quad yy' + xx' = y^2 + x^2,$$

ou enfin

$$yy' + xx' = a^2,$$

puisque

$$y^2 + x^2 = a^2.$$

L'équation de la normale devient

$$y' - y = \frac{y}{x}(x' - x),$$

et se réduit à

$$y' = \frac{y}{x}x',$$

ce qui fait voir que les normales du cercle passent par son centre, qui est ici l'origine des coordonnées (*Trig.* 83), et ce qui doit être en effet, puisque les normales d'un cercle ne sont autre chose que ses rayons.

Passons à la courbe donnée par l'équation

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0;$$

celle de sa tangente sera

$$y' - y = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}(x' - x),$$

ou

$$y^2y' - axy' - y^3 + axy = ayx' - x^2x' - axy + x^3.$$

Si l'on met pour y^3 sa valeur, et qu'on réduise, on obtiendra

$$(y^2 - ax)y' + (x^2 - ay)x' = ax,$$

70. Si l'on se proposait de mener, par un point donné pris hors d'une courbe, et dont α serait l'abscisse et β l'ordonnée, une tangente à cette courbe, il est évident qu'il faudrait substituer α au lieu de x', et β au lieu de y', dans l'équation de la tangente, qui deviendrait alors

$$\beta - y = \frac{dy}{dx}(\alpha - x),$$

et servirait, conjointement avec l'équation de la courbe proposée, à déterminer les coordonnées x et y du point de contact.

Je prends le cercle pour premier exemple; l'équation de sa tangente étant

$$yy' + xx' = a^2 \text{ (n° précéd.)},$$

on aura

$$\beta y + \alpha x = a^2.$$

Cette équation combinée avec celle du cercle, déterminera les coordonnées x et y des points de contact, ou, ce qui revient au même, ces points seront à la rencontre du cercle avec la droite exprimée par l'équation

$$\beta y + \alpha x = a^2 \text{ (Trig. 105)}.$$

Dans la courbe correspondante à l'équation

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0,$$

le point de contact se trouverait en cherchant l'intersection de cette courbe, avec la ligne du second degré résultante de l'équation

$$\beta(y^2 - ax) + \alpha(x^2 - ay) = axy.$$

71. Pour mener une droite qui touche une courbe donnée, et qui soit en même temps parallèle à une

droite donnée de position, ou qui fasse, avec l'axe des abscisses, un angle dont la tangente soit représentée par a, il suffira de poser $\frac{dy}{dx} = a$ (*Trig.* 89); combinant cette équation avec celle de la courbe proposée, on déterminera les valeurs de x et de y, qui conviennent au point de contact demandé.

Dans le cas où la courbe proposée serait la parabole ordinaire, on aurait

$$y^2 = mx, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{m}{2y} = a,$$

ce qui donnerait

$$y = \frac{m}{2a} \quad \text{et} \quad x = \frac{m}{4a^2}.$$

72. Dans ce qui précède, les coordonnées x et y ont été supposées à angle droit; mais il est aisé de voir que si elles faisaient un angle quelconque, le rapport de $M'Q$ à MQ, aurait encore pour limite celui de PM à PT, et l'équation de la tangente ne changerait pas de forme. Les triangles MPT et MPR ne seraient plus rectangles, mais on connaîtrait dans le premier, les côtés MP, PT et l'angle compris MPT, et dans le second le côté MP avec les angles MPR et PMR, complément de TMP.

73. En cherchant les positions que prend la tangente d'une courbe proposée, lorsque le point de contact s'éloigne de plus en plus de l'origine des coordonnées, on peut reconnaître si cette courbe a, comme l'hyperbole, des lignes droites pour asymptotes (*Trig.* 163), et déterminer leur position.

5. On voit en effet que dans une courbe MX, *fig.* 5, qui a une asymptote RS, à mesure que le point M s'éloigne de l'origine, la tangente MT s'approche de

l'asymptote, et les points T et D marchent respectivement vers les points R et E, en sorte que AR et AE sont des limites que les valeurs de AT et de AD ne sauraient franchir, ni même atteindre, mais dont elles peuvent approcher aussi près qu'on voudra. Il suit de là que pour trouver si une courbe a des asymptotes, il faut chercher si les expressions de AT et de AD, relatives à cette courbe, sont susceptibles de limites; et lorsque cela arrivera, ces limites étant construites, donneront les deux points R et E, par lesquels on mènera la droite RS, qui sera l'asymptote demandée.

Les expressions de AT et de AD se tirent de celle de PT; la première, en observant que $AT = AP - PT$; la seconde, par le moyen des triangles semblables ADT et MPT (*) : on les déduit aussi de l'équation de la tangente (68), en faisant successivement $y' = 0$ et $x' = 0$ (*Trig.* 87). On trouvera

$$AT = x - y\frac{dx}{dy}, \qquad AD = y - x\frac{dy}{dx}.$$

Si, l'une des quantités AR ou AE restant finie, l'autre devenait infinie, il est évident que l'asymptote serait parallèle à l'axe sur lequel se trouve cette dernière.

Pour ne manquer aucune des asymptotes que doit avoir la courbe proposée, il faut faire successivement x et y infinis, et substituer dans les expressions de AT et de AD, chacun des résultats différens que donnent l'une et l'autre hypothèse. Lorsque AT et AD seront infinies en même temps, on en conclura que la courbe proposée n'a pas d'asymptote.

Si l'on fait attention que $AD = -AT\frac{dy}{dx}$, on

(*) Il faut remarquer que dans la figure, la ligne AT est négative.

51999 51999

verra que ces deux lignes peuvent être nulles en même temps, excepté le cas où $\frac{dy}{dx}$ serait nul ou infini. Quand elles s'évanouissent, l'asymptote passe par l'origine des coordonnées; mais comme ce n'est encore qu'un point de cette asymptote, il faut, pour en déterminer la direction, chercher la limite de l'expression $\frac{dy}{dx}$, qui représente la tangente de l'angle MTP (62), et l'on obtient la tangente de l'angle SRB.

74. Ce qui précède étant appliqué à l'équation

$$y^2 = mx + nx^2,$$

conduit à

$$AT = x - \frac{2y^2}{m + 2nx} = \frac{-mx}{m + 2nx},$$

$$AD = y - \frac{mx + 2nx^2}{2y} = \frac{mx}{2\sqrt{mx + nx^2}}.$$

Les derniers membres de ces équations pouvant être mis sous les formes

$$\frac{m}{\frac{m}{x} + 2n}, \qquad \frac{m}{2\sqrt{\frac{m}{x} + n}},$$

leurs limites respectives, dans le cas où l'on suppose x infinie, sont

$$-\frac{m}{2n} = AR \quad \text{et} \quad \frac{m}{2\sqrt{n}} = AE.$$

Si n était nulle, les expressions de AT et de AD deviendraient infinies en même temps que x, et la courbe proposée n'aurait point d'asymptotes; elle n'en aura pas non plus, lorsque n sera négative, parce qu'alors son équation n'admettra point pour x une valeur infinie.

Dans la courbe représentée par l'équation

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0,$$

on a

$$AT = \frac{axy}{x^2 - ay}, \qquad AD = \frac{axy}{y^2 - ax};$$

et pour trouver la limite vers laquelle tendent ces expressions, à mesure que y augmente, il faudrait le remplacer par sa limite, et connaître par conséquent sa valeur en x; mais l'on peut suppléer à cette valeur, dans l'exemple présent, par un artifice analytique fort simple. Si l'on fait $y = tx$, l'équation proposée devient divisible par x^2; on en tire $x = \frac{3at}{1 + t^3}$, et il est facile de voir alors que la supposition de $t = -1$, rendra x infinie, et donnera $y = -x$. En changeant y en $-x$ dans les expressions de AT et de AD, puis prenant les limites, on aura

$$AR = -a = AE;$$

et menant par les points R et E, *fig.* 6, construits avec les valeurs précédentes, la droite RE, elle sera l'asymptote des branches AY et AZ.

Des courbes osculatrices.

75. La tangente d'une courbe étant la limite de toutes les droites qui rencontrent cette courbe en deux points, on peut, par analogie, chercher en général parmi toutes les lignes d'une espèce donnée, la limite de celles qui coupent la courbe proposée en un nombre donné de points. On sait, par exemple, qu'il faut trois points pour déterminer un cercle; on peut supposer que ces trois points soient pris sur la courbe proposée, et chercher à quel cercle en particulier l'on arrivera, si les trois

points viennent à coïncider. Ce cercle, qui se nomme le *cercle osculateur*, sera la limite de tous les autres, comme la tangente est celle de toutes les sécantes; mais le caractère que je viens de lui assigner, quoique suffisant pour le déterminer, n'offrant rien qui puisse, à l'œil, le distinguer des cercles simplement tangens, j'y substituerai les considérations suivantes (*).

On a vu, dans les *Élémens de Géométrie*, qu'entre un cercle et sa tangente, il ne pouvait passer aucune autre droite, mais qu'il y passait une infinité de cercles. De même entre une courbe quelconque et sa tangente, on ne peut faire passer aucune autre droite, mais l'on peut y faire passer une infinité de cercles de rayons différens, ayant la même tangente que la courbe, et parmi lesquels il doit s'en trouver un qui, dans les environs du point de contact, s'approche plus de la courbe proposée, que tous les autres.

Pour exprimer ces considérations analytiquement, soient x et y, x' et y', x'' et y'' les coordonnées de trois courbes diverses ayant un point commun, c'est-à-dire, pour lequel on ait

$$x = x' = x'', \qquad y = y' = y''.$$

Si l'on prend d'abord la différence des séries

$$y + \frac{dy}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

$$y' + \frac{dy'}{dx'}\frac{h}{1} + \frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y'}{dx'^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

qui expriment les ordonnées des points correspondans

(*) On peut voir dans le *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*, in-4°, t. I, n° 229, et t. III, n° 229 *a*, page 638, le calcul fondé sur cette réunion d'intersections, qui mérite d'être observée comme un *fait* remarquable de la théorie des limites.

à l'abscisse $x+h$, dans les deux premières courbes, on trouvera en général

$$\left(\frac{dy}{dx}-\frac{dy'}{dx'}\right)\frac{h}{1}+\left(\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{d^2y'}{dx'^2}\right)\frac{h^2}{1.2}$$
$$+\left(\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^3y'}{dx'^3}\right)\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$

pour l'expression de la distance $N'N$, *fig.* 7, de ces courbes dans le sens des ordonnées; et, en remplaçant y' et ses coefficiens différentiels par y'' et ses coefficiens différentiels, on aura l'expression de la distance $N''N$ entre la première courbe et la troisième. Soient δ' et δ'' ces deux distances; leurs expressions seront donc de la forme FIG. 7.

$$\delta'=A'\frac{h}{1}+B'\frac{h^2}{1.2}+C'\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$
$$\delta''=A''\frac{h}{1}+B''\frac{h^2}{1.2}+C''\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Cela posé, dans la comparaison des séries précédentes, on pourra supprimer le facteur h, commun à tous leurs termes; et pour que $\delta'<\delta''$, c'est-à-dire, que la seconde courbe s'approche plus de la première que la troisième, il faudra que

$$A'+B'\frac{h}{2}+C'\frac{h^2}{2.3}+\text{etc.}<A''+B''\frac{h}{2}+C'\frac{h^2}{2.3}+\text{etc.}$$

Cette condition, devant avoir lieu quelque petite que soit h, dépendra des valeurs relatives des premiers termes A' et A'' (62); mais si l'on posait $A''=0$, elle deviendrait

$$B'\frac{h}{2}+C'\frac{h^2}{2.3}+\text{etc.}<A''+B''\frac{h}{2}+C''\frac{h^2}{2.3}+\text{etc.};$$

et le premier membre de cette inégalité, s'évanouissant lorsque $h=0$, ce que ne fait pas le second, serait

nécessairement plus petit que celui-ci, du moins pour une valeur de h très petite, tant que A'' ne serait pas nul; ainsi la seconde courbe s'approcherait toujours plus de la première que la troisième.

Mais si l'on avait en même temps $A'' = 0$, la condition à remplir, dans la situation respective assignée aux trois courbes, serait

$$B'\frac{h}{2} + C'\frac{h^2}{2.3} + \text{etc.} < B''\frac{h}{2} + C''\frac{h^2}{2.3} + \text{etc.};$$

en y supprimant le facteur commun $\frac{h}{2}$, elle deviendrait

$$B' + C'\frac{h}{3} + \text{etc.} < B'' + C''\frac{h}{3} + \text{etc.},$$

et si l'on posait $B' = 0$, elle aurait lieu tant que B' ne serait pas nul.

Cet examen, qu'on peut pousser aussi loin qu'on voudra, fait voir que si l'expression de δ' commence par un terme où l'exposant de h surpasse celui que porte cette lettre dans l'expression de δ'', on aura toujours $\delta' < \delta''$.

Quand la seconde courbe est telle, qu'au point M, on a les n équations

$$y' = y, \quad \frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \ldots \quad \frac{d^{n-1}y'}{dx'^{n-1}} = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},$$

les $n-1$ premiers termes de l'expression de δ' s'évanouissent, et elle commence alors par le terme affecté de h^n; si donc la troisième courbe n'établissait l'égalité entre y'', y et leurs coefficiens différentiels, que jusqu'à l'ordre $n-2$ inclusivement, l'expression de δ'' commencerait au terme affecté de h^{n-1}; on aurait $\delta' < \delta''$,

et par conséquent la seconde courbe s'approcherait plus de la première que la troisième.

76. Supposons maintenant que la seconde courbe soit seulement donnée d'espèce, c'est-à-dire, que les constantes qui entrent dans son équation, soient indéterminées; on pourra, par le moyen de ces constantes, satisfaire à un pareil nombre des conditions indiquées ci-dessus, et la courbe déterminée de cette manière, sera telle, qu'aucune des courbes qui ne remplissent pas autant de ces conditions, ne pourra passer entre elle et la première courbe.

Soit, pour premier exemple, l'équation générale de la ligne droite

$$y' = \alpha x' + \beta, \quad \text{qui donne} \quad \frac{dy'}{dx'} = \alpha;$$

en changeant x' en x, les équations

$$y' = y, \quad \frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx} \quad \text{deviendront} \quad y = \alpha x + \beta, \quad \frac{dy}{dx} = \alpha,$$

desquelles l'on tirera les valeurs de α et de β, et l'on aura

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x),$$

pour l'équation de la tangente, comme dans le n° 68.

Si la courbe MN' est le cercle représenté par l'équation

$$(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 = \gamma^2 \ (Trig.\ 94),$$

en la différentiant deux fois de suite, il en résultera

$$(x' - \alpha)dx' + (y' - \beta)dy' = 0,$$
$$dx'^2 + dy'^2 + (y' - \beta)d^2y' = 0,$$

et il faudra qu'en changeant x' en x, dans ces trois équations, elles donnent

$$y' = y, \quad \frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{d^2y}{dx^2},$$

ou, ce qui revient au même, qu'elles soient satisfaites par les valeurs de x, y, dy, d^2y, relatives au point M dans la première courbe; on aura donc

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \gamma^2,$$
$$(x-\alpha)dx + (y-\beta)\,dy = 0,$$
$$dx^2 + dy^2 + (y-\beta)d^2y = 0:$$

mais comme les quantités dérivées de la courbe proposée sont déterminées, puisqu'elles appartiennent à un point particulier M, il faudra que les quantités α, β et γ reçoivent des valeurs propres à vérifier les équations ci-dessus.

En déterminant, par les deux dernières équations, les valeurs de $y-\beta$ et de $x-\alpha$, pour les substituer dans la première, on trouvera

$$y-\beta = -\frac{dx^2+dy^2}{d^2y},$$
$$x-\alpha = \frac{dy}{dx}\left(\frac{dx^2+dy^2}{d^2y}\right),$$
$$\gamma = \pm\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y}.$$

77. Toutes les courbes qui ont un point commun, et dont les ordonnées ont à ce point le même coefficient différentiel, y ont une tangente commune et se touchent par conséquent; mais elles peuvent se distinguer les unes des autres, comme le cercle qu'on vient de déterminer se distingue de tous ceux qui n'approchent pas aussi près de la courbe proposée. C'est pour cela que les contacts se divisent en ordres, suivant le nombre des coefficiens différentiels consécutifs qui reçoivent la même valeur dans chaque courbe.

Le contact le plus élevé de ceux que puisse avoir en général, avec la courbe proposée, une courbe donnée seulement d'espèce, se nomme *osculation ;* son ordre est marqué par le nombre de constantes moins une, que renferme l'équation de cette courbe. Ainsi, la tangente, qui ne peut avoir en général, qu'un contact simple ou du premier ordre, avec une courbe donnée, est une osculatrice du premier ordre. Le cercle, dont l'équation renferme trois constantes, peut avoir, ou un contact du premier ordre, ou un contact du second; mais ce dernier, étant le plus élevé, prend le nom d'osculation, et distingue le *cercle osculateur* de tous les cercles simplement tangens.

Une particularité assez remarquable du cercle osculateur $D'MN'$, c'est qu'en général, il coupe la courbe proposée en même temps qu'il la touche. Cela se voit par la forme de l'expression de δ^{ν}, dont le premier terme étant affecté de h^3, puissance impaire, change de signe, avec h, et montre par conséquent que sur les abscisses $x-h$ et $x+h$, le cercle osculateur est placé dans deux sens différens, relativement à la courbe proposée et à l'axe des abscisses, c'est-à-dire, au-dessous de la première d'un côté du point de contact, et de l'autre au-dessus; ce qui n'a pas lieu pour la tangente et les cercles simplement tangens, puisque l'expression de δ'' commence par le terme affecté de h^2.

La même considération fait voir que si le contact de deux courbes est d'un ordre pair, il doit y avoir en même temps intersection.

78. Le nombre des cercles simplement tangens est infini pour chaque point d'une courbe quelconque; car si l'on mène par ce point une normale, tous les cercles qui ont leur centre sur cette normale, et qui passent

par le point pris sur la courbe proposée, ont la même tangente que cette courbe, et la touchent par conséquent; mais ce qu'il faut bien remarquer, c'est que les uns la touchent en dedans, les autres en dehors ou l'embrassent, et que le cercle osculateur sépare les premiers des seconds.

En effet, si l'on affecte les coordonnées x'', y'', aux cercles simplement tangens, comme ils ne rempliront que les conditions

$$y'' = y, \quad \frac{dy''}{dx''} = \frac{dy}{dx},$$

on aura

$$\delta'' = B'' \frac{h^2}{1.2} + C'' \frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

expression dont le signe dépend de celui de

$$B'' = \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2y''}{dx''^2},$$

en sorte que le cercle tangent sera au-dessous de la courbe, par rapport à l'axe des x, si $\frac{d^2y''}{dx''^2} < \frac{d^2y}{dx^2}$, et au-dessus dans le cas contraire; mais entre les valeurs de α, β, γ, qui conviennent à l'un ou à l'autre de ces cas, se trouvent celles qui répondent à

$$\frac{d^2y''}{dx''^2} = \frac{d^2y}{dx^2},$$

et qui, d'après ce qu'on a vu (76), donnent le cercle osculateur.

Cette manière de le déterminer, rend pour ainsi dire sensible à l'œil, la relation de sa courbure avec celle de la courbe donnée, puisque la courbure de cette dernière est évidemment moindre que celle des cercles qui la touchent en dedans, et plus grande que celle des cercles qui la touchent en dehors. Aussi prend-on pour mesurer

la courbure de la courbe proposée, dans un point quelconque, celle du cercle osculateur à ce point; et son rayon se nomme en conséquence *rayon de courbure*.

Voici maintenant comment on compare les cercles par rapport à leur courbure.

79. On prend, en général, pour la courbure de l'arc *AEB*, *fig.* 8, d'une courbe quelconque, l'angle *DCB* formé par les deux tangentes menées aux extrémités de cet arc. Dans le cercle, l'angle *DCB* est égal à l'angle *AOB*, formé par les rayons *OA* et *OB* menés aux extrémités de l'arc, et le même pour tous les arcs de même longueur, pris dans le même cercle. C'est ainsi qu'il faut entendre que la courbure du cercle est uniforme. Cela posé, si l'on compare deux arcs de même longueur dans des cercles différens, en nommant a cette longueur, r et r' les rayons des cercles, π le rapport de la circonférence au diamètre, on aura pour le nombre de degrés centésimaux de l'arc dont la longueur est a sur chacun de ces cercles, les expressions

$$\frac{400^{\circ}.a}{2\pi r}, \quad \frac{400^{\circ}.a}{2\pi r'},$$

qui sont dans le rapport de $\frac{1}{r}$ à $\frac{1}{r'}$, ou $:: r' : r$, c'est-à-dire, en raison inverse des rayons des cercles dont l'arc proposé fait partie.

Quant aux différens arcs du même cercle, leur courbure est évidemment en raison de leur longueur; et si l'on prenait pour unité de courbure celle de l'arc de même longueur que le rayon, dans le cercle dont le rayon est 1, la courbure de l'arc a, dans le cercle dont le rayon $= r$, serait mesurée par $\frac{a}{r}$.

80. Les coordonnées α et β du centre du cercle osculateur, étant, ainsi que son rayon γ, des fonctions de x, varient à chaque point de la courbe proposée; l'ensemble de toutes les positions de ce centre forme une courbe FZ, *fig.* 9, dont les coordonnées sont α et β, et qui jouit de plusieurs propriétés remarquables, qu'on déduit aisément des équations

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \gamma^2 \ldots\ldots\ldots (1),$$
$$(x-\alpha)\mathrm{d}x + (y-\beta)\mathrm{d}y = 0 \ldots\ldots\ldots (2),$$
$$\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + (y-\beta)\mathrm{d}^2y = 0 \ldots\ldots\ldots (3),$$

trouvées dans le n° 76.

1°. La relation entre α et β, ou l'équation de la courbe FZ, s'obtient en éliminant x et y entre l'équation de la courbe proposée et les équations (2) et (3), après qu'on a mis dans celles-ci les valeurs de $\mathrm{d}y$ et de d^2y.

2°. La seconde équation, donnant

$$\beta - y = -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}(\alpha - x),$$

est celle de la normale menée du point dont les coordonnées sont α et β (68), c'est-à-dire, du point O de la courbe FZ, au point M de la courbe proposée DX.

3°. En différentiant les deux premières équations non-seulement par rapport à x, y, mais encore par rapport aux quantités α, β et γ, en tant que ces dernières sont fonctions de x, on aura

$$(x-\alpha)\mathrm{d}x + (y-\beta)\mathrm{d}y - (x-\alpha)\mathrm{d}\alpha - (y-\beta)\mathrm{d}\beta = \gamma\mathrm{d}\gamma,$$
$$\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + (y-\beta)\mathrm{d}^2y - \mathrm{d}\alpha\mathrm{d}x - \mathrm{d}\beta\mathrm{d}y = 0.$$

Les équations (2) et (3) réduisent celles-ci à

$$-(x-\alpha)\mathrm{d}\alpha - (y-\beta)\mathrm{d}\beta = \gamma\mathrm{d}\gamma \ldots\ldots (4),$$
$$-\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}x - \mathrm{d}\beta\mathrm{d}y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (5);$$

la dernière donne $\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{dx}{dy}$, expression qui change l'équation $\beta - y = -\frac{dx}{dy}(\alpha - x)$,

en $y - \beta = \frac{d\beta}{d\alpha}(x - \alpha)$,

et qui montre par conséquent que la normale MO, est tangente à la courbe dont les coordonnées sont α et β (9 et 68), c'est-à-dire, à la courbe FZ.

4°. Si l'on met cette dernière valeur de $y - \beta$, dans les équations (1) et (4), et qu'on élimine ensuite $x - \alpha$, on aura

$$d\gamma^2 = d\alpha^2 + d\beta^2, \text{ ou } \frac{d\gamma}{d\alpha} = \sqrt{1 + \frac{d\beta^2}{d\alpha^2}},$$

ce qui donne le coefficient différentiel de γ, par rapport à la variable α; or, cette expression est aussi celle du coefficient différentiel de l'arc de la courbe dont les coordonnées sont α et β (64); et il résulte de cette identité, que le rayon du cercle osculateur varie par les mêmes différences que l'arc de la courbe FZ (23), propriété qui mérite la plus grande attention.

En effet, le rayon MO du cercle osculateur du point M, étant tangent à la courbe FZ, a nécessairement la même direction que celle que prendrait un fil enveloppé autour de la convexité de cette courbe, lorsqu'en le développant, on serait parvenu au point O. On remarquera qu'en poursuivant le développement de O en O', ce fil s'allongerait d'une quantité égale à l'arc OO' de la courbe FZ; et comme, par ce qui précède, la différence des rayons OM et $O'M'$ est aussi égale au même arc OO', il s'ensuit que le bout M' du fil se trouverait encore en M' sur la courbe propo-

sée, qu'il n'aurait pas quittée dans le développement effectué depuis l'un de ces points jusqu'à l'autre : on peut donc regarder la courbe DX comme engendrée par le développement de la courbe FZ.

Ce procédé a une grande analogie avec la description du cercle; c'est la courbe FZ qui fait l'office de centre; et le rayon MO, au lieu d'être constant, varie pour chaque point. La courbe FZ s'appelle la *développée*, la courbe DX, la *développante*, et le rayon du cercle osculateur, rayon de la *développée* (*).

Il est à propos de remarquer aussi que la développée est la *limite* des intersections des normales de la courbe proposée, prises deux à deux consécutivement, puisque le point K, intersection des deux rayons MO et $M'O'$, qui sont perpendiculaires à la courbe DX, en M et M', s'approche d'autant plus de la courbe FZ, que les points M et M' sont plus voisins l'un de l'autre.

On déduirait de cette dernière considération, toute la théorie précédente.

81. Je ne m'étendrai pas beaucoup sur l'application des formules

$$\gamma = \pm \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx d^2 y},$$

$$x - \alpha = \frac{dy(dx^2 + dy^2)}{dx d^2 y},$$

$$y - \beta = -\frac{dx^2 + dy^2}{d^2 y},$$

(*) C'est par cette dernière considération, qu'Huygens a déterminé le cercle osculateur, qu'il a remarqué le premier; et elle peut conduire aussi aux formules du n° 76; mais ce point de vue, séparant la recherche du cercle osculateur de la théorie générale des contacts des courbes, dont elle doit faire partie, est trop borné pour l'état actuel de la science.

parce qu'elle n'a aucune difficulté, lorsqu'on possède bien le mécanisme du Calcul différentiel.

La valeur de γ étant susceptible du double signe $\pm$, on peut demander lequel des deux il faut employer; car il est bien visible qu'en général, à chaque point de la courbe, il n'y a qu'un seul rayon de courbure; et ce rayon, n'étant pas dirigé suivant l'ordonnée ou l'abscisse, excepté dans quelques points particuliers, n'a pas, à proprement parler, de signe par rapport à ces lignes. La détermination de celui dont on l'affecte ordinairement, dépend de la convention qu'on a établie sur le sens de la courbure par rapport à la normale. Si l'on veut que le rayon de courbure soit positif pour les courbes dont la concavité est tournée vers l'axe des abscisses, comme la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ est alors négative (62), il faut affecter l'expression de γ du signe $-$; et dans ce cas, le rayon de courbure deviendra négatif si la concavité de la courbe passe du côté opposé, parce qu'il change de signe avec $\frac{d^2y}{dx^2}$. Pour se conformer à cette convention, on pourra supposer, dans les applications,

$$\gamma = -\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y}.$$

L'équation générale des lignes du second degré

$$y^2 = mx + nx^2,$$

conduisant à

$$dy = \frac{(m+2nx)dx}{2y},\quad dx^2+dy^2 = \frac{[4y^2+(m+2nx)^2]dx^2}{4y^2}$$

$$d^2y = \frac{2ny\,dx^2-(m+2nx)dx\,dy}{2y^2} = \frac{[4ny^2-(m+2nx)^2]dx^2}{4y^3},$$

il en résultera

$$\gamma = -\frac{[4y^2+(m+2nx)^2]^{\frac{3}{2}}}{2[4ny^2-(m+2nx)^2]}.$$

Si l'on substitue la valeur de y^2, dans cette expression, on aura

$$\gamma = \frac{[4(mx+nx^2)+(m+2nx)^2]^{\frac{3}{2}}}{2m^2}.$$

Telle est l'expression générale du rayon de courbure dans les lignes du second degré; on la particularisera en donnant à m et à n les valeurs qui conviennent à chaque espèce de ces lignes (*Trig.* 157).

Ce résultat se réduit à $\frac{1}{2}m$, lorsque $x=0$; la courbure des lignes proposées est donc, à leur sommet, la même que celle du cercle décrit d'un rayon égal au demi-paramètre (*Trig.* 138).

En rapprochant la valeur de γ de celle qu'on a trouvée dans le n° 66 pour la normale, on verra que $\gamma = \frac{\overline{MR}^3}{\frac{1}{4}m^2}$, ou que *le rayon de courbure, dans les lignes du second degré, est égal au cube de la normale divisé par le quarré du demi-paramètre.*

Dans la parabole où $n=0$, on a seulement

$$\gamma = \frac{(m^2+4mx)^{\frac{3}{2}}}{2m^2}.$$

On appliquerait de même les expressions générales de $x-\alpha$ et de $y-\beta$, et mettant pour y sa valeur, on aurait deux équations en x, α et β, desquelles, éliminant x, on déduirait l'équation en α et β, appartenante à la développée. Je n'effectuerai ce calcul que

pour la parabole. On a dans ce cas

$$dy = \frac{m dx}{2y}, \quad d^2y = -\frac{m^2 dx^2}{4y^3},$$

et il vient

$$y - \beta = \frac{4y^3}{m^2}\left(\frac{4y^2 + m^2}{4y^2}\right) = \frac{4y^3}{m^2} + y,$$

$$x - \alpha = -\frac{m}{2y}\frac{4y^3}{m^2}\left(\frac{4y^2 + m^2}{4y^2}\right) = -\frac{4y^2 + m^2}{2m};$$

on conclut de là

$$-\beta = \frac{4y^3}{m^2}, \quad x - \alpha = -\frac{2y^2}{m} - \frac{1}{2}m;$$

mettant, dans chacune de ces équations, pour y sa valeur $m^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, il viendra

$$-\beta = \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}}, \quad x - \alpha = -2x - \frac{1}{2}m;$$

prenant ensuite la valeur de x dans le second résultat, pour la substituer dans le premier, on obtiendra

$$x = \frac{1}{3}\left(\alpha - \frac{1}{2}m\right), \quad \beta^2 = \frac{16}{27m}\left(\alpha - \frac{1}{2}m\right)^3;$$

la dernière de ces équations appartient à la développée de la parabole.

Si l'on y change $\alpha - \frac{1}{2}m$ en α', ou qu'on porte l'origine des abscisses en D, *fig.* 10, on aura cette équation très simple, $\beta^2 = \frac{16\alpha'^3}{27m}$, qui montre que la courbe DF est une des paraboles du troisième degré (*), com-

FIG. 10.

(*) L'équation $y^2 = mx$ étant généralisée ainsi : $y^q = mx^p$, représente une famille de courbes dont la parabole ordinaire n'est qu'un cas particulier ; on les nomme aussi *paraboles*, mais on les distingue par l'exposant de leur degré.

posée de deux branches DF et Df, dont la première engendre, par son développement, la branche AX de la parabole ordinaire XAx, et la seconde produit la branche Ax.

82. Il faut observer que, pour la description de la parabole XAx, par le développement de la courbe FDf, le fil enveloppé autour de l'une ou de l'autre des branches DF et Df, doit avoir au point D, dans le prolongement de la tangente BD, une longueur AD égale au rayon de courbure au point A, c'est-à-dire, à la moitié du paramètre de la parabole; tout autre point, tel que I, pris sur ce fil, produirait une courbe différente. Si le point I tombait sur le point D, le rayon de courbure de la courbe décrite alors, serait nul à son origine, et par conséquent elle aurait à ce point une courbure infinie (78).

On voit aussi que, puisque la longueur de l'arc DF est égale à la différence entre le rayon de courbure correspondant MF et le rayon de courbure AD qui appartient à l'origine, la courbe FDf est *rectifiable*, c'est-à-dire, qu'on peut assigner des lignes droites qui soient de la même longueur que ses arcs.

Cette remarque est générale, car puisqu'on peut toujours parvenir à l'expression du rayon de courbure des courbes algébriques, les développées de ces courbes sont toutes rectifiables.

Recherche des points singuliers des courbes, et examen des valeurs particulières que les coefficiens différentiels prennent dans certains cas.

83. On appelle *points singuliers* d'une courbe, ceux dans lesquels elle offre quelque circonstance remar-

quable. Une grande partie de ces circonstances se rencontrant dans la *famille* de courbes représentée par l'équation très simple

$$y = b + c(x-a)^m,$$

nous allons discuter particulièrement cette équation, en rapprochant toujours les considérations géométriques des considérations analytiques, pour éclaircir les unes par les autres.

La première question qui se présente, est la détermination de la marche des valeurs des ordonnées y, pour savoir si elles croissent ou décroissent indéfiniment, ou bien si leur accroissement s'arrête lorsqu'elles ont atteint un certain degré de grandeur, et se change en décroissement; ou bien enfin, si, après avoir atteint un certain degré de petitesse, leur décroissement se change en accroissement. La valeur qui a lieu dans le passage de l'accroissement au décroissement, étant plus grande que celles qui la précèdent et qui la suivent immédiatement, s'appelle un *maximum*; le *minimum* est celle qui répond au point où le décroissement se change en accroissement; celle-ci est par conséquent plus petite que les valeurs qui la précèdent et qui la suivent immédiatement: je dis immédiatement, parce qu'il y a des fonctions pour lesquelles ces alternatives ont lieu plusieurs fois.

On a déjà vu, dans le n° 62, que les coordonnées positives d'une courbe sont croissantes tant que $\frac{dy}{dx}$ a une valeur positive, et qu'elles sont décroissantes dans le cas contraire. Il suit donc de là qu'au *maximum* ainsi qu'au *minimum*, le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ change

de signe : il va du positif au négatif dans le premier cas, et du négatif au positif dans le second.

L'équation prise pour exemple donne en général

$$\frac{dy}{dx} = mc\,(x-a)^{m-1},$$

quantité dont le signe change avec celui de x, ou se conserve le même, suivant la nature de l'exposant m.

1°. Si cet exposant est un nombre pair, $m-1$ sera un nombre impair, et $(x-a)^{m-1}$ sera négatif quand $x<a$, positif quand $x>a$; ainsi il y aura *minimum* lorsque $x=a$, ce qu'on peut vérifier immédiatement sur la fonction y. En y faisant $x=a-h$ et $x=a+h$, on obtiendra, dans l'un et dans l'autre cas, $y=b+ch^m$, valeur $>b$ qui répond à $x=a$.

Cette dernière valeur, donnant $\frac{dy}{dx}=0$ lorsque l'exposant $m-1$ est positif, montre que la tangente est parallèle à la ligne des abscisses, ce que représente la
FIG. 11. figure 11, au point M dont l'abscisse $AP=a$, et l'ordonnée $PM=b$.

Si la quantité c est négative, ce qui donne..... $y=b-c(x-a)^m$, tout restant d'ailleurs le même, le
FIG. 12. point M, *fig.* 12, est un *maximum*, et la tangente demeure toujours parallèle à l'axe des abscisses.

2°. Il n'y aurait ni *minimum* dans le premier cas, ni *maximum* dans le second, si l'exposant m était impair. Alors $m-1$ étant pair, $(x-a)^{m-1}$ garderait toujours le signe $+$, quel que fût celui de $x-a$; et en effet, si l'on pose successivement $x=a-h$, $x=a+h$, on trouve, c étant positif,

$$y=b-ch^m, \qquad y=b+ch^m,$$

valeurs, l'une $<b$, et l'autre $>b$, qui répond à $x=a$;

cependant on a encore $\frac{dy}{dx} = 0$: ce caractère n'indique donc pas nécessairement un *maximum* ou un *minimum*.

Au point M, *fig.* 13, où $x = a$, la tangente est bien encore parallèle à l'axe des abscisses, mais la courbe offre de plus une autre circonstance : sa concavité change de sens, ce qu'on voit par le changement du signe du coefficient différentiel du second ordre (62); car on a FIG. 13.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)\,c\,(x-a)^{m-2};$$

et $m-2$ étant aussi un nombre impair, $(x-a)^{m-2}$ passe du négatif au positif, quand on va de $x<a$ à $x>a$. La figure de la courbe en M s'appelle alors *inflexion*; la tangente MT y coupe la courbe en même temps qu'elle la touche.

3°. Si m était une fraction de numérateur pair et de dénominateur impair, qu'on eût, par exemple, $m = \frac{2}{3}$, il s'ensuivrait

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{2}{3}c\,(x-a)^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2c}{3(x-a)^{\frac{1}{3}}},$$

quantité qui change encore de signe avec $x-a$: et il y a en effet *minimum;* car soit qu'on change x en $a-h$ ou en $a+h$, on trouve toujours $y = b + ch^{\frac{2}{3}}$, valeur $> b$; mais alors la valeur $x = a$, au lieu de faire disparaître $\frac{dy}{dx}$, le rend infini. Cela tient à ce que, si une quantité entière ne peut changer de signe qu'en passant par zéro, une quantité fractionnaire, lorsqu'elle change de signe par son dénominateur, doit dans l'intervalle devenir infinie. L'expression $\frac{\alpha}{x}$, par exemple, donne successivement

$$\frac{a}{\beta}, \frac{a}{o}, -\frac{a}{\beta},$$

lorsqu'on y fait $x = \beta$, $x = o$, $x = -\beta$.

FIG. 14. Considéré sur la figure 14, ce *minimum* présente une forme différente de celui de la figure 11 ; car $\frac{dy}{dx}$ devenant infini, la tangente MT est perpendiculaire à l'axe des abscisses. On voit d'ailleurs par l'expression

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}c(x-a)^{\frac{2}{3}-2} = -\frac{2c}{9(x-a)^{\frac{4}{3}}},$$

que ce coefficient différentiel ayant une valeur négative quelle que soit, la courbe tourne toujours sa concavité vers l'axe des abscisses, et prend par conséquent la forme indiquée dans la figure.

Le point M, où la courbe s'arrête brusquement à la réunion des parties DM et EM, se nomme *rebroussement*, et se distingue assez du point M de la figure 11 ; mais cependant il doit être compris dans l'espèce du *minimum ;* car si l'on dressait une table des valeurs numériques des ordonnées de la courbe DE, on ne verrait autre chose dans cette table, pour $x = a$, qu'un nombre plus petit que le précédent et le suivant, ce qui est bien un véritable *minimum.*

Il y a un *maximum* analogue ; l'équation

$$y = b - c(x-a)^{\frac{2}{3}},$$

FIG. 15. en fournit un exemple, *fig.* 15.

Ainsi, pour donner une règle qui fasse connaître, sans exception, tous les points où les ordonnées d'une courbe de croissantes deviennent décroissantes, ou *vice versâ*, il faut prescrire d'*égaler à zéro ou à l'infini l'expression*

de $\frac{dy}{dx}$: *il y aura* maximum *si la valeur de ce coefficient passe alors du positif au négatif*, minimum *dans le cas contraire*. Il n'y aurait ni *maximum* ni *minimum* s'il n'y avait pas de changement de signe, ce qui arrivera toutes les fois que le facteur qui s'évanouira, soit au numérateur, soit au dénominateur, aura pour exposant un nombre pair ou une fraction de numérateur pair.

84. Il faut bien remarquer qu'aux points d'inflexion ou de rebroussement, la tangente peut se trouver dans une situation quelconque, relativement à la ligne des abscisses; car, pour rendre cette situation telle qu'on voudra, il suffit de changer la direction des axes des coordonnées, ce qui ne change pas la nature et la forme de la courbe; mais on découvrira toujours ces points en cherchant ceux où le coefficient différentiel du second ordre change de signe, ce qui ne peut arriver à moins qu'il ne devienne nul ou infini. On déterminera d'abord les valeurs qui le rendent tel; mais on ne connaîtra l'espèce du point que par la discussion même de la courbe, dans les environs.

Ainsi, pendant que l'équation

$$y = b + c(x-a)^{\frac{2}{3}}$$

donne, pour la valeur $x=a$, qui rend $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ infinis, le rebroussement M de la figure 14, l'équation

$$y = b + c(x-a)^{\frac{3}{5}},$$

où l'exposant de $x-a$ est une fraction de numérateur et de dénominateur impairs, donne dans la même circonstance une inflexion, parce que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}c(x-a)^{\frac{3}{5}-2} = -\frac{6c}{25(x-a)^{\frac{7}{5}}}$$

passe du positif au négatif quand on va de $x<a$ à $x>a$.

L'ordonnée y conservant dans l'un et l'autre cas une valeur réelle, fait voir que la courbe s'étend de chaque côté du point où $x=a$, ce qui n'aurait pas lieu pour l'équation

$$y = b + c(x-a)^{\frac{3}{4}},$$

à cause que $(x-a)^{\frac{3}{4}}$ devient imaginaire quand $x<a$; et il en sera de même dans tous les cas où l'exposant de $x-a$ sera une fraction de dénominateur pair; mais il faut faire attention qu'alors $(x-a)^{\frac{3}{4}}$, étant un radical de degré pair, est susceptible du signe $\pm$; ce qui montre que le point M, *fig.* 16, est la réunion de deux branches DM et EM.

FIG. 16.

Dans le rebroussement indiqué, *fig.* 14, les deux branches se touchent par leur convexité; mais il arrive quelquefois que l'une embrasse l'autre : l'équation

FIG. 14.

$$(y-x^2)^2 = x^5$$

en offre un exemple. Si on la résout par rapport à y, on trouve

$$y = x^2 \pm x^{\frac{5}{2}},$$

et l'on aperçoit aisément que les deux branches de courbe fournies par les valeurs de y se réunissent au point A, *fig.* 17, correspondant à $x=0$, et qu'elles ne passent point dans la partie des abscisses négatives, puisqu'alors le terme $x^{\frac{5}{2}}$ devient imaginaire; mais les expressions

FIG. 17.

$$\frac{dy}{dx} = 2x \pm \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2 \pm \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

font voir qu'en A, les deux branches ont pour tangente commune l'axe des x, et qu'elles tournent toutes deux leur convexité vers cet axe, puisqu'en faisant $x = 0$, le coefficient différentiel du premier ordre est nul, et celui du second est positif. Ce point est appelé *rebroussement de la seconde espèce*, pour le distinguer des autres.

Il est à remarquer que le coefficient du troisième ordre

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \pm\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},$$

devient alors *infini*.

Il y a aussi des courbes où les branches qui se touchent, s'étendent de chaque côté du point de contact, soit en opposant leurs convexités, *fig.* 18, soit en s'embrassant, *fig.* 19 (*). FIG. 18. FIG. 19.

85. Quelquefois les branches des courbes, au lieu de se réunir en se touchant, se coupent, et ont chacune leur tangente particulière : en voici un exemple.

Lorsqu'on fait $x = a$, dans l'expression

$$y = b \pm (x-a)\sqrt{x-c},$$

ses deux valeurs deviennent égales : ce point est donc la réunion des deux branches de la courbe à laquelle elles appartiennent; mais quoiqu'il n'y ait plus qu'une seule ordonnée y, l'expression de

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{x-c} \pm \frac{x-a}{2\sqrt{x-c}},$$

en se réduisant à $\pm\sqrt{a-c}$, reste encore double; la valeur positive répond à la branche supérieure, et la

(*) *Voyez* le *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*, t. III, page 633, n° 202.

valeur négative à la branche inférieure; l'une et l'autre seront réelles si $a > c$, et produiront la figure 20.

FIG. 20.

Les points où plusieurs branches se réunissent et se rencontrent se nomment *points multiples;* celui que nous venons d'indiquer est un point double, puisqu'il y passe deux branches.

Si l'on généralise l'expression précédente de y, dans la forme

$$y = b + (x-a)\sqrt[m]{x-c},$$

le point correspondant à $x = a$ ne sera double que pour les valeurs paires de l'exposant m, parce qu'alors seulement le radical sera susceptible du double signe $\pm$. Cette remarque, due à M. Poisson, concourt bien avec ce qu'on a vu dans les articles précédens, pour montrer qu'il n'y a que la discussion ou l'examen de la courbe, aux environs du point singulier, qui en puisse faire connaître l'espèce.

Il faut encore remarquer que si l'on faisait passer le facteur $x-a$ sous le radical, dans la première expression de y, on aurait

$$y = b + \sqrt{(x-a)^2(x-c)},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(x-a)(x-c)+(x-a)^2}{2\sqrt{(x-a)^2(x-c)}},$$

et que la supposition de $x = a$ donnerait $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, à cause du facteur $x-a$ qui, maintenant, est commun aux deux termes de la fraction. En le supprimant, on retrouve

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(x-c)+x-a}{2\sqrt{x-c}} = \sqrt{x-c} + \frac{x-a}{2\sqrt{x-c}}$$

86. Les courbes sont accompagnées quelquefois de points isolés qui ont le caractère des points multiples; mais on les en distingue, parce que les coefficiens différentiels y devenant imaginaires, soit dès le premier ordre, soit plus tard, montrent qu'il n'y a pas de points consécutifs (60).

Soit l'équation

$$ay^2 - x^3 + bx^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$y = \sqrt{\frac{x^2(x-b)}{a}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(3x-2b)}{2\sqrt{ax^2(x-b)}}.$$

Ici le coefficient différentiel du premier ordre devient $\frac{0}{0}$ lorsque $x = 0$; mais on peut en avoir la vraie valeur en supprimant le facteur x, commun aux deux termes de la fraction, et l'on obtient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x-2b}{2\sqrt{a(x-b)}};$$

faisant alors $x = 0$, il en résulte

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2b}{2\sqrt{-ab}},$$

expression imaginaire.

Dans la même hypothèse, l'équation proposée donne $y = 0$; mais cette ordonnée, qui est imaginaire lorsque x est négatif, redevient encore telle jusqu'à ce que $x = b$; ainsi le point A, *fig.* 21, est absolument détaché de la courbe, quoique compris dans son équation. FIG. 21.

Les points de cette espèce se nomment *points conjugués*; ils résultent de ce qu'une portion finie de la courbe proposée s'évanouit par la détermination parti-

culière de quelque constante de son équation. La courbe correspondante à l'équation

$$ay^2 - x^3 + (b-c)x^2 + bcx = 0,$$

qui donne

$$y = \pm\sqrt{\frac{x(x-b)(x+c)}{a}},$$

offre un exemple de ces changemens. Elle a d'abord le cours représenté dans la figure 22; la supposition de $c=0$ réduit la partie AF au seul point A, *fig.* 21, comme on l'a vu ci-dessus : elle prend la figure 23 lorsque $b=0$, sans que c s'évanouisse, et la figure 24, si l'on fait en même temps $b=0$, $c=0$.

FIG. 22. FIG. 21. FIG. 23. FIG. 24.

La fonction

$$y = (x-a)^m(x-b)^{\frac{2n+1}{2}},$$

où m et n désignent des nombres entiers positifs, et où l'on suppose $a<b$, donne, lorsque $x=a$, $m-1$ coefficiens différentiels nuls; ce n'est qu'à l'ordre m que l'imaginaire paraît.

Les courbes ont aussi quelquefois des points singuliers qui ne sont pas visibles : ce sont ceux qui résultent d'un nombre pair d'inflexions qui se réunissent en une seule (*).

87. Toutes ces espèces de points se forment en général de la réunion de plusieurs branches, produite par l'égalité à laquelle parviennent diverses valeurs de y, ainsi que cela a lieu dans l'équation $y=b+c(x-a)^m$, quand l'exposant m est un nombre fractionnaire; mais

(*) *Voyez* pour ces points et pour ceux de *serpentement* dont ils dérivent, le *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*, t. III, page 632, n° 190.

cette circonstance amène des coefficiens différentiels infinis, puisque dans l'expression

$$\frac{d^n y}{dx^n} = m(m-1)\ldots(m-n+1)c(x-a)^{m-n},$$

l'exposant $m-n$ devient négatif dès que $n>m$, et qu'à partir de ce terme, la supposition de $x=a$, rend infinis tous les coefficiens différentiels.

La même chose a lieu quand la relation entre y et x est donnée par une équation où les variables sont mêlées. En effet, soit $u=0$ une équation quelconque entre x et y; on aura généralement

$$\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy=0, \text{ d'où } \frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}}.$$

Mais quand une valeur particulière $x=a$, rend égales plusieurs des valeurs de y, la fonction u, qui ne contient plus alors que les quantités y et a, prenant la forme $U(y-b)^m$, conduit à

$$\frac{du}{dy}=\frac{dU}{dy}(y-b)^m+mU(y-b)^{m-1},$$

valeur qui, devenant nulle lorsque $y=b$, rend infinie celle de $\frac{dy}{dx}$ si $\frac{du}{dx}$ ne s'évanouit pas, et donne $\frac{0}{0}$ s'il s'évanouit, ce qui arrive quand il a pour facteur $x-a$ ou $y-b$.

Les équations

$$(y-b)^2-(x-a)=0, \quad (y-b)^3-(x-a)^2=0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2(y-b)}, \quad \frac{dy}{dx}=\frac{2(x-a)}{3(y-b)^2},$$

fournissent des exemples de ces cas, lorsqu'on y fait

$x = a$, d'où il résulte $y = b$; mais en mettant pour y sa valeur dans le second cas, et supprimant les facteurs communs aux deux termes de la fraction, on trouve $\frac{dy}{dx}$ infini, quand $x = a$.

88. Il est évident que lorsque les coefficiens différentiels deviennent infinis, la série de Taylor, formée par ces coefficiens, ne peut plus être employée; mais il n'y a pas ici plus de paradoxe que dans toutes les autres circonstances où il se manifeste des exceptions dans les formules. Lorsqu'on remonte à l'origine de ces formules, on reconnaît que le caractère qui annonce l'exception montre en même temps pourquoi elle a lieu.

En effet, la série de Taylor, exprimant le second état d'une fonction u dont la variable x a reçu l'accroissement h (23), ne doit en général renfermer que des puissances entières de h (20), tant qu'on y laisse x indéterminée; mais il n'en est pas ainsi pour toutes les valeurs particulières de cette variable. Par exemple, lorsque $x = a + h$, la fonction

$$u = b + c(x - a)^{\frac{p}{q}},$$

devient

$$u' = b + c(a + h - a)^{\frac{p}{q}} = b + ch^{\frac{p}{q}},$$

et pareille chose aura lieu toutes les fois qu'il disparaîtra une quantité soumise à un radical; car si la substitution de $x + h$, au lieu de x, change en général $\sqrt[m]{P}$ en

$$\sqrt[m]{P + ph + qh^2 + \text{etc.}},$$

et qu'une valeur particulière de x rende $P = 0$, l'expression ci-dessus deviendra

$$\sqrt[m]{ph+qh^2+\text{etc.}} = h^{\frac{1}{m}}(p+qh+\text{etc.})^{\frac{1}{m}},$$

dont le développement ne pourra manquer de contenir des puissances fractionnaires de l'accroissement h.

Ce changement de forme est la suite nécessaire de la réduction momentanée que la disparition du radical apporte dans le nombre des valeurs de la fonction proposée. Dans l'état général de la fonction, chaque valeur a son accroissement particulier qui la perpétue : ainsi pour

$$u = b \pm \sqrt{x-a},$$

le théorème de Taylor donne les deux séries

$$u' - u = \pm \frac{1}{2}(x-a)^{-\frac{1}{2}}h \mp \frac{1}{8}(x-a)^{-\frac{3}{2}}h^2 \pm \text{etc.};$$

le signe supérieur répond à l'une des valeurs de u, et l'inférieur à l'autre. De même, quand la fonction dépend d'une équation où les variables sont mêlées, l'expression des coefficiens différentiels, contenant outre la variable indépendante, la fonction elle-même, reçoit de celle-ci autant de valeurs qu'elle en comporte (51), et le nombre des accroissemens fournis par la série de Taylor, demeure égal à celui des valeurs de la fonction.

Mais dans les cas particuliers où plusieurs de ces valeurs se réduisent à une seule, il faut qu'à cette valeur unique répondent plusieurs accroissemens divers, pour que la fonction puisse recouvrer toutes celles qu'elle doit avoir en général. Or, c'est ce qui résulte des puissances fractionnaires de h, parce qu'elles sont susceptibles d'un nombre de déterminations marqué par le degré du radical qui les affecte. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, lorsque $x = a$, on a

$$u = b, \quad u' - u = \pm h^{\frac{1}{2}};$$

les deux différences $+h^{\frac{1}{2}}$, $-h^{\frac{1}{2}}$, appliquées à la valeur unique $u=b$, reproduisent les deux valeurs que la fonction u comporte en général.

89. On voit bien ici que le coefficient différentiel de la fonction u, étant exprimé par

$$\frac{u'-u}{h}=\pm\frac{h^{\frac{1}{2}}}{h}=\pm\frac{1}{h^{\frac{1}{2}}},$$

conserve h au dénominateur, et devient infini quand $h=0$.

L'infini ne se montre pas toujours ainsi au premier coefficient différentiel; mais on le trouve, à partir d'un ordre plus ou moins élevé, dès que le développement de $u'-u$ doit renfermer des puissances fractionnaires de h.

Soit en général

$$u'=u+Ph^{\alpha}+Qh^{\beta}\ldots+Th^{\varepsilon}+\text{etc.};$$

u' étant fonction du binome $x+h$, on aura..... $\frac{du'}{dh}=\frac{du'}{dx}$ (19), équation dont chaque membre est aussi une fonction de $x+h$. Si on les différentie successivement par rapport à h et par rapport à x, il viendra

$$\frac{d^2u'}{dh^2}=\frac{d^2u'}{dxdh},\quad \frac{d^2u'}{dxdh}=\frac{d^2u'}{dx^2},\quad \text{d'où}\quad \frac{d^2u'}{dh^2}=\frac{d^2u'}{dx^2},$$

et ainsi des autres, ce qui fait voir que la fonction u' a, par rapport à h, les mêmes coefficiens différentiels que par rapport à x: on passe ensuite à ceux de u, en faisant $h=0$.

Cela posé, un terme quelconque Th^{ε}, en produit dans l'expression de $\frac{d^nu'}{dh^n}$, un de la forme

$$\epsilon(\epsilon-1)(\epsilon-2)\ldots(\epsilon-n+1)Th^{\epsilon-n}.$$

Tant que le nombre n sera au-dessous de ϵ, l'exposant $\epsilon-n$ étant positif, la supposition de $h=0$ fera évanouir ce terme; et si le nombre $\epsilon=n$, il viendra

$$\frac{d^n u'}{dh^n}=\epsilon(\epsilon-1)\ldots 1T;$$

mais si le nombre ϵ est fractionnaire, l'exposant $\epsilon-n$ passera du positif au négatif sans s'évanouir. Dans ce dernier cas, qui a lieu dès que n surpasse ϵ, le terme devient infini lorsqu'on y fait $h=0$, et par conséquent aussi la valeur de $\frac{d^n u}{dx^n}$ dont il fait partie.

Il est visible que les termes à exposant fractionnaire peuvent être précédés par des termes où l'exposant est entier, ce dont la fonction très simple

$$u=bx^m+c\,(x-a)^{\frac{p}{q}}$$

offre un exemple quand $\frac{p}{q}>m$, et qu'on y fait $x=a$; ses coefficiens différentiels demeurent finis jusqu'à l'ordre m inclusivement.

90. Il faut bien observer que dans ce qui précède, c'est la quantité comprise sous les radicaux qui s'anéantit; car les radicaux pourraient aussi disparaître, s'ils étaient multipliés par un facteur que la valeur particulière de x rendit nul; mais ce cas ne fait point exception à la série de Taylor, parce que les radicaux qui ont disparu dans la valeur de la fonction, reparaissent dans ses coefficiens différentiels.

Soit, par exemple,

$$u=b\pm(x-a)^m\sqrt{x-c};$$

la supposition de $x=a$, qui rend égales les deux valeurs

de u, ne fait disparaître les coefficiens différentiels que jusqu'à l'ordre m exclusivement, puisqu'en opérant ici comme dans le n° 57, on trouve que tous les coefficiens différentiels des ordres inférieurs contiennent le facteur $x-a$ à chacun de leurs termes, mais que

$$\frac{d^m u}{dx^m} = \pm m(m-1)\ldots 1.\sqrt{x-c} + \text{etc.}$$

Ce coefficient différentiel et ceux qui le suivent, ayant chacun deux valeurs, forment deux séries qui reproduisent les valeurs de la fonction proposée.

91. Les considérations géométriques confirment les remarques précédentes; on voit que la courbe de la figure 25, qui n'a qu'une seule ordonnée au point E correspondant à l'abscisse AC, ne peut en avoir deux sur l'abscisse consécutive Ac, que parce que l'ordonnée CE reçoit deux changemens distincts qe et qe'; mais les ordonnées ce' et ce n'éprouveront plus chacune qu'un seul changement quand on passera à une abscisse différente de Ac. FIG. 25.

La même chose arrive au point multiple G où deux branches de la courbe se coupent; l'ordonnée particulière FG éprouve aussi pour un seul accroissement d'abscisse Ff, deux changemens rg et rg'.

92. Non-seulement la série qui exprime le changement d'une fonction, doit, dans certains cas particuliers, contenir des exposans fractionnaires, mais il peut s'en trouver aussi de négatifs.

Si l'on avait, par exemple,

$$u = \frac{P}{(x-a)^m},$$

P ne renfermant pas le facteur $x-a$, le changement de x

en $a+h$ donnerait

$$u' = \frac{P + ph + qh^2 + \text{etc.}}{h^m},$$

expression qui contient des puissances négatives de h. C'est ce qui arrive aussi à la fonction lx, lorsque $x = 0$; et en effet, une fonction qui devient infinie lorsque $x = a$, ne peut rentrer dans les quantités finies, quand $x = a + h$, que par un changement infini.

93. Les divers cas singuliers que nous venons d'examiner, ne tenant qu'à des valeurs particulières de la variable indépendante, ne sauraient infirmer les conclusions tirées de l'état général de la fonction; et l'on peut les éviter dans la discussion des courbes, en considérant ce qui se passe avant et après le point dont on veut connaître la nature; en sorte que la recherche des points singuliers se réduit à cette règle aussi générale que sûre, et qui n'exige que l'emploi du Calcul différentiel : *on obtiendra généralement l'indication de l'abscisse à laquelle répond un point singulier, en cherchant dans quel cas les coefficiens différentiels, à partir d'un ordre quelconque, deviennent nuls, ou infinis, ou* $\frac{0}{0}$: *on assignera l'espèce du point,* 1°. *en examinant combien il passe de branches de la courbe à ce point, et si elles s'étendent ou non en-deçà et au-delà;* 2°. *en déterminant la position de leur tangente;* 3°. *le sens dans lequel elles tournent leur concavité* (*).

(*) En quittant ce sujet, je ferai observer que la marche suivie dans ce qui précède, pour déterminer les points singuliers des courbes, était déjà tracée dans le premier volume du *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*, 1re édition, et que la règle ci-dessus se trouve dans la première édition de cet abrégé.

Recherche des vraies valeurs des expressions qui deviennent $\frac{0}{0}$.

94. On a vu dans ce qui précède, que les coefficiens différentiels se présentaient quelquefois sous la forme $\frac{0}{0}$ qui paraît indéterminée; cependant ils ont toujours une valeur déterminée qu'il peut être utile de connaître, et à laquelle on parvient par les principes que je vais exposer.

Supposons d'abord ces coefficiens donnés immédiatement par la variable indépendante. Lorsqu'ils sont sous une forme fractionnaire, si leur numérateur et leur dénominateur ont un facteur commun, la valeur qui le fera évanouir donnera $\frac{0}{0}$: cependant il est visible que toute expression de la forme

$$\frac{P(x-a)^m}{Q(x-a)^n},$$

qui devient $\frac{0}{0}$ quand $x=a$, a néanmoins une vraie valeur qui est nulle, finie ou infinie, selon que $m>n$, $m=n$, $m<n$, puisqu'en effaçant les facteurs communs à ses deux termes, on obtient

$$\frac{P(x-a)^{m-n}}{Q}, \quad \text{ou} \quad \frac{P}{Q}, \quad \text{ou} \quad \frac{P}{Q(x-a)^{n-m}}.$$

Il serait bien facile d'arriver à ces résultats, si le facteur $x-a$ était en évidence comme dans l'exemple du n° 85; mais on peut toujours l'y mettre par la considération du changement des fonctions, ainsi qu'il suit.

Soit $\frac{X}{X'}$ une fraction dont le numérateur et le dénominateur s'évanouissent tous deux quand $x=a$; en substituant $a+h$, au lieu de x, les fonctions X et X' se développeront en séries de la forme

$$Ah^{\alpha}+Bh^{\beta}+\text{etc.}, \qquad A'h^{\alpha'}+B'h^{\beta'}+\text{etc.},$$

et *ascendantes*, c'est-à-dire, dans lesquelles les exposans α, β, etc., iront en croissant et seront positifs, puisque ces séries doivent devenir nulles dans l'hypothèse de $h=0$, qui répond à celle de $x=a$: au lieu de la fraction proposée, on aura donc

$$\frac{Ah^{\alpha}+Bh^{\beta}+\text{etc.}}{A'h^{\alpha'}+B'h^{\beta'}+\text{etc.}},$$

expression dont les deux termes ont un facteur commun, en h, et qui peut présenter les trois cas $\alpha>\alpha'$, $\alpha=\alpha'$ et $\alpha<\alpha'$.

Dans les deux premiers, elle se réduit à

$$\frac{Ah^{\alpha-\alpha'}+Bh^{\beta-\alpha'}+\text{etc.}}{A'+B'h^{\beta'-\alpha'}+\text{etc.}};$$

et si l'on y fait $h=0$, pour revenir à la valeur que prend $\frac{X}{X'}$, quand $x=a$, le résultat est nul toutes les fois que α surpasse α', et est égal à $\frac{A}{A'}$, lorsque $\alpha=\alpha'$. Dans le troisième cas, au contraire, où $\alpha<\alpha'$, on a

$$\frac{A+Bh^{\beta-\alpha}+\text{etc.}}{A'h^{\alpha'-\alpha}+B'h^{\beta'-\alpha}+\text{etc.}},$$

ce qui devient infini par la supposition de $h=0$.

Dans tous les cas, la vraie valeur ne dépend que du premier terme de chaque série.

Ainsi, pour trouver la vraie valeur des fonctions qui se présentent sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, *cher-*

chez le premier terme de chacune des séries ascendantes qui expriment le développement du numérateur et du dénominateur, lorsque $x=a+h$; *réduisez à sa plus simple expression la nouvelle fraction formée de ces premiers termes; et faites ensuite* $h=0$: *le résultat que vous obtiendrez sera la vraie valeur que prend la fraction proposée lorsque* $x=a$.

95. Quand le second état des fonctions X et X', correspondant à $x=a+h$, peut se développer par le théorème de Taylor, on obtient

$$\frac{X+\frac{dX}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2X}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3X}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}}{X'+\frac{dX'}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2X'}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3X'}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}};$$

et si la valeur $x=a$ fait disparaître X et ses coefficiens différentiels jusqu'à l'ordre m, X' et ses coefficiens différentiels jusqu'à l'ordre n, la fraction proposée se réduit à

$$\frac{\frac{d^mX}{dx^m}\frac{h^m}{1.2.3\ldots m}+\text{etc.}}{\frac{d^nX'}{dx^n}\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}+\text{etc.}},$$

quantité qui sera nulle si $m>n$, infinie si $m<n$, et égale à $\frac{d^mX}{d^mX'}$ si $m=n$.

Venons aux applications.

96. 1°. La formule $\frac{x^n-1}{x-1}$ qui exprime la somme des n premiers termes de la progression par quotient $\div 1:x:x^2:x^3:$ etc., devient $\frac{0}{0}$ quand $x=1$; cependant cette somme, dans la progression $\div 1:1:1:1:$ etc., à laquelle on est conduit alors, a une valeur déterminée,

et égale à n, que la règle précédente va nous donner aussi. En effet, après avoir différentié le numérateur et le dénominateur de l'expression $\frac{x^n-1}{x-1}$, on trouve $\frac{nx^{n-1}dx}{dx}$, et en écrivant 1 au lieu de x, il vient n.

2°. La vraie valeur de $\frac{ax^2-2acx+ac^2}{bx^2-2bcx+bc^2}$, dans le cas où $x=c$, ne peut s'obtenir qu'après deux différentiations, car la première donne $\frac{dx-ac}{bx-bc}$, résultat qui devient encore $\frac{0}{0}$; mais en le différentiant on trouve $\frac{a}{b}$.

3°. Si l'on cherche la valeur de la fraction

$$\frac{x^3-ax^2-a^2x+a^3}{x^2-a^2},$$

lorsque $x=a$, on trouvera, après avoir différentié une fois le numérateur et le dénominateur, que le premier seul devient encore nul quand on met a au lieu de x; ce qui apprend que la vraie valeur de la fonction proposée est nulle. Le contraire aurait eu lieu pour la fonction

$$\frac{ax-x^2}{a^4-2a^3x+2ax^3-x^4}.$$

4°. La fonction transcendante $\frac{a^x-b^x}{x}$, qui devient $\frac{0}{0}$, lorsque $x=0$, étant traitée de même, donne $a^x la-b^x lb$, qui se réduit à $la-lb$.

Ce résultat s'obtient tout de suite en substituant aux fonctions a^x et b^x leurs développemens (27), car on trouve

$$\frac{a^x-b^x}{x}=la-lb+\{(la)^2-(lb)^2\}.\frac{x}{1.2}+\text{etc.},$$

et la supposition de $x=0$ réduit le second membre de cette équation à son premier terme. En faisant l'opération, on remarquera qu'il y a un facteur x qui disparaît par la division.

5°. La fonction $\frac{1-\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x-1}$ se réduit à $\frac{0}{0}$ lorsque l'arc $x=1^r$; mais en y appliquant la règle, on trouve que sa vraie valeur est alors 1.

6°. J'indiquerai encore les fonctions

$$\frac{a-x-a\,la+a\,lx}{a-\sqrt{2ax-x^2}} \quad \text{et} \quad \frac{x^x-x}{1-x+lx},$$

dont la première devient $\frac{0}{0}$ lorsque $x=a$, et la seconde lorsque $x=1$: leurs vraies valeurs sont respectivement -1 et -2.

97. Quand les facteurs qui s'évanouissent dans les deux termes de la fraction proposée, sont élevés à des puissances fractionnaires, les développemens ne pouvant plus s'obtenir par la série de Taylor (88), le procédé du n° 95 ne réussit pas.

Si l'on avait, par exemple, $\frac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x-a)^{\frac{3}{2}}}$, quoique la vraie valeur de cette fraction, lorsque $x=a$, soit $(2a)^{\frac{3}{2}}$; on n'y parviendrait jamais par la différentiation : on trouverait successivement

$$\frac{3x(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}(x-a)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{3(x^4-a^2)^{\frac{1}{2}}+3x^2(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(x-a)^{-\frac{1}{2}}}, \text{ etc.}$$

Le premier de ces résultats devient encore $\frac{0}{0}$, quand

on fait $x=a$; et la même supposition rend infinis les numérateurs et les dénominateurs de chacun des suivans. Si l'on fait disparaître les exposans négatifs, en passant au dénominateur ceux qui se trouvent dans le numérateur, *et vice versâ*, les expressions nouvelles qui naîtront de ce changement se réduiront toutes à $\frac{0}{0}$. Mais si l'on a recours au développement immédiat suivant la forme du n° 94, la fraction $\frac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x-a)^{\frac{3}{2}}}$, devient

$$\frac{(2ah+h^2)^{\frac{3}{2}}}{h^{\frac{3}{2}}}=(2a+h)^{\frac{3}{2}},$$

en changeant x en $a+h$; et faisant $h=0$, on obtient la vraie valeur $(2a)^{\frac{3}{2}}$.

Le même procédé paraîtra quelquefois plus commode que la différentiation, dans le cas où elle peut s'employer. Ce n'est, par exemple, qu'après avoir différentié quatre fois de suite le numérateur et le dénominateur de la fraction

$$\frac{x^3-4ax^2+7a^2x-2a^3-2a^2\sqrt{2ax-a^2}}{x^2-2ax-a^2+2a\sqrt{2ax-x^2}},$$

qu'on parvient à en trouver la vraie valeur, dans le cas où $x=a$.

En écrivant $a+h$ au lieu de x, comme le prescrit la règle, il vient

$$\frac{2a^3+2a^2h-ah^2+h^3-2a^2\sqrt{a^2+2ah}}{-2a^2+h^2+2a\sqrt{a^2-h^2}},$$

réduisant en série les deux quantités radicales, on aura

$$\sqrt{a^2+2ah} = a + h - \frac{h^2}{2a} + \frac{h^3}{2a^2} - \frac{5h^4}{8a^3} + \text{etc.},$$

$$\sqrt{a^2-h^2} = a - \frac{h^2}{2a} - \frac{h^4}{8a^3} - \text{etc.}$$

La substitution de ces deux suites dans la fraction précédente donnera $-5a$ pour la vraie valeur cherchée.

98. Une fonction peut encore se présenter sous plusieurs formes indéterminées, différentes en apparence de $\frac{0}{0}$, mais qui, dans le fond, reviennent au même, et qu'il est bon de connaître.

1°. Le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{X}{X'}$ peuvent devenir infinis en même temps; mais cette fraction étant écrite ainsi : $\frac{\frac{1}{X'}}{\frac{1}{X}}$, se réduit à $\frac{0}{0}$, lorsque X et X' sont infinis.

2°. Il peut arriver qu'on rencontre un produit composé de deux facteurs, l'un infini et l'autre nul. Soit PQ ce produit; si la supposition de $x = a$ donne $P = 0$, $Q = \frac{b}{0}$, on observera que $PQ = \frac{P}{\frac{1}{Q}}$, que $\frac{1}{Q} = 0$; et sous cette forme, PQ deviendra $\frac{0}{0}$.

Nous prendrons pour exemple, la fonction

$$(1-x)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\pi x;$$

π désignant la demi-circonférence. Quand on y fait $x = 1$, le premier facteur devient nul et le second infini; mais comme

$$\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\pi x} = \cot\tfrac{1}{2}\pi x,$$

on obtient $(1-x)\operatorname{tang}\frac{1}{2}\pi x = \frac{1-x}{\cot\frac{1}{2}\pi x}$;

fonction dont la vraie valeur, $\frac{2}{\pi}$ se trouve par le procédé du n° 95.

99. Si l'on demandait la valeur que reçoit la fonction $\frac{lx}{x^n}$ quand x est infini, ou, ce qui est la même chose, la limite de cette fonction, on ne pourrait y parvenir par aucun des procédés dont nous avons fait usage jusqu'à présent, à cause de l'impossibilité de réduire lx en série (29), et il faudrait recourir aux considérations particulières à la nature de la fonction proposée lx.

En changeant x en n et a en x, dans le développement de a^x (27), on aura

$$x^n = 1 + \frac{nlx}{1} + \frac{n^2(lx)^2}{1.2} + \frac{n^3(lx)^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

d'où l'on conclura

$$\frac{lx}{x^n} = \frac{lx}{1 + \frac{nlx}{1} + \frac{n^2(lx)^2}{1.2} + \frac{n^3(lx)^3}{1.2.3} + \text{etc.}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{lx} + n + \frac{n^2 lx}{1.2} + \frac{n^3(lx)^2}{1.2.3} + \text{etc.}},$$

quantité qui tend à devenir nulle à mesure que x augmente, au moins tant que n n'est pas d'une petitesse comparable à celle de $\frac{1}{lx}$ (98).

Ceci conduit à la valeur que prend le produit $x^n lx$, quand $x = 0$; car en faisant $x = \frac{1}{u}$, on trouve....

$x^n lx = -\frac{ly}{y^n}$; le second membre devenant nul lorsque y est infini, il s'ensuit que $x^n lx = 0$, lorsque $x = 0$.

100. La vraie valeur des coefficiens différentiels donnés par une équation où les variables sont mêlées, s'obtient d'une manière analogue ; en passant aux équations différentielles des ordres supérieurs. En effet, si $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dy}$ s'anéantissaient dans le développement de

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = 0 \qquad (48),$$

il se réduirait à

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d^2u}{dx^2}h^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}hk + \frac{d^2u}{dy^2}k^2 \\ + \text{etc.} \end{array}\right\} = 0 ;$$

en y faisant $k = \varpi h$, on aurait pour déterminer la limite de ϖ, ou $\frac{dy}{dx}$, l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{d^2u}{dxdy}\frac{dy}{dx} + \frac{d^2u}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 ,$$

du second degré, par rapport au coefficient différentiel cherché, et donnant par conséquent deux valeurs au lieu d'une seule qu'eût fourni l'équation

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = 0 ,$$

si elle n'était pas devenue illusoire (48).

Il est facile de voir que si les trois fonctions

$$\frac{d^2u}{dx^2}, \quad \frac{d^2u}{dxdy}, \quad \frac{d^2u}{dy^2},$$

devenaient nulles, on tomberait sur une équation du troisième degré, et ainsi de suite.

Ces équations élevées résultent des différentiations successives de la première, en y regardant dx et dy comme constans : mais il n'est pas nécessaire de s'arrêter à cette considération, parce qu'on retrouve ces mêmes équations dans la suite des différentielles fournies par la proposée $u = 0$; car la première

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy = 0,$$

étant représentée, pour abréger, par

$$Mdx + Ndy = 0,$$

sa différentielle prise en y regardant y comme fonction de x, suivant la règle du n° 50, est de la forme

$$Pdx^2 + Qdxdy + Rdy^2 + Nd^2y = 0,$$

et se réduisant à

$$Pdx^2 + Qdxdy + Rdy^2 = 0,$$

quand $N = 0$, devient du premier ordre; elle donne alors deux valeurs de dy, et par conséquent de $\frac{dy}{dx}$, au lieu d'une seule.

Si les coefficiens P, Q, R, s'anéantissaient aussi, il faudrait passer alors à l'équation différentielle du troisième ordre, qui deviendrait du premier. On verra bientôt (108) des applications de cette remarque, c'est pourquoi je n'en donne point ici.

101. La détermination des *maximums* et des *minimums* étant l'une des plus importantes de l'analyse, je crois devoir la reprendre d'une manière générale et indépendante de la considération des courbes.

On a déjà vu (83) que *le caractère essentiel du* maximum *consiste en ce qu'il surpasse en même temps les*

valeurs qui le précèdent et celles qui le suivent immédiatement ; le contraire a lieu pour le minimum *: il est moindre que les valeurs qui le précèdent et qui le suivent immédiatement.*

Considérons sous la forme la plus générale, le développement du second état de $u = f(x)$, lorsqu'on donne à x une valeur particulière a, et qu'on change ensuite a en $a + h$; et faisons en conséquence,

$$u' = u + Ph^{\alpha} + Qh^{\beta} + Rh^{\gamma} + \text{etc.},$$

les exposans α, β, γ, etc., étant entiers ou fractionnaires, mais rangés suivant l'ordre de leur grandeur, en commençant par le plus petit. Cela posé, l'état de u, correspondant à $a - h$ se déduira de u', en écrivant $-h$ au lieu de h; et en le désignant par $u_{,}$, on aura

$$u_{,} = u + P(-h)^{\alpha} + Q(-h)^{\beta} + R(-h)^{\gamma} + \text{etc.},$$

d'où il suit que les différences entre l'état primitif u et les états précédens et suivans, seront

$$u_{,} - u = P(-h)^{\alpha} + Q(-h)^{\beta} + R(-h)^{\gamma} + \text{etc.},$$
$$u' - u = Ph^{\alpha} + Qh^{\beta} + Rh^{\gamma} + \text{etc.};$$

mais elles doivent être toutes deux négatives quand u est un *maximum*, et positives dans le cas contraire, et cela quelque petit que soit l'accroissement h : il faut donc, dans l'un et l'autre cas, que les premiers termes $P(-h)^{\alpha}$ et Ph^{α} soient de même signe. Or, le coefficient P étant une fonction de a, qui ne change point, il faut pour que la puissance α de h ne change pas de signe, que son exposant soit un nombre pair, ou une fraction qui, réduite à sa plus simple expression, ait un numérateur pair. On aura alors

$$u_{,} - u = Ph^{\alpha} + \text{etc.},$$
$$u' - u = Ph^{\alpha} + \text{etc.}:$$

si P a par lui-même le signe $+$, ces deux différences seront positives, et u sera un *minimum*; si P a le signe $-$, ces mêmes différences seront négatives, et u sera un *maximum*.

102. Pour appliquer la remarque précédente à la détermination qui nous occupe, il faut distinguer le cas où l'exposant α est entier, de celui où il est fractionnaire, lorsqu'on fait $x=a$.

Dans le premier cas, la série de Taylor s'accorde avec le développement de u', au moins jusqu'au terme Ph^α inclusivement (89), en sorte que

$$P=\frac{1}{1.2\ldots\alpha}\frac{\mathrm{d}^\alpha u}{\mathrm{d}x^\alpha};$$

et puisque l'exposant α doit être un nombre pair, quand u est un *maximum* ou un *minimum*, il faut d'abord que la supposition $x=a$, fasse évanouir le coefficient différentiel $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, qui est d'ordre impair: a est donc une des racines de l'équation $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=0$. Il faut en outre que cette même valeur ne rende pas nul $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}$, ou que, si cela arrive, elle rende nul aussi $\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}$, mais non pas $\frac{\mathrm{d}^4u}{\mathrm{d}x^4}\neq$ et, en général, que le premier des coefficiens différentiels qu'elle ne fait pas évanouir soit d'ordre pair; elle rendra alors u *maximum*, si ce dernier coefficient est négatif, et *minimum* dans le cas contraire. Voilà pour le cas où l'exposant α est entier.

S'il est fractionnaire et >1, la valeur $x=a$, qui

donne au développement de u' la forme particulière qu'il prend alors, doit anéantir tous les coefficiens différentiels des ordres dont l'exposant est $< \alpha$ (89): l'équation $\frac{du}{dx} = 0$, indiquera donc encore cette valeur $x = a$; mais pour s'assurer si elle donne un *maximum* ou un *minimum*, il pourra être nécessaire de calculer *à priori* les différences $u_1 - u$ et $u' - u$, dans la supposition de h très petite, afin de savoir si leurs premiers termes sont de même signe et quel il est.

Enfin, quand $\alpha < 1$, $\frac{du}{dx}$ devenant infini, c'est alors l'équation

$$\frac{1}{\frac{du}{dx}} = 0,$$

qui indique la valeur $x = a$, dont la propriété se discute, comme il vient d'être dit pour le cas où $\alpha > 1$. On voit encore par là, comme dans le n° 83, que *pour embrasser les différens cas de la détermination des valeurs de* x, *qui peuvent rendre la fonction* u maximum *ou* minimum, *il faut examiner toutes celles qui rendent* $\frac{du}{dx}$ *nul ou infini;* mais je pense que la manière la plus simple de faire cet examen, sera le plus souvent de chercher si $\frac{du}{dx}$ change de signe ou non (83), aux environs de la valeur trouvée pour x.

L'application des règles précédentes à la fonction $u = b + c(x-a)^m$, qui m'a servi d'exemple dans le n° 83, est trop simple pour s'y arrêter, c'est pourquoi je passerai aux questions suivantes.

103. *Partager une quantité a en deux parties, de manière que le produit de la puissance* m *de la première, par la puissance* n *de la seconde, soit le plus grand de tous les produits semblables qu'on pourrait former.*

Soit x une des parties de a; l'autre sera $a-x$, et le produit dont on cherche le *maximum* étant représenté par u, on aura $u = x^m(a-x)^n$, d'où on tirera

$$\frac{du}{dx} = mx^{m-1}(a-x)^n - nx^m(a-x)^{n-1}$$
$$= [ma - mx - nx]x^{m-1}(a-x)^{n-1};$$

et en égalant à zéro chacun des facteurs de ce résultat, on trouvera

$$x = \frac{ma}{m+n}, \quad x = o, \quad x = a.$$

La première de ces valeurs répond à un *maximum*; car lorsqu'on la substitue dans l'expression générale de $\frac{d^2u}{dx^2}$, elle donne la quantité négative

$$-\frac{m^{m-1}n^{n-1}a^{n+m-2}}{(m+n)^{m+n-3}}.$$

Les deux autres répondront à des *minimums*, lorsque m et n seront pairs, comme on peut s'en assurer par l'examen des coefficiens différentiels, ou plus simplement encore, en faisant $x = \pm h$ et $x = a \pm h$. On trouvera toujours un résultat positif dans l'un et l'autre cas, quel que soit le signe qu'on donne à h, ce qui prouve que la fonction proposée, après avoir décru jusqu'à devenir nulle, ne passe point au négatif, mais qu'elle recommence à croître.

104. Je considérerai encore la fonction que y désigne

dans l'équation

$$y^2 - 2mxy + x^2 - a^2 = 0$$

dont la différentielle est

$$(y - mx)dy - (my - x)\,dx = 0 \qquad (49);$$

il viendra

$$\frac{dy}{dx} = \frac{my - x}{y - mx},$$

d'où l'on tirera

$$my - x = 0.$$

Pour obtenir la valeur de x, il faudra combiner cette dernière équation avec la proposée; on aura par ce moyen

$$y = \frac{x}{m}, \qquad \frac{x^2}{m^2} - x^2 - a^2 = 0,$$

d'où il résulte

$$x = \frac{ma}{\sqrt{1 - m^2}}, \qquad y = \frac{a}{\sqrt{1 - m^2}}.$$

Il reste à examiner ce que devient le coefficient $\frac{d^2y}{dx^2}$.

La différentielle seconde de l'équation proposée donne la suivante,

$$(y - mx)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2} - 2m\frac{dy}{dx} + 1 = 0,$$

que la supposition de $\frac{dy}{dx} = 0$ réduit à

$$(y - mx)\frac{d^2y}{dx^2} + 1 = 0,$$

et d'où l'on tire

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-m}{x(1 - m^2)},$$

en mettant pour y sa valeur en x. Il faut encore substi-

tuer celle de x; en le faisant on trouve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{a\sqrt{1-m^2}};$$

ce résultat étant négatif, montre que la valeur de y, déterminée ci-dessus, est un *maximum*.

Exemple de l'analyse d'une courbe.

105. On divise les lignes en différens ordres d'après le degré de leur équation. La ligne droite forme le premier ordre, parce qu'elle représente l'équation générale du premier degré à deux indéterminées. Les lignes du second et du troisième ordre sont celles dont les équations montent au second ou au troisième degré, et ainsi des autres. Newton, considérant que le premier ordre ne renfermait que la ligne droite, et que les courbes ne commençaient à se montrer que dans le second, divisa ces dernières en genres, et nomma *courbes du premier genre* les lignes du second ordre, *courbes du deuxième genre* celles du troisième ordre, et ainsi de suite.

Les lignes d'un même ordre se subdivisent en espèces par la considération des principales circonstances de leur cours.

S'il était possible de résoudre les équations de tous les degrés, rien ne serait plus facile que de suivre le cours de la courbe qui représente une équation algébrique quelconque. En effet, supposons que cette équation étant résolue par rapport à l'une des indéterminées qu'elle renferme, y, par exemple, fournisse les différentes racines X', X'', X''', etc., qui seront nécessairement des fonctions de x et de constantes; la question se réduira à examiner en particulier le cours de chacune des lignes produites par les équations

$$y = X', \quad y = X'', \quad y = X''', \quad \text{etc.},$$

lorsqu'on donne à x toutes les valeurs tant positives que négatives, que peuvent admettre les fonctions X', X'', X''', etc., sans cesser d'être réelles. Ces lignes seront autant de branches de la courbe qui représente l'équation proposée.

L'étendue de chaque branche sera déterminée par celle que comprennent les diverses solutions dont est susceptible l'équation qu'elle représente en particulier. Si parmi les quantités X', X'', X''', etc., il s'en trouve qui deviennent infinies, ou dans lesquelles on puisse supposer x infini, il en naîtra des branches dont le cours sera infini, puisqu'elles pourront s'éloigner indéfiniment de l'un des axes ou de tous les deux à la fois.

Dans les courbes algébriques, une branche ne s'arrête que parce que l'expression de son ordonnée devient imaginaire; mais le cours de la courbe proposée n'est pas interrompu pour cela : il arrive seulement alors que deux branches se réunissent et se continuent réciproquement. On s'en convaincra en observant que les valeurs imaginaires de y sont nécessairement en nombre pair, et que celles d'un même couple ont été réelles et égales avant de devenir imaginaires. En effet, l'équation proposée pouvant toujours se décomposer en facteurs réels du premier et du second degré, si l'on représente par $y^2 - 2Py + Q = 0$ un de ces derniers, on verra que ses racines, $P \pm \sqrt{P^2 - Q}$, ne deviennent imaginaires qu'à cause que Q devient plus grand que P^2, de moindre qu'il était d'abord, et qu'il y a par conséquent un point où les fonctions de x que désignent les lettres P et Q, sont telles que $P^2 = Q$, ce qui anéantit la quantité radicale, et donne pour y deux valeurs égales.

Si plusieurs branches se coupent dans un point, il

arrivera aussi qu'un pareil nombre de valeurs de y deviendront égales.

106. *Soit*, pour exemple, l'équation

$$y^4 - 96a^2y^2 + 100a^4x^2 - x^4 = 0.$$

Cette équation, résoluble à la manière de celles du second degré, soit par rapport à y, soit par rapport à x, donne

$$y = \pm\sqrt{48a^2 \pm \sqrt{2304a^4 - 100a^2x^2 + x^4}};$$

et si, pour abréger, on fait

$$2304a^4 - 100a^2x^2 + x^4 = N,$$

on en tirera les quatre valeurs

$$y = \sqrt{48a^2 + \sqrt{N}}\ (1),\quad y = \sqrt{48a^2 - \sqrt{N}}\ (2),$$

$$y = -\sqrt{48a^2 + \sqrt{N}}\ (3),\quad y = -\sqrt{48a^2 - \sqrt{N}}\ (4),$$

dont il faut, d'après ce qui précède, examiner la marche, pour déterminer le cours des lignes qui les représentent.

On voit d'abord que les valeurs (3) et (4) ne différant de (1) et (2) que par le signe, doivent donner des branches pareilles à celles qui résultent de ces dernières, mais seulement placées au-dessous de l'axe des x. De plus, comme la fonction N ne renferme que des puissances paires de x, elle reste la même lorsqu'on y change $+x$ en $-x$; ainsi le côté négatif de l'axe des x doit offrir des parties de la courbe pareilles à celles qui sont du côté des x positifs, en sorte que cette courbe est partagée par les axes des coordonnées, en quatre parties égales et semblables : c'est aussi ce que l'on voit par l'équation même, qui ne change point, quelque signe que l'on donne à chacune des variables x et y.

Examinons donc en particulier les valeurs (1) et (2). Elles ne peuvent être réelles qu'autant que la valeur de N est positive; mais cette fonction, étant ration-

nelle et entière, ne saurait changer de signe qu'en passant par zéro : les racines de l'équation

$$x^4 - 100a^2x^2 + 2304a^4 = 0,$$

seront donc les limites des valeurs que l'on peut donner à x. On trouvera que le premier membre de cette équation se décompose dans les facteurs

$$x - 6a, \quad x + 6a, \quad x - 8a, \quad x + 8a :$$

il sera donc négatif quand $x > 6a$ et $< 8a$, parce qu'alors un seul de ses facteurs changera de signe ; ainsi la courbe ne s'étend point au-dessus de la partie de l'axe des abscisses comprise entre $x = 6a$ et $x = 8a$; mais depuis $x = 8a$, N deviendra positive pour toujours.

On observera ensuite qu'à

$$x = 0, \quad x = 6a, \quad x = 8a,$$

répondent, dans l'équation (1), les valeurs

$$y = \pm\sqrt{96a^2}, \quad y = \pm\sqrt{48a^2}, \quad y = \pm\sqrt{48a^2}.$$

FIG. 26. Cette équation fournit donc, 1°. une partie DF, *fig.* 26, qui s'étend du point D, pris dans l'axe AC, au point F dont l'abscisse $AE = 6a$; 2°. une autre partie HX, qui, partant du point H dont l'abscisse $AG = 8a$, s'étend à l'infini dans l'angle BAC, où les x et les y sont positifs.

L'équation (2) ne donnera, comme l'équation (1), que des valeurs imaginaires entre $x = 6a$ et $x = 8a$; mais aux valeurs

$$x = 0, \quad x = 6a, \quad x = 8a,$$

répondent

$$y = 0, \quad y = \pm\sqrt{48a^2}, \quad y = \pm\sqrt{48a^2},$$

qui font voir, 1°. que l'équation (2) donne une partie AF qui va se joindre à la partie DF, au point F où les deux racines (1) et (2) deviennent égales ; 2°. que du point H, sur la partie HX fournie par l'équation (1),

part une portion HK résultante de l'équation (2) dans laquelle y décroît jusqu'à zéro, lorsque $48a^2 = \sqrt{N}$, ce qui indique le point I situé sur l'axe des x; passé ce point, $\sqrt{N}$ devenant $> 48a^2$, la valeur (2) est imaginaire pour toujours, et la portion HI finit à sa jonction avec la portion correspondante, située au-dessous de l'axe des x. L'abscisse AI est évidemment déterminée par l'équation

$$(48a^2)^2 = 2304a^4 - 100a^2x^2 + x^4,$$

qui revient à

$$x^4 - 100a^2x^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = \pm 10a.$$

L'abscisse $x = 0$ étant celle du point A déjà indiqué, c'est $x = 10a$ qui donne le point I, où se termine la partie HI.

Il est à propos de remarquer que les points A, D et I, se détermineraient immédiatement par l'équation proposée, en cherchant ceux où la courbe rencontre les axes des coordonnées, et que la discussion précédente, analogue à celle de l'équation générale du second degré (*Trig.* 111), suffit pour faire connaître l'étendue des diverses parties de la courbe, mais n'en donne pas la forme précise. C'est au contraire ce que fait l'application du Calcul différentiel, qui de plus, abrège beaucoup la recherche des limites des branches, et a l'avantage de montrer comment cette recherche pourrait s'effectuer lors même que l'équation de la courbe proposée serait d'un degré trop élevé, pour qu'on pût obtenir l'expression générale de l'une des variables, par le moyen de l'autre.

107. Je commencerai cette nouvelle discussion, par

l'examen des branches infinies de la courbe proposée. L'inspection des valeurs de y (106) nous a déjà fait connaître que cette courbe a, dans chaque angle des coordonnées, une branche pour laquelle les variables x et y sont infinies en même temps ; mais sans recourir aux formules citées, si l'on fait $y = tx$, l'équation de cette courbe se divise par x^2, et devient

$$t^4x^2 - 96a^2t^2 + 100a^2 - x^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$x^2 = \frac{100a^2 - 96a^2t^2}{1 - t^4},$$

résultat qui donne $x = \pm$ infini, lorsque $t = 1$, et alors $y = x$.

On aura ensuite (73)

$$x - y\frac{dx}{dy} = \frac{x^4 - 50a^2x^2 - y^4 + 48a^2y^2}{x^3 - 50a^2x},$$

$$y - x\frac{dy}{dx} = \frac{y^4 - 48a^2y^2 - x^4 + 50a^2x^2}{y^3 - 48a^2y},$$

expressions qui, lorsqu'on y met pour y^4 sa valeur, se réduisent à

$$\frac{50a^2x^2 - 48a^2y^2}{x^3 - 50a^2x}, \quad \frac{48a^2y^2 - 50a^2x^2}{y^3 - 48a^2y},$$

diminuent sans cesse à mesure que x et y augmentent, et dont la limite, quand x et $y = \pm$ infini, est zéro. On voit par là (73) que la courbe proposée a deux asymptotes, passant par l'origine des coordonnées. Pour achever de les déterminer, il faut prendre dans la même hypothèse, la limite de l'expression de $\frac{dy}{dx}$; et formant toutes les combinaisons des signes + et —, on trouvera ± 1, ce qui fait voir que les asymptotes cherchées font avec l'axe des abscisses, des angles $\pm 0^g,5$.

on ne les a point tirées, afin de ne pas trop compliquer la figure.

108. Venons maintenant aux points singuliers de la courbe que nous discutons. Son équation différentielle première,

$$(y^3-48a^2y)dy+(50a^2x-x^3)dx=0;$$

donne

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^3-50a^2x}{y^3-48a^2y}.$$

En égalant à zéro le numérateur de ce coefficient différentiel, on trouve $x=0$ et $x^2-50a^2=0$. La première valeur de x, substituée dans l'équation proposée, conduit à $y=0$, et $y=\pm\sqrt{96a^2}$; mais comme, en faisant $x=0$ et $y=0$, il vient $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$, il faut, suivant le procédé du n° 100, passer à l'équation différentielle seconde, que la supposition ci-dessus réduit à

$$-48a^2dy^2+50a^2dx^2=0, \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\frac{50}{48}}.$$

Il suit de ces valeurs, qu'au point A, la courbe est touchée par deux droites, faisant avec l'axe des abscisses des angles dont les tangentes trigonométriques sont

$$\sqrt{\tfrac{50}{48}}=\tfrac{5}{4}\sqrt{\tfrac{2}{3}}, \quad -\sqrt{\tfrac{50}{48}}=-\tfrac{5}{4}\sqrt{\tfrac{2}{3}},$$

et que c'est par conséquent un point multiple (85).

Pour achever de connaître la forme de la courbe à ce point, il faut savoir de quel côté les branches tournent leur concavité, et déterminer en conséquence le signe de $\frac{d^2y}{dx^2}$ avant et après, ce qui pourrait entraîner des longueurs, à cause que les deux variables entrent à la fois dans son expression. On arrive plus promptement but, en cherchant la valeur de ce coefficient donnée,

pour le point même, par l'équation différentielle troisième, que la supposition de $x=0$, $y=0$, réduit à $144a^2dyd^2y=0$, et d'où il faut nécessairement conclure $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, puisque $\frac{dy}{dx}$ n'est pas nul. Le second coefficient différentiel étant égal à zéro, passons au troisième qui se tire de la différentielle quatrième. Cette dernière, en y faisant x, y et d^2y nuls, se réduit à

$$-4.48a^2dyd^3y+6dy^4-6dx^4=0;$$

l'on en déduit alors

$$-32a^2\frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{dy^4}{dx^4}-1=0, \quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{(\frac{50}{48})^2-1}{\pm 32a^2\sqrt{\frac{50}{48}}},$$

en mettant pour $\frac{dy}{dx}$ sa valeur $\pm\sqrt{\frac{50}{48}}$. Par ce moyen l'expression de la distance entre la courbe et sa tangente, pour l'abscisse $x+h$ (76), devient

$$\delta''=\pm\frac{(\frac{50}{48})^2-1}{32a\sqrt{\frac{50}{48}}}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$

ce qui montre que la branche touchée par la droite AL qui répond à la valeur positive de $\frac{dy}{dx}$, est au-dessus de cette droite du côté des abscisses positives, et au-dessous, du côté des abscisses négatives, et que le contraire a lieu pour la branche touchée par la droite AL'; que par conséquent chacune des branches de la courbe subit au point A une inflexion.

109. Je reviens aux valeurs $y=\pm\sqrt{96a^2}=\pm 4a\sqrt{6}$. Elles rendent véritablement nulle l'expression de $\frac{dy}{dx}$, puisqu'elle ne font pas évanouir son dénominateur :

ainsi, aux points D et D' que ces valeurs indiquent, la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

On reconnaîtra qu'au point D l'ordonnée est un *maximum* positif, soit en cherchant ce que devient $\frac{d^2y}{dx^2}$ (102), soit en s'assurant que l'ordonnée qui la précède, et celle qui la suit immédiatement, sont toutes deux plus petites. Ces deux moyens sont également faciles ici, d'abord le deuxième, puisqu'on a les valeurs de y (106), et qu'il s'agit de celles où le second radical a le signe $+$. Quant au premier moyen, l'équation différentielle seconde, en y faisant $x = 0$, $y = \pm\sqrt{96a^2}$ et $\frac{dy}{dx} = 0$, donne tout de suite la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$, avec le signe $-$ pour le point D, ce qui indique bien un *maximum*, et avec le signe $+$ pour le point D', qu'il faut considérer comme un *minimum*, puisque toute augmentation dans le sens négatif revient à un décroissement par rapport aux quantités positives.

Il reste encore à examiner les racines de l'équation

$$x^2 - 50a^2 = 0, \quad \text{savoir} \quad x = \pm 5a\sqrt{2}.$$

En les substituant dans l'équation proposée, elles rendent imaginaires les expressions de y, et par conséquent n'appartiennent point à la courbe.

110. *Cherchons maintenant* les valeurs de x et de y, qui peuvent rendre infinie celle de $\frac{dy}{dx}$. Égalons pour cela son dénominateur à zéro, ce qui fournira l'équation $y^3 - 48a^2y = 0$, d'où il résulte $y = 0$ et $y = \pm\sqrt{48a^2}$. La première valeur, mise dans l'équation de la courbe, donne $100a^2x^2 - x^4 = 0$; et l'on en conclut $x = 0$,

$x = \pm 10a$. La racine $x = 0$ indique encore le point multiple placé à l'origine A; les deux autres répondent aux points I et I', où la courbe rencontre de nouveau l'axe des abscisses, mais de manière que sa tangente est perpendiculaire à cet axe, puisque les valeurs $x = \pm 10a$ ne font point évanouir le numérateur de $\frac{dy}{dx}$.

On voit que ce sont les points à partir desquels les valeurs de y, où le second radical a le signe —, deviennent imaginaires pour toujours. On pourrait les considérer comme des *maximums* par rapport à la variable x et à l'axe AC; et on les constaterait par l'examen des valeurs correspondantes de $\frac{d^2x}{dy^2}$, obtenues en considérant, dans les différentiations, x comme fonction de y, au lieu de prendre y pour une fonction de x.

Les deux dernières valeurs $y = \pm\sqrt{48a^2} = \pm 4a\sqrt{3}$, conduisent à $x = \pm 6a$, $x = \pm 8a$; l'un de ces résultats fait connaître le point F et ses analogues, l'autre le point H et ses analogues. Dans tous ces points la tangente est perpendiculaire à l'axe des abscisses; et la courbe n'ayant point d'ordonnées réelles, depuis $x = 6a$ jusqu'à $x = 8a$, c'est-à-dire sur l'espace EG, cette circonstance suffit pour faire voir comment elle doit être tournée à l'égard de sa tangente, aux points F et H.

111. Après avoir déterminé la nature de tous les points singuliers, indiqués par le coefficient différentiel du premier ordre, il faut encore chercher si les coefficiens des ordres supérieurs n'en manifesteraient pas d'autres. Pour cela il faut considérer d'abord le coefficient différentiel du second ordre; son expression générale est

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3x^2 - 50a^2 - (3y^2 - 48a^2)\frac{dy^2}{dx^2}}{y^3 - 48a^2y};$$

elle devient $\frac{0}{0}$, lorsque x et y sont nuls; mais nous n'avons point à nous arrêter sur ces valeurs, puisque le point A auquel elles appartiennent est suffisamment discuté (108).

La supposition de $y^2 - 48a^2 = 0$, qui fait évanouir le dénominateur, ne doit pas nous arrêter non plus, parce que nous savons qu'elle répond aux points F et H (110); mais le numérateur étant égalé à zéro, donnera une équation qui peut indiquer d'autres valeurs que les précédentes. Cette équation est

$$3x^2 - 50a^2 - (3y^2 - 48a^2)\frac{dy^2}{dx^2} = 0;$$

il faut en chasser $\frac{dy}{dx}$ au moyen de son expression générale, et faire disparaître les dénominateurs : on obtiendra

$$(3x^2 - 50a^2)(y^3 - 48a^2y)^2 - (3y^2 - 48a^2)(x^3 - 50a^2x)^2 = 0,$$

résultat auquel on peut donner la forme

$$y^2(y^2 - 48a^2)^2(3x^2 - 50a^2) - x^2(x^2 - 50a^2)^2(3y^2 - 48a^2) = 0.$$

Si maintenant on observe que l'équation proposée revient elle-même à

$$(y^2 - 48a^2)^2 - (x^2 - 50a^2)^2 + 196a^4 = 0,$$

et qu'on prenne dans cette équation la valeur de $(y^2 - 48a^2)^2$, pour la substituer dans la précédente, on trouvera, après les réductions,

$$(x^2 - 50a^2)^2(25y^2 - 24x^2) + 98a^2y^2(3x^2 - 50a^2) = 0.$$

En tirant de cette dernière la valeur de y^2 pour la substituer dans la proposée, on aura une équation finale

qui ne contiendra plus que x, et dont il faudrait discuter les racines, ainsi que je l'ai fait dans les articles précédens; mais comme la marche des branches de la courbe indique suffisamment l'existence des points d'inflexion K, placés entre les points H et I, on pourrait se borner à la résolution de l'équation finale dont nous venons de parler, pour obtenir la valeur précise de l'abscisse des points K; ce qui serait encore fort difficile, à cause du degré auquel s'élève cette équation : ainsi il sera souvent nécessaire de recourir à des moyens particuliers, pour déterminer les points singuliers des courbes. Le développement de l'ordonnée en série, est un de ces moyens; mais il ne saurait entrer dans un traité élémentaire (*).

Des courbes transcendantes.

112. Je n'ai considéré jusqu'ici que des courbes algébriques; je vais maintenant faire connaître quelques-unes des *courbes transcendantes* les plus remarquables: on nomme ainsi celles dont l'équation ne peut s'obtenir en termes algébriques. Je m'occuperai d'abord de la *Logarithmique* ou de la courbe dans laquelle les ordonnées sont les logarithmes des abscisses. La manière la plus simple de la construire par points, afin de s'en former une idée, est de diviser l'axe des abscisses en parties égales, pour représenter les nombres, et de prendre les logarithmes correspondans dans les tables, pour les porter sur les ordonnées.

Suivant ce procédé, son équation est $y = lx$; et quand on prend $x = 1$, il vient $y = 0$, ce qui fait voir

(*) On en trouvera les principes dans le Ier vol. du Traité in-4°.

qu'elle rencontre l'axe AB au point E, *fig.* 27, où l'abscisse AE est égale à l'unité. La branche EX, qui répond aux abscisses positives plus grandes que l'unité, est infinie, puisque les logarithmes de ces abscisses croissent toujours. Dans la partie AE, où les abscisses sont des fractions, les ordonnées sont négatives et augmentent à mesure que ces fractions diminuent, en sorte que la branche Ex a pour asymptote la partie négative Ac de l'axe des ordonnées : enfin la logarithmique ne s'étend point du côté des abscisses négatives, parce que leurs logarithmes sont imaginaires (*). FIG. 27.

En faisant faire un quart de révolution à la figure, les abscisses deviennent les ordonnées; on a $x=ly$; et si a désigne la base du système, il en résulte l'équation $y=a^x$, dans laquelle les logarithmes sont les abscisses.

On peut alors, par des moyennes proportionnelles tirées du cercle, trouver autant de points qu'on voudra de la logarithmique, puisqu'aux abscisses

$$x=\tfrac{1}{2},\quad x=\tfrac{3}{2},\text{ etc.},\quad x=\tfrac{1}{4},\text{ etc.},$$

répondent les ordonnées

$$y=\sqrt{a.1},\quad y=\frac{a\sqrt{a.1}}{1},\text{ etc.},\quad y=\sqrt[4]{1.\sqrt{a.1}},\text{ etc.}$$

Joignant à ces valeurs de y celles qui se présentent d'elles-mêmes, lorsque x est un nombre entier, on aura un procédé graphique très simple, pour tracer par points une logarithmique, sans le secours des tables.

Il est visible que les logarithmiques ne diffèrent qu'à raison de la base, ou du module du système qu'elles représentent.

(*) *Voyez*, à la fin de cet ouvrage, la note B, et le Ier vol. du Traité in-4°.

113. En différentiant l'équation $y = lx$, il vient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M}{x} \quad (28);$$

on voit par là que la tangente de cette courbe est perpendiculaire à la ligne des abscisses lorsque $x = 0$, et qu'elle ne lui est parallèle qu'en supposant x infinie (83). L'expression générale de la soutangente (66) donne $PT = \frac{xy}{M}$; mais en chassant y, on introduit le logarithme de x; ainsi cette expression est transcendante. Cependant, en prenant la soutangente OD sur l'axe AC, on aura $OD = \frac{x dy}{dx} = M$, résultat bien remarquable, puisqu'il montre que la soutangente OD est constante et égale au module, pour tous les points de la courbe. On trouverait de même que la tangente, la sounormale et la normale, prises par rapport à l'axe AB, sont transcendantes à cause que l'ordonnée y entre dans leur expression, mais qu'elles deviennent algébriques, lorsqu'on les considère à l'égard de l'axe AC.

Je passe à la recherche du rayon de courbure. On a

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{x^2 + M^2}{x^2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{x^2},$$

d'où (81) $$\gamma = \frac{(x^2 + M^2)^{\frac{3}{2}}}{Mx},$$

$$y - \beta = \frac{x^2 + M^2}{M}, \quad x - \alpha = -\frac{x^2 + M^2}{x}.$$

Je ne m'arrêterai point à considérer la développée, qui serait nécessairement transcendante ; j'observerai seulement qu'on pourrait obtenir immédiatement l'équa-

tion différentielle de cette courbe, en éliminant par le moyen des valeurs de $y-\beta$, de $x-\alpha$ et de leurs différentielles, x, dx et dy, de l'équation $dy = M\frac{dx}{x}$.

114. La *cycloïde* ou la courbe décrite par un point pris sur la circonférence d'un cercle, pendant que ce cercle roule sur une ligne droite donnée de position, est encore une courbe transcendante; la relation entre ses ordonnées et ses abscisses, dépend des arcs du cercle générateur : voici comment on peut l'exprimer.

L'origine du mouvement du cercle étant arbitraire, je la prends au point A, *fig.* 28, où le point *décrivant* M se trouvait sur la droite AB parcourue par le cercle générateur QMG. Puisque ce cercle, en roulant, applique successivement tous les points de sa circonférence sur la droite AB, il est évident que lorsqu'il est parvenu dans une situation quelconque QMG, la distance AQ est égale à l'arc MQ, compris entre le point M qui touchait la droite AB en A, et le point Q qui la touche dans la position actuelle. FIG. 28.

Si l'on élève sur AB, par le point Q, la perpendiculaire QO, qui passera par le centre du cercle générateur, et qu'on mène MN parallèle à AB, MN sera le sinus de l'arc MQ, et NQ en sera le sinus-verse (*Trig.* 5).

Posant donc $QO=a$, $AP=x$, $PM=QN=y$,

on aura

$$x=AQ-PQ=\text{arc}\,MQ-\sin MQ,\quad y=\text{sin. verse}\,MQ,$$

$$MN=\sin MQ=\sqrt{2ay-y^2};$$

et en faisant usage de la notation employée sur la page 59, on écrira

$$x = \text{arc (sin. verse} = y) - \sqrt{2ay - y^2}.$$

C'est là l'équation primitive de la cycloïde (*).

L'arc MQ peut aussi s'indiquer par son cosinus ON, ou $a - y$: on le fait disparaître par la différentiation, en se servant de la formule du n° 36, dans laquelle on change R en a, u en $a - y$, x en MQ; on trouve

$$\text{d. arc } MQ = \frac{a\,dy}{\sqrt{2ay - y^2}},$$

et l'on a ensuite

$$dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{2ay - y^2}} - \frac{a\,dy - y\,dy}{\sqrt{2ay - y^2}},$$

ou

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{2ay - y^2}};$$

telle est l'équation différentielle de la cycloïde.

Lorsque le point de contact est parvenu à une distance AI égale à la demi-circonférence du cercle générateur, le point décrivant se trouve en K, et son élévation au-dessus de AB est égale au diamètre de ce cercle; il descend ensuite jusqu'au point L, où le point de contact a parcouru une distance AL égale à la circonférence entière.

(*) Si l'on voulait construire la cycloïde par points, il serait commode d'employer les tables trigonométriques; et comme elles sont calculées dans un cercle dont le rayon est l'unité, il faudrait prendre dans ce cercle, un arc t du même nombre de degrés que l'arc MQ; on aurait

$$\text{arc } MQ = at, \quad \sin MQ = a \sin t, \quad \text{sin. verse } MQ = a \text{ sin. verse } t;$$

et par conséquent

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a \text{ sin. verse } t,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$x = a\left\{\text{arc}\left(\text{sin. verse} = \frac{y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}\right\}.$$

La cycloïde n'est pas terminée à ce point, car rien ne limite la durée du mouvement du cercle générateur. On doit bien observer, dans la description des courbes, que les diverses parties résultantes d'une même construction ou d'un même mouvement, appartiennent toutes à la même courbe. Ainsi le cercle QMG, en continuant de rouler sur la droite AB, au-delà du point L, décrit une suite de portions semblables à AKL, et il faut en concevoir autant sur la gauche du point A, puisque le cercle a pu n'arriver à ce point qu'à la suite d'un mouvement commencé depuis un temps infini. L'équation de la courbe conduit à ces remarques, car rien n'empêche d'y supposer l'arc MQ, augmenté ou diminué d'autant de circonférences qu'on voudra. On voit d'ailleurs que y ne pourra jamais surpasser $2a$. Il suit de là que la cycloïde, conçue dans toute l'étendue qu'elle doit avoir, peut être coupée en une infinité de points, par une même ligne droite.

115. Rien n'est plus facile que d'obtenir les expressions de la soutangente et de la tangente, de la sounormale et de la normale, dans cette courbe. On trouve, par les formules générales du n° 66,

$$PT = \frac{y^2}{\sqrt{2ay - y^2}}, \quad MT = \frac{y\sqrt{2ay}}{\sqrt{2ay - y^2}},$$

$$PR = \sqrt{2ay - y^2}, \quad MR = \sqrt{2ay}.$$

On peut construire ces valeurs d'une manière très simple; car il est aisé de remarquer que PM ou y étant considéré comme l'abscisse QN dans le cercle générateur QMG, la valeur donnée ci-dessus pour PR est précisément celle de l'ordonnée MN de ce cercle, et que, par conséquent, la normale se confond avec la corde de l'arc MQ, comme on peut le voir aussi par

l'expression de MR. Il suit de là que la tangente MT est le prolongement de la corde MG. Maintenant si l'on décrit sur IK, comme diamètre, un cercle qui sera égal au cercle générateur, et que l'on prolonge la droite MN jusqu'en m, il est visible que les cordes mI et mK seront égales et parallèles aux cordes MQ et MG; il suffira donc, pour construire la tangente et la normale dans un point donné M, de rapporter ce point sur le cercle fixe ImK, en tirant la droite Mm parallèle à AB, et de mener ensuite MT parallèlement à mK, et MQ parallèlement à mI (*).

116. Je passe à la recherche du rayon de courbure. En différentiant l'équation

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{2ay-y^2}},$$

j'obtiens, puisque dx est constant,

$$0 = (y\,d^2y + dy^2)\sqrt{2ay-y^2} - \frac{y\,dy(a\,dy - y\,dy)}{\sqrt{2ay-y^2}};$$

réduisant et divisant par y, il vient

$$0 = (2ay-y^2)\,d^2y + a\,dy^2,$$

d'où je tire

$$d^2y = -\frac{a\,dy^2}{2ay-y^2};$$

substituant cette valeur et celle de dy dans l'expression du rayon de courbure (81), je trouve, après les réduc-

(*) Si l'on plaçait au point I l'origine des abscisses, on aurait $PI = Mn = Mm + mn$; mais, dans le parallélogramme $MQIm$, $Mm = IQ$, et de plus

$IQ = AI - AQ = QMG - \text{arc } QM = \text{arc } GM = \text{arc } Km$; donc $Mn = \text{arc } Km + \sin Km$, ce qui rend bien facile la construction de la courbe, par points, en donnant diverses valeurs à Km.

tions nécessaires,

$$\gamma = 2^{\frac{3}{2}}(ay)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2ay}.$$

Ce résultat fait voir que le rayon de courbure MM' est double de la normale MQ, et qu'il ne peut par conséquent devenir plus grand que le double du diamètre du cercle générateur, diamètre qui est à la fois l'ordonnée et la normale au point K de la cycloïde, correspondant à l'abscisse AI (114).

Les expressions de $x-\alpha$ et de $y-\beta$ donnent ensuite

$$y-\beta = 2\gamma, \qquad x-\alpha = -2\sqrt{2ay-y^2};$$

on conclut de là

$$y = -\beta, \qquad x = \alpha - 2\sqrt{-2a\beta-\beta^2}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation primitive de la cycloïde, et réduisant, on obtient

$$\alpha = \text{arc (sin. verse} = -\beta) + \sqrt{-2a\beta-\beta^2},$$

résultat qui a beaucoup d'analogie avec cette équation. Le radical $\sqrt{-2a\beta-\beta^2}$ devient semblable à $\sqrt{2ay-y^2}$ lorsqu'on fait $\beta = -2a+\beta'$, ce qui revient à prendre, au lieu de l'ordonnée EM', toujours négative, l'ordonnée $P'M'$ rapportée à un axe $A'B'$ placé au-dessous de AB, à une distance $A'I = 2a$. Par cette transformation, il vient

$$\alpha = \text{arc (sin. verse} = 2a-\beta') + \sqrt{2a\beta'-\beta'^2};$$

puis, si l'on observe que deux arcs dont les sinus verses réunis composent le diamètre, sont supplémens l'un de l'autre, et qu'on désigne la demi-circonférence par π, on pourra écrire

$$\alpha = \pi - \text{arc (sin. verse} = \beta') + \sqrt{2a\beta'-\beta'^2}.$$

Prenant enfin $\alpha = \pi - \alpha'$, c'est-à-dire, substituant à

l'abscisse AE, l'abscisse $A'P' = AI - AE$, il viendra

$$\alpha' = \text{arc (sin. verse} = \beta') - \sqrt{2a\beta' - \beta'^2},$$

équation d'une cycloïde dont l'origine est au point A', et décrite sur l'axe $A'B'$, par le même cercle générateur que la proposée, mais dans le sens $A'B'$ contraire à AB.

La même conséquence peut se tirer immédiatement de la détermination du rayon de courbure. En prolongeant la droite GQ jusqu'à ce qu'elle rencontre $A'B'$ en Q', et menant $Q'M'$, on formera les triangles GMQ et $QM'Q'$ égaux entre eux; l'angle $QM'Q'$ sera donc droit; et si l'on décrit sur QQ', comme diamètre, un cercle, il passera par le point M', et sera égal au cercle générateur. Cela posé, puisque l'arc $M'Q'$ est le supplément de $M'Q$, qui lui-même est égal à MQ, on aura

$$\begin{aligned} \text{arc } M'Q' &= QMG - \text{arc } MQ \\ &= AI - AQ = QI = A'Q', \end{aligned}$$

ce qui montre bien clairement que la développée $A'M'A$, est une cycloïde décrite par le cercle $QM'Q'$, roulant sur $A'B'$, de A' vers B'.

Il suit encore de ce qui précède, que la cycloïde est rectifiable, puisqu'elle est elle-même sa développée, et que l'expression de son rayon de courbure est algébrique; et on en déduira ce résultat curieux, que la longueur de l'arc $A'M'A$, ou de son égal AMK, qui compose la moitié de branche décrite par une révolution entière du cercle générateur, est précisément la même que celle de $A'K$, ou le double du diamètre de ce cercle.

Il faut remarquer aussi que le coefficient différentiel du second ordre $\frac{d^2y}{dx^2}$, étant égal à $-\frac{a}{\ldots}$, est toujours né-

gatif, et qu'il devient infini ainsi que $\frac{dy}{dx}$, quand $y = 0$, ce qui arrive lorsque l'arc MQ est nul, ou égal à un multiple quelconque de la circonférence : la cycloïde est donc concave vers son axe, et les points A, L, etc., où se touchent ses différentes branches, sont des points de rebroussement de la première espèce, dans lesquels la tangente est perpendiculaire à l'axe des abscisses (83).

117. Les spirales composent encore un ordre de courbes transcendantes, remarquables par leur forme et leurs propriétés. Voici comment s'engendre celle qu'imagina Conon de Syracuse, et dont Archimède découvrit les principales propriétés.

Pendant que le rayon AO, *fig.* 29, se meut uniformément autour du centre A du cercle OGO, un point mobile, parti de ce centre, parcourt de même la ligne AO, et avec une vitesse telle, qu'il arrive au point O, lorsque cette droite achève sa révolution. Il suit de là, que, pour un point quelconque M de la spirale $AMOM'X$, le rapport de AM à AN, est le même que celui de l'arc OGN à la circonférence OGO; mais comme rien ne s'oppose à ce que le point *décrivant* continue son mouvement au-delà du point O, sur le rayon prolongé, et que ce rayon peut lui-même faire un nombre infini de révolutions, la courbe AMO se prolongera en tournant toujours autour du point A, de manière que le rapport entre la distance de chacun de ses points au point A et le rayon du cercle, soit égal à celui qui se trouve entre l'arc parcouru par le point O, depuis le commencement du mouvement, et la circonférence entière. En M', par exemple, où le rayon AN a fait une révolution plus l'arc OGN, on aura FIG. 29.

$$\frac{AM'}{AN} = \frac{OGO+OGN}{OGO}.$$

Si donc on fait

$$OGN = t, \quad AM = u,$$

et que, prenant pour unité le rayon AN, on représente par 2π la circonférence OGO, il viendra $u = \frac{t}{2\pi}$.

Les variables de cette équation sont ce que les géomètres appellent des *coordonnées polaires*. Le centre A du cercle OGO, se nomme le *pôle ;* la ligne AM, assujettie à passer toujours par ce point, est le *rayon vecteur*, et tient lieu de l'ordonnée de la courbe, tandis que l'angle parcouru par AM et mesuré par l'arc OGN, remplace l'abscisse.

Pour avoir égard aux signes de ces coordonnées, il faut d'abord prendre les arcs négatifs dans le sens contraire à celui qu'on a choisi pour les arcs positifs. Ce dernier étant, par exemple OGO, l'autre doit être $OG'O$. Les valeurs négatives du rayon vecteur doivent aussi se trouver, par rapport au pôle, du côté opposé aux valeurs positives. Dans la figure 30, j'ai porté les rayons vecteurs négatifs, non pas sur la partie qui passe par l'extrémité de l'arc $OG'N'$, mais sur son prolongement An; c'est ainsi que tombe la sécante trigonométrique, quand elle est négative (*Trig.*, note du n° 77).

FIG. 30.

En opérant de cette manière, sur la courbe précédente, on trouve une seconde branche Amx, et elle prend la forme tracée sur la figure.

La spirale que je viens de considérer, et qui porte le nom de *spirale d'Archimède*, n'est qu'un cas particulier des courbes que représente l'équation $u = at^n$, n désignant un exposant quelconque.

Tant que n est un nombre positif, les spirales données par l'équation $u = at^n$, prennent leur origine au point A; mais quand n est négatif, u, d'abord infini, lorsque $t = 0$, diminue à mesure que cet arc augmente, et à chaque nouvelle révolution, le point décrivant s'approche du point A sans pouvoir jamais y atteindre.

Lorsque $n = -1$, la courbe, dont l'équation est alors $u = at^{-1}$, ou $ut = a$, et qui se nomme *spirale hyperbolique*, a en outre une asymptote droite. En effet, si l'on pose successivement

$$t = 1, \quad = \tfrac{1}{2}, \quad = \tfrac{1}{3}, \quad = \tfrac{1}{4}, \text{ etc.},$$

les valeurs correspondantes

$$u = a, \quad = 2a, \quad = 3a, \quad = 4a, \text{ etc.},$$

montrent que la spirale, s'éloignant de plus en plus du point A, s'approche en même temps d'une droite DE, *fig.* 31, menée parallèlement à l'axe AO, à une distance $AD = a$; car, PM perpendiculaire sur AB, ayant pour expression FIG. 31.

$$u \sin MAP = u \sin t = a \frac{\sin t}{t},$$

quand on y met pour u sa valeur at^{-1}, a pour limite a, lorsque $t = 0$: la spirale hyperbolique a donc aussi pour limite la droite DE.

Les valeurs négatives de t produisent une seconde branche, placée sur le prolongement AB' du rayon AO, et ayant pour asymptote DE', prolongement de DE. Enfin, si l'on donnait à la constante a le signe —, on répéterait au-dessous de BB' la courbe que je viens d'indiquer au-dessus.

Si, au lieu de la distance AM, *fig.* 29, on prenait pour FIG. 29.
u la partie MN du rayon vecteur, comprise entre le point M et la circonférence du cercle OGO, l'équation

$u^2 = at$ serait celle de la *spirale parabolique*, ou de la courbe qu'on formerait en roulant l'axe d'une parabole autour du cercle OGO; les ordonnées se trouveraient alors perpendiculaires à la circonférence de ce cercle, et tomberaient sur ses rayons.

118. Lorsqu'on rapporte les courbes à des coordonnées polaires, le changement du rayon vecteur AM, fig. 32, est la partie QM' retranchée du rayon vecteur suivant, par l'arc de cercle MQ décrit du point A comme centre, avec le rayon AM; et l'accroissement de l'angle MAO se mesure par un arc de cercle NN', décrit d'un rayon AN égal à l'unité. On voit, comme dans le n° 60, que la différentielle première de AM est le premier terme du développement de $M'Q$, suivant les puissances de NN'; et quand on passe aux limites, on regarde le petit arc MQ comme une ligne droite (74), et le triangle MQM' comme rectiligne rectangle, ce qui donne.... $MM' = \sqrt{\overline{QM}^2 + \overline{QM'}^2}$. Alors QM' étant du, et NN', dt, il vient $QM = u\,dt$, puis $MM' = \sqrt{du^2 + u^2 dt^2}$, pour la différentielle de l'arc DM.

FIG. 32.

119. Si l'on mène AS parallèle à la corde du petit arc de cercle QM, et qu'on prolonge jusqu'à la rencontre de cette droite, la corde de l'arc MM' de la courbe DM, on aura, par la similitude des triangles $M'QM$ et $M'AS$,

$$\frac{QM'}{\overline{QM}} = \frac{AM'}{AS}.$$

Lorsqu'on passe aux limites, la corde QM peut être prise pour l'arc, l'angle $M'QM$ pouvant approcher aussi près qu'on voudra d'un droit, le triangle $M'AS$ approche de même du triangle MAT rectangle en A, dans lequel AT est la limite de AS, et qui donne

$$\frac{du}{udt} = \frac{u}{AT},$$

d'où l'on conclut

$$AT = \frac{u^2 dt}{du}.$$

On construira la tangente, en menant par le point A une perpendiculaire au rayon vecteur AM, et en portant sur cette droite la valeur de AT, donnée par la formule ci-dessus.

Si l'on applique cette formule à l'équation $u = at^n$, on trouvera

$$AT = \frac{u^2}{nat^{n-1}} = \frac{a}{n} t^{n+1}.$$

Dans la spirale d'Archimède, on a $n = 1$ et $a = \frac{1}{2\pi}$; il en résulte $AT = \frac{t^2}{2\pi}$, *fig.* 29. On voit par cette expression FIG. 29. que lorsque $t = 2\pi$, ou après une révolution du point décrivant, la soutangente est égale à la circonférence OGO rectifiée. Après m révolutions, $t = 2m\pi$..... $AT = 2m^2\pi$ ou m fois la circonférence dont le rayon est $m.AO$, et qui embrasse ces m révolutions: c'est ce qu'a trouvé Archimède.

Quand $n = -1$, ce qui est le cas de la spirale hyperbolique, on a $AT = -a$, c'est-à-dire, que la soutangente de cette courbe est constante.

Je ne m'arrête point à la recherche de la sounormale et de la normale, parce qu'on les obtient facilement lorsque la soutangente est connue.

J'observerai seulement que $\frac{AT}{AM} = \frac{udt}{du}$, exprime la tangente de l'angle que fait avec le rayon vecteur AM,

la droite MT qui touche la courbe au point M, et qu'on a

$$MT = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{AT}^2} = u\sqrt{1 + \frac{u^2 dt^2}{du^2}}.$$

FIG. 32. 120. L'accroissement de l'aire ADM, *fig.* 32, prise relativement aux coordonnées polaires, n'est pas un trapèze, comme dans le cas des ordonnées parallèles, mais un secteur AMM'. La limite du rapport de ce secteur avec l'arc NN', sera la même que celle des rapports que les secteurs AMQ, $AM'R$, entre lesquels il se trouve compris et qui tendent vers l'égalité, ont avec le même arc NN'; on conclura donc de là que l'aire ADM étant représentée par s, son coefficient différentiel doit être

$$\frac{ds}{dt} = \frac{AM \times MQ}{2NN'} = \frac{u^2}{2}, \quad \text{ou} \quad ds = \frac{u^2 dt}{2}.$$

121. La différentielle seconde d^2u, sera le premier terme du développement $M''Q' - M'Q$, suivant les puissances de NN' (60); et il faut observer que lorsqu'on suppose l'arc NN' constant, ou qu'on fait toujours varier l'angle t de la même quantité, les arcs QM, $Q'M'$, ne sont pas pour cela égaux entre eux, car ils sont de rayons différens.

On pourrait déduire de là les expressions relatives au centre de courbure et à la développée, mais j'ai préféré d'appliquer aux courbes qui sont rapportées à des coordonnées polaires, les expressions trouvées relativement aux coordonnées rectangles, parce que cette marche fournit l'occasion de transformer les coordonnées du premier système dans celles du second, ou bien de passer de celui-ci à l'autre. Cela sera d'autant plus utile, qu'on rapporte quelquefois les courbes algébriques à des coordonnées polaires; on le fait sur-

tout à l'égard des courbes du second degré, en prenant leur foyer pour pôle.

122. Je placerai au point A, *fig.* 33, pour plus de simplicité, l'origine des coordonnées rectangles FIG. 33.

$$AP = x, \qquad PM = y;$$

et pour fixer la position de l'axe AB des abscisses, je désignerai par m l'arc QO compris entre cet axe et le point O, origine de l'arc t. En menant PM perpendiculaire sur AB, et en observant que l'angle MAP est mesuré par l'arc NQ, égal à $t - m$, on trouvera

$$\overline{AM}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PM}^2,$$
$$AP = AM \cos NQ,$$
$$PM = AM \sin NQ,$$

ou

$$u = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (a),$$
$$x = u \cos (t - m) \qquad (b),$$
$$y = u \sin (t - m) \qquad (c).$$

Au moyen des deux dernières valeurs, on changera toute équation algébrique entre x et y, dans une autre qui ne contiendra plus que le sinus, le cosinus de l'arc t, et le rayon vecteur u. On en déduit aussi

$$\cos (t - m) = \frac{x}{u}, \qquad \sin (t - m) = \frac{y}{u},$$

d'où l'on tirera des valeurs de $\cos t$ et de $\sin t$ en x, y, u, $\sin m$ et $\cos m$, qui, substituées dans une équation quelconque entre u, $\sin t$ et $\cos t$, conduiront à un résultat ne renfermant plus que x et y, puisqu'on pourra remplacer u par $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Il est bon d'observer que

$$\text{tang } (t - m) = \frac{x}{y},$$

et que par conséquent

$$t - m = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right).$$

Si, pour abréger, on suppose que la ligne AB se confonde avec la ligne AO, on aura seulement

$$\cos t = \frac{x}{u}, \quad \sin t = \frac{y}{u}, \quad \text{d'où} \quad \text{tang } t = \frac{y}{x}.$$

Lorsque l'équation en u et t, qu'on se propose de transformer, contient l'arc t lui-même, il n'est plus possible d'obtenir une relation algébrique entre x et y, puisqu'on n'en a pas de semblable entre l'arc t, son sinus et son cosinus; mais on parvient, ainsi qu'on va le voir, à une équation différentielle qui ne contient plus que x, y, dx et dy.

Les équations (b) et (c), étant jointes à celles de la courbe, établissent entre les quatre variables x, y, u et t, des relations telles, que trois de ces variables sont des fonctions de la quatrième; on peut donc différentier les équations (a), (b) et (c), en y regardant, t, u et y comme des fonctions de x (46), et l'on aura ainsi

$$du = d.\sqrt{x^2 + y^2},$$
$$dx = du\cos(t - m) - udt\sin(t - m),$$
$$dy = du\sin(t - m) + udt\cos(t - m).$$

Si l'on élimine du des deux dernières équations, il viendra

$$dt = \frac{dy\cos(t - m) - dx\sin(t - m)}{u};$$

mettant pour $\cos(t - m)$, $\sin(t - m)$ et u, leurs valeurs, on aura

$$dt = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \text{ (*)}.$$

(*) On rencontre souvent l'expression du secteur ds (120) en

On pourra donc chasser de l'équation en u et t, et de sa différentielle, les quantités a, $\cos t$, $\sin t$, du et dt; les deux résultats qu'on obtiendra ne contenant plus que t, on le fera disparaître par l'élimination.

Soit pour exemple l'équation $u = at^n$, qui donne

$$u^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}t, \qquad \frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}du = a^{\frac{1}{n}}dt;$$

les expressions de u, de du et de dt, étant indépendantes de l'angle m, il viendra, en les substituant et en réduisant au même dénominateur,

$$\frac{1}{n}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2n}}(xdx+ydy) = a^{\frac{1}{n}}(xdy-ydx).$$

Avec cette équation on déterminerait les soutangentes, les tangentes, etc., des spirales, en faisant usage des formules du n° 66; mais puisque c'est en u et t que sont exprimées d'abord les équations de ces courbes, il sera plus simple et en même temps plus général, de transformer relativement aux mêmes variables, les formules citées, et c'est ce que je vais faire.

123. Pour obtenir ces formules, on a regardé y comme lié immédiatement à la variable x, par l'équation proposée en x et y; mais maintenant que la courbe est donnée par une équation entre les coordonnées polaires u et t, c'est l'une de ces variables qui est indépendante, et dont l'accroissement doit être supposé constant. Soit donc $u = f(t)$; sous ce point de vue, x et y sont

coordonnées rectangles, et il est par conséquent utile de la remarquer. Elle s'obtient, en mettant pour dt et pour u^2 leurs valeurs trouvées ci-dessus; il vient alors

$$ds = \frac{xdy-ydx}{2}.$$

des fonctions de t, déterminées par les équations

$$x = u\cos(t - m), \qquad y = u\sin(t - m) \quad (122);$$

et, au moyen de la dernière remarque du n° 9, on peut exprimer aisément les coefficiens différentiels de y relatifs à x, par ceux de u relatifs à t.

Pour cela, commençons par mettre les premiers en évidence, en posant

$$dy = p\,dx, \qquad d^2y = q\,dx^2,$$

alors, x, y et p étant considérés d'abord comme les fonctions de t, on aura, par le n° cité,

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}; \qquad q = \frac{dp}{dx} = \frac{\frac{dp}{dt}}{\frac{dx}{dt}},$$

ce qui revient à

$$p = \frac{dy}{dx}, \qquad q = \frac{dp}{dx},$$

pourvu qu'on entende à présent, par dx, dy et dp, des différentielles rapportées à la variable t considérée comme indépendante (*).

En effectuant dans cette hypothèse la différentiation de p, on obtient

$$q = \frac{dp}{dx} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}.$$

(*) On peut encore parvenir au même résultat, en regardant y comme fonction de x, et x comme fonction de t; sous ce dernier point de vue, on aura (9),

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}, \quad \text{d'où} \quad p = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},$$

comme ci-dessus.

Avec ces formules, on peut maintenant transformer les expressions de la soutangente, de la tangente, etc., et celles qui se rapportent au centre de courbure, pourvu qu'on y ait introduit, au lieu de dy et de d^2y, les coefficiens différentiels p et q, pour lesquels on substituera ensuite les valeurs ci-dessus.

124. On voit d'abord par la valeur de p, que l'expression de la soutangente, comme toutes celles où il n'entre que des différentielles du premier ordre, ne doit pas changer, et que

$$PT = \frac{y}{p} \text{ (66)}, \quad \text{demeure } \frac{y\,dx}{dy}, \text{ ou } -\frac{y\,dx}{dy},$$

si l'on a égard au signe (68). En mettant pour y, dx et dy leurs valeurs (122), il vient

$$PT = -u\sin(t-m)\,\frac{du\cos(t-m) - udt\sin(t-m)}{du\sin(t-m) + udt\cos(t-m)}.$$

On simplifiera beaucoup ce résultat, en observant que la situation de la ligne des abscisses sur laquelle tombe la distance PT, est arbitraire, et qu'on peut par conséquent prendre toujours m tel que l'arc QN soit 1^g, auquel cas l'ordonnée PM se confond avec le rayon vecteur AM, $\cos(t-m) = 0$, $\sin(t-m) = 1$, et PT se change en $AT' = \frac{u^2 dt}{du}$.

125. Si, dans la différentielle

$$dz = \sqrt{dx^2 + dy^2} \text{ (64)},$$

de l'arc d'une courbe quelconque, rapportée à des coordonnées rectangles, on substitue pour dx et dy leurs valeurs en coordonnées polaires, on aura

$$dz = \sqrt{du^2 + u^2 dt^2},$$

expression trouvée pour MM', dans le n° 118.

126. Je passe à la recherche du rayon de courbure. La formule

$$\gamma = -\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y} \quad \text{devient} \quad \gamma = -\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q},$$

lorsqu'on y remplace p par $p\,dx$ et $q\,dx^2$, les différentielles dy et d^2y encore relatives à la variable x; mettant ensuite pour p et q leurs valeurs en différentielles relatives à t, on obtient

$$\gamma = -\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Maintenant, si l'on fait varier dx, dy et du, comme des fonctions de t, dans les valeurs de dx et dy (122), elles conduisent à

$$d^2x = d^2u\cos(t-m) - 2du\,dt\sin(t-m) - u\,dt^2\cos(t-m),$$
$$d^2y = d^2u\sin(t-m) + 2du\,dt\cos(t-m) - u\,dt^2\sin(t-m);$$

posant ensuite $t-m=1^q$, comme dans le n° 124, et par la même raison, il viendra

$$dx = -u\,dt, \qquad dy = du,$$
$$d^2x = -2du\,dt, \quad d^2y = d^2u - u\,dt^2,$$

valeurs avec lesquelles on trouvera

$$\gamma = \frac{(du^2+u^2dt^2)^{\frac{3}{2}}}{u\,dt\,d^2u - u^2dt^2 - 2du^2dt}.$$

127. On a coutume, lorsqu'on fait usage des coordonnées polaires, de déterminer la position du centre du cercle osculateur par celle de la normale et par la distance ME, comprise entre le point M et le pied de la perpendiculaire EF, abaissée du centre F du cercle osculateur sur la droite AM, ce qui donne quelquefois de l'élégance à la construction du rayon de courbure.

La ligne AM étant prise pour l'axe des ordonnées y,

la partie AE représente l'ordonnée β de la développée (81); et par conséquent

$$ME = AM - AE = y - \beta = -\frac{dx^2 + dy^2}{d^2y},$$

expression qui devient

$$ME = -\frac{1+p^2}{q},$$

lorsqu'on substitue pdx et qdx^2, aux différentielles dy et d^2y, relatives à la variable x. Si l'on y met ensuite pour p et q leurs valeurs en différentielles relatives à t, on a

$$ME = -\frac{dx(dx^2+dy^2)}{dxd^2y - dyd^2x} = -\frac{u(du^2+u^2dt^2)}{ud^2u - u^2dt^2 - 2du^2},$$

quand on remplace dx, dy, d^2x, d^2y, par les valeurs obtenues dans le n° précédent.

128. Pour faire une application de ces formules, je prends la *spirale logarithmique* dont l'équation est $t = lu$ (*). En différentiant, il vient

$$dt = M\frac{du}{u}\,(28), \quad \text{ou} \quad \frac{udt}{du} = M,$$

ce qui montre (119) que dans tous les points de cette courbe, la tangente fait le même angle avec le rayon vecteur.

Une seconde différentiation, effectuée sur l'équation

(*) Quand, dans cette équation, on fait $t = 0$, il vient $u = 1$; ainsi la courbe passe par le point O, *fig.* 34; ensuite les valeurs de u, croissant avec celles de t, montrent que la courbe fait une infinité de révolutions en dehors du cercle ONG. Les révolutions intérieures sont produites par les valeurs négatives de t, qui donnent pour u des valeurs de plus en plus petites; la courbe s'approche donc de plus en plus du pôle A, sans jamais y arriver. FIG. 34.

$$dt = \frac{M du}{u}$$

en y supposant dt constant, donne

$$u d^2u - du^2 = 0, \quad \text{d'où} \quad d^2u = \frac{du^2}{u};$$

et si l'on substitue dans les expressions de γ ou MF et de ME, cette valeur de d^2u, puis celle de dt en du, on aura

$$MF = -\frac{u\sqrt{1+M^2}}{M}, \quad ME = u = AM.$$

FIG. 35. Il suit de là que la droite AF, *fig.* 35, menée perpendiculairement au rayon vecteur AM, rencontrera la normale MF au centre du cercle osculateur, ou sur le point correspondant de la développée FZ.

Cette développée sera une spirale semblable à la proposée; car l'angle AFM étant égal à TMA, sera le même pour tous les points de la courbe FZ, comme pour ceux de la courbe AX.

On obtient l'équation de la développée, en observant que

$$AF = \sqrt{\overline{MF}^2 - \overline{ME}^2} = \frac{u}{M};$$

car si l'on fait $\frac{u}{M} = u'$, d'où $u = Mu'$, on aura... $lu = lM + lu'$, et par conséquent $t = lM + lu'$, ce qui revient à $t' = lu'$, lorsqu'on pose $t - lM = t'$; mais il faut observer que $t = ON = ONP - 1^g$.

Du changement de la variable indépendante, ou comment on change la différentielle qu'on a prise pour constante, en une autre qui ne le soit plus.

129. La transformation employée dans les n°s 123 et 126, pour la détermination du cercle osculateur des

courbes à coordonnées polaires, et qui consiste à changer une expression différentielle prise en regardant y comme une fonction de x, en une autre où x et y soient toutes deux envisagées comme des fonctions d'une troisième variable t, que l'on suppose indépendante, étant souvent utile, il est à propos de la reprendre pour l'étendre à des expressions différentielles quelconques.

Le coefficient $p = \frac{dy}{dx}$ revient alors à

$$p = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx} \quad (123),$$

où l'on doit regarder aussi dy et dx comme des fonctions de t, et les différentier en conséquence, ce qui donnera

$$dp = d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^2};$$

faisant ensuite $dp = q dx$, on trouvera

$$q = \frac{1}{dx} d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3}.$$

En poursuivant de la même manière, on aura

$$dq = d\left[\frac{1}{dx} d\left(\frac{dy}{dx}\right)\right] = d\left(\frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3}\right)$$
$$= \frac{dx^2 d^3y - 3dx d^2x d^2y + 3dy d^2x^2 - dx dy d^3x}{dx^4};$$

et posant $dq = r dx$, on obtiendra

$$r = \frac{dx^2 d^3y - 3dx d^2x d^2y + 3dy d^2x^2 - dx dy d^3x}{dx^5}.$$

C'est ainsi que les quantités p, q, r, etc., qui sont

implicitement des fonctions de x, s'expriment au moyen de dx, dy, d^2x, etc., regardées comme des fonctions de t; et en substituant ces valeurs dans quelque formule que ce soit, ramenée à ne contenir que les coefficiens différentiels p, q, r, etc., on la transformera sous le point de vue général proposé.

130. Les expressions de q, r, etc., sont indéterminées, tant qu'on n'assigne aucune relation entre les variables x, y et t; mais l'effet de cette relation établit une dépendance entre d^2x et d^2y, puisque t pouvant aussi être envisagé comme une fonction de x et de y, dt en est pareillement une de ces variables et de leurs différentielles, et la supposition de dt constant emporte l'équation $d^2t = 0$.

Il n'est pas même nécessaire, pour obtenir cette dernière, de connaître la relation primitive entre x, y et la variable t qu'on veut regarder comme indépendante; il suffit d'avoir l'expression de dt.

Si l'on prenait, par exemple, pour cette variable l'arc de la courbe proposée, on aurait alors (64)

$$dt = \sqrt{dx^2 + dy^2};$$

et en différentiant dx et dy comme des fonctions de t, l'équation $d^2t = 0$ conduirait à

$$dx\,d^2x + dy\,d^2y = 0, \text{ d'où } d^2x = -\frac{dy\,d^2y}{dx};$$

chassant, à l'aide de cette valeur et de ses différentielles, les différentielles d^2x, d^3x, etc., des expressions de q, r, etc., on aurait les formes que prennent ces coefficiens différentiels lorsqu'on fait varier x et y, en conséquence du changement de l'arc t, ou lorsqu'on regarde cet arc comme la variable indépendante, ou enfin lorsqu'on prend sa différentielle pour constante.

Soit pour exemple l'expression

$$\gamma = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} \quad (126);$$

en mettant pour d^2x sa valeur, on obtiendra

$$\gamma = -\frac{dx(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}{d^2y} = -\frac{dx\,dt}{d^2y}$$

résultat qui ne contiendra plus que les variables y et t, quand on y mettra pour dx sa valeur $\sqrt{dt^2 - dy^2}$.

On peut aussi faire à volonté

$$dt = dx, \quad \text{ou} \quad dt = dy,$$

d'où il résulte

$$d^2x = 0, \quad \text{ou} \quad d^2y = 0;$$

et par le moyen de ces hypothèses, on prend alternativement x et y pour variable indépendante, c'est-à-dire que l'on regarde y comme fonction de x, ou x comme fonction de y. Dans le premier cas

$$q = \frac{d^2y}{dx^2}, \text{ et dans le second, } q = -\frac{dy\,d^2x}{dx^3}.$$

Si l'on met cette dernière valeur dans l'expression

$$\gamma = -\frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} \quad (126),$$

on la transformera immédiatement en celle qui convient au cas où l'on regarde x comme fonction de y, et qui est

$$\gamma = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dy\,d^2x}.$$

131. On peut aussi ramener à dépendre immédiatement de x, les différentielles d'une fonction y formées en prenant pour variable indépendante une fonction t,

donnée en x et y. Pour cela, il suffit d'observer qu'en regardant celles-ci comme des fonctions de t, ainsi que les coefficiens différentiels p, q, etc., on a encore, par le n° 123, les équations

$$dy = p\,dx, \quad dp = q\,dx, \quad dq = r\,dx, \text{ etc.};$$

et sous ce point de vue,

$$dy = p\,dx,$$

conduit, par la différentiation, aux équations

$$\begin{aligned} d^2y &= dp\,dx + p\,d^2x \\ &= q\,dx^2 + p\,d^2x, \\ d^3y &= dq\,dx^2 + 2q\,dx\,d^2x + dp\,d^2x + p\,d^3x \\ &= r\,dx^3 + 3q\,dx\,d^2x + p\,d^3x, \end{aligned}$$

etc.,

auxquelles joignant

$$d^2t = 0, \quad d^3t = 0, \text{ etc.},$$

qui donneront les relations des différentielles d^2x, d^3x, etc., avec d^2y, d^3y, etc., on aura tout ce qu'il faut pour chasser les unes et les autres de l'expression différentielle proposée, en sorte qu'il ne restera plus que les coefficiens différentiels p, q, r, etc., où y est supposé fonction immédiate de x.

Si l'on prend, comme ci-dessus,

$$dt = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad \text{d'où} \quad dx\,d^2x + dy\,d^2y = 0,$$

il viendra

$$d^2x = -\frac{dy\,d^2y}{dx} = -p\,d^2y, \quad d^2y = q\,dx^2 - p^2d^2y,$$

et par conséquent

$$d^2y = \frac{q\,dx^2}{1+p^2}, \quad d^2x = -\frac{pq\,dx^2}{1+p^2}.$$

La première de ces valeurs, mise dans

$$\gamma = -\frac{dx\,dt}{d^2y} = -\frac{dx\sqrt{dx^2+dy^2}}{d^2y} = -\frac{dx^2\sqrt{1+p^2}}{d^2y},$$

redonne l'expression

$$\gamma = -\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q},$$

de laquelle on est parti dans le n° 126.

132. Le changement de variable indépendante a aussi une interprétation géométrique. En effet, il est visible que pour particulariser le polygone $MM'M''$ etc., *fig.* 2, qu'on se propose d'inscrire dans une courbe quelconque CM, il faut établir une loi dans la succession des angles de ce polygone. J'ai d'abord pris les différences d'abscisses PP', $P'P''$, etc., égales entre elles; mais on peut remplacer cette loi par toute autre, supposer, par exemple, que les côtés MM', $M'M''$, etc., soient égaux. FIG. 2.

Ces divers modes cependant ne portent que sur les signes, et ne sont qu'une manière particulière d'écrire les coefficiens différentiels; car que y varie à cause du changement que subit spontanément x, ou à cause de celui que subit une autre variable t, de laquelle x dépend, tout cela revient au même pour les limites qui sont indépendantes des valeurs des accroissemens; aussi lorsqu'on différentie une équation entre x et y, en faisant varier à la fois dx et dy, on peut transformer ensuite les résultats en coefficiens différentiels au moyen des formules du n° 129, parce qu'en mettant les valeurs des différentielles de l'une des variables, toutes celles de l'autre disparaissent d'elles-mêmes: on parvient au même résultat final que si l'on avait supposé constante une des différentielles premières, et l'on est conduit à

des formules plus élégantes, parce que les deux variables y sont traitées symétriquement (*).

133. D'après ce qu'on vient de voir, on pourra toujours différentier le système de deux équations contenant trois variables, système duquel il résulte que deux quelconques de ces variables sont des fonctions déterminées de la troisième. Si $U=0$ et $V=0$ désignent deux équations entre x, y et z, on en prendra les différentielles successives, en faisant varier en même temps celles des deux indéterminées que l'on regarde comme des fonctions de la troisième.

Si l'on avait trois équations $U=0$, $V=0$ et $W=0$, entre quatre variables t, x, y, z, trois de ces variables, nécessairement déterminées par la quatrième, seraient des fonctions de celle-ci, et leurs différentielles devraient varier.

En général, un nombre m d'équations entre $m+1$ variables, déterminant m de ces variables au moyen de celle qui reste, ne doit être regardé que comme contenant des fonctions de cette variable; il faut donc, dans les différentiations successives de ces équations, faire varier les différentielles des indéterminées qui représentent des fonctions de la variable que l'on considère comme indépendante, et dont on prend la différentielle pour constante.

134. Lorsqu'on a des équations de cette nature, on peut toujours en tirer une résultante unique, entre deux quelconques des variables, par un procédé que je vais

(*) On trouvera, sur ce sujet, dans le premier chapitre du *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*, des détails assez importans et qui n'avaient encore été donnés par personne, que je sache, avant la publication de cet Ouvrage.

exposer sur deux équations à trois variables, et qu'il sera facile d'étendre ensuite autant qu'on le voudra.

Soient $U=0$, $V=0$, ces équations, l'une de l'ordre m et l'autre de l'ordre n, entre les variables t, x, y et leurs différentielles, et dont on veuille éliminer t; la première pourra contenir, outre la variable t, les différentielles dt, d^2t, ... d^mt, et la seconde dt, d^2t, ... d^nt. Comme on n'a point les équations primitives, ni toutes les différentielles des ordres inférieurs à ceux des proposées, il faut nécessairement se procurer de nouvelles équations pour chasser les quantités inconnues dt, d^2t, etc.; et c'est ce qu'on fera en différentiant n fois l'équation $U=0$, et m fois l'équation $V=0$. On obtiendra par ce moyen $n+m$ équations nouvelles; et on en aura en tout un nombre $m+n+2$, en comptant les deux proposées : les inconnues à éliminer, savoir, dt, d^2t, ... d^mt, ... $d^{m+n}t$, étant au nombre de $m+n+1$, il restera donc une équation finale, en x, y et leurs différentielles.

Si dt était constant, il semblerait qu'en différentiant une seule fois l'une des équations proposées, on pourrait éliminer t et dt, puisqu'on aurait alors trois équations; mais on doit observer que les différentielles d^2x, d^2y, contiennent implicitement t, puisqu'alors on a regardé x et y comme des fonctions de cette variable (133); il faut donc prendre pour constante la différentielle de l'une des variables que l'on veut conserver.

De la différentiation des équations contenant plus d'une variable indépendante.

135. Lorsque l'on n'a qu'une seule équation entre trois variables, il faut d'abord fixer arbitrairement les valeurs de deux quelconques de ces variables pour dé-

terminer la troisième, qui par conséquent est une fonction des deux premières. Si l'on a, par exemple, l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

on ne pourra obtenir z, sans avoir préalablement assigné des valeurs à x et à y; mais il convient d'observer que les quantités x et y n'étant liées entre elles par aucune relation, la seconde peut demeurer la même, quoique la première ait changé, et réciproquement.

Il résulte de là que la valeur de z peut varier de plusieurs manières, 1°. en conséquence d'un changement arrivé à x ou à y seul; 2°. par le concours de ces deux circonstances. Dans le premier cas, la quantité y, ou la quantité x, étant regardée comme constante, l'équation proposée revient au fond à une équation à deux variables; ainsi lorsque x change seul, on a

$$x\mathrm{d}x + z\mathrm{d}z = 0, \quad \text{ou} \quad x + z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0,$$

et lorsque c'est y, il vient

$$y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z = 0, \quad \text{ou} \quad y + z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = 0.$$

On a donc successivement

$$\mathrm{d}z = -\frac{x\mathrm{d}x}{z}, \qquad \mathrm{d}z = -\frac{y\mathrm{d}y}{z};$$

mais il faut observer que la première de ces différentielles est relative à la variabilité particulière de x, et la seconde à celle de y; c'est ce qu'on exprime en disant que l'une est la *différentielle partielle* relative à x, et l'autre la *différentielle partielle* relative à y (43).

Le sens de la question suffit pour empêcher qu'on ne les confonde; et on les distingue d'ailleurs suffisamment

en faisant attention à la différentielle de la variable indépendante qui les affecte.

Les coefficiens différentiels sont

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}, \qquad \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z}.$$

136. En général, soit $u = 0$ une équation renfermant x, y et z; si l'on regarde x et y comme les deux variables indépendantes, z sera une fonction de l'une et de l'autre, et lorsque x recevra un accroissement quelconque, y étant supposé constant, z éprouvera un changement subordonné à celui de x. Dans cette hypothèse, l'équation $u = 0$ devra être envisagée comme une équation entre deux variables x et z; on aura donc (48)

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx} = 0,$$

et de là on tirera le coefficient différentiel de z relatif à la variable de x. Il faut se rappeler ici, d'après la distinction qui a été faite n° 135, que dans $\frac{dz}{dx}$, dz n'est que la différentielle partielle de z, prise par rapport au changement de x seul.

Il est évident que si l'on eût fait varier y on aurait eu, en différentiant l'équation proposée comme ne contenant que les variables y et z,

$$\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy} = 0.$$

Si l'on multiplie par dx la première des équations trouvées ci-dessus, et la seconde par dy, et qu'on les ajoute ensuite, il viendra

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}\left(\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy\right) = 0;$$

mais $\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy$ n'est autre chose que la différentielle totale de z (41) : on aura donc

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz = 0,$$

c'est-à-dire, qu'on pourra égaler à zéro la différentielle première de l'équation $u = 0$, prise par rapport aux trois variables x, y et z. Il ne faut cependant pas perdre de vue que cette différentielle doit être regardée comme équivalente à deux équations; car, lorsqu'on y aura substitué pour dz sa valeur $\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy$, l'indépendance des accroissemens dx et dy, exigera que les deux quantités qui les multiplient soient séparément égales à zéro.

137. On parviendra aux équations qui donnent les coefficiens des ordres supérieurs, en différentiant les équations

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx} = 0 \quad (X),$$

$$\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy} = 0 \quad (Y).$$

En n'ayant d'abord égard qu'au changement de x, non-seulement z variera, mais en même temps le coefficient du premier ordre $\frac{dz}{dx}$ donnera naissance au coefficient du second ordre $\frac{d^2z}{dx^2}$. En différentiant donc l'équation (X) par rapport à x, on aura, comme pour les équations à deux variables,

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{d^2u}{dxdz}\frac{dz}{dx} + \frac{d^2u}{dz^2}\frac{dz^2}{dx^2} + \frac{du}{dz}\frac{d^2z}{dx^2} = 0 \quad (XX).$$

Si l'on différentie (X), par rapport à y et à z, ou (Y), par rapport à x et à z, en observant que, dans le premier cas, $\frac{dz}{dx}$ donne $\frac{d^2z}{dydx}$, et dans le second, $\frac{dz}{dy}$ donne... $\frac{d^2z}{dxdy} = \frac{d^2z}{dydx}$, on aura un résultat unique, qui sera

$$\frac{d^2u}{dxdy} + \frac{d^2u}{dzdy}\frac{dz}{dx} + \frac{d^2u}{dzdx}\frac{dz}{dy} + \frac{d^2u}{dz^2}\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{d^2z}{dxdy} = 0 \quad (XY).$$

Enfin l'équation (Y), différentiée, en regardant y et z comme seules variables, produira

$$\frac{d^2u}{dy^2} + 2\frac{d^2u}{dydz}\frac{dz}{dy} + \frac{d^2u}{dz^2}\frac{dz^2}{dy^2} + \frac{du}{dz}\frac{d^2z}{dy^2} = 0 \quad (YY).$$

Les coefficiens différentiels de la fonction z n'étant qu'au nombre de trois pour le second ordre, seront donc déterminés par les trois équations que nous venons d'obtenir.

Il faut observer que si l'on multiplie l'équation (XX) par dx^2, l'équation (XY) par $2dxdy$, l'équation (YY) par dy^2, et qu'on ajoute les produits, en remplaçant les termes

$$\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy \text{ par } dz \quad (41),$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2z}{dxdy}dxdy + \frac{d^2z}{dy^2}dy^2 \text{ par } d^2z \quad (44),$$

on formera la même équation finale que celle qu'on aurait obtenue si l'on avait différentié l'équation

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz = 0,$$

en y faisant varier à la fois les quantités x, y, z et

dz, et en y regardant dx et dy comme constans, ce qui donnerait la différentielle seconde totale de u, dans l'hypothèse de z fonction de x et de y.

138. On étendra sans peine ces considérations à tel ordre de différentiation, ou à tel nombre de variables qu'on voudra; car tout se réduit à déterminer celles qui sont indépendantes, ce qu'on ne peut faire que par la nature de la question qui a conduit à l'équation ou aux équations proposées; et ensuite on différentiera, par rapport à chacune de ces variables en particulier, en traitant les autres comme des fonctions de celles-ci.

Si, par exemple, on avait les deux équations

$$u = 0, \qquad v = 0,$$

entre les cinq variables s, t, x, y et z, on verrait que trois de ces variables sont indépendantes. Supposant donc que y et z soient les deux variables subordonnées, ou des fonctions de s, t, x, données par les équations proposées, on différentiera successivement u et v par rapport à s, par rapport à t, par rapport à x, et l'on aura,

$$\frac{du}{ds} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{ds} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{ds} = 0,$$
$$\frac{du}{dt} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dt} = 0,$$
$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx} = 0.$$

Si l'on multiplie respectivement ces équations par ds, dt, dx, qu'on les ajoute et qu'on mette dy au lieu de

$$\frac{dy}{ds}ds + \frac{dy}{dt}dt + \frac{dy}{dx}dx,$$

dz au lieu de

$$\frac{dz}{ds}\,ds+\frac{dz}{dt}\,dt+\frac{dz}{dx},$$

il viendra

$$\frac{du}{ds}\,ds+\frac{du}{dt}\,dt+\frac{du}{dx}\,dx+\frac{du}{dy}\,dy+\frac{du}{dz}\,dz=du=0.$$

On tirera un résultat semblable de l'équation $v=0$; et il s'ensuit, qu'en différentiant les équations $u=0$ et $v=0$, par rapport à toutes les variables s, t, x, y et z, et en y substituant au lieu de dy et de dz, les expressions de ces différentielles, considérées comme appartenant à des fonctions de trois variables (45), il faudra égaler séparément à zéro le coefficient de la différentielle de chaque variable indépendante.

En regardant les coefficiens différentiels eux-mêmes comme de nouvelles fonctions des variables indépendantes, on ne saurait être arrêté dans la recherche des différentielles ultérieures; ainsi, après quelques remarques sur l'élimination des constantes et des fonctions, je terminerai ce qui regarde la formation des équations différentielles.

139. L'équation $u=0$, entre x, y et z, ayant deux différentielles premières, il est évident qu'on peut éliminer deux constantes entre ces trois équations, et le résultat exprimera la relation des variables x, y, z, et des coefficiens différentiels $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, indépendamment des quantités éliminées.

Si l'on joint aux équations précédentes les trois du second ordre, on aura six équations, entre lesquelles on pourra éliminer cinq quantités, et ainsi de suite.

140. Ceci conduit à une remarque importante, c'est qu'on peut éliminer d'une équation à trois ou

à un plus grand nombre de variables, des fonctions dont la forme est absolument inconnue. Soit pour exemple l'équation $z = f(ax+by)$, dans laquelle la caractéristique f désigne une fonction dont la forme n'est déterminée en aucune manière; je vais en déduire une équation entre $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, indépendante de cette fonction, et qui conviendra également à $z = ax+by$, à $z = \sqrt{ax+by}$, à $z = \sin(ax+by)$, et en général à toutes les fonctions de la quantité $ax+by$, de quelque forme qu'elles soient. Je fais pour cela $ax+by = t$; l'équation proposée devient $z = f(t)$, et par conséquent on aura $dz = f'(t)dt$, en représentant $\frac{df(t)}{dt}$ par $f'(t)$; mais

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy,$$

$$dt = \frac{dt}{dx}dx + \frac{dt}{dy}dy,$$

d'où

$$\frac{dz}{dx} = f'(t)\frac{dt}{dx}, \quad \frac{dz}{dy} = f'(t)\frac{dt}{dy}.$$

Mettant donc pour $\frac{dt}{dx}$ et $\frac{dt}{dy}$ leurs valeurs a et b, puis éliminant $f'(t)$, il viendra

$$b\frac{dz}{dx} - a\frac{dz}{dy} = 0.$$

Cette équation exprime un caractère au moyen duquel on pourra reconnaître si une quantité proposée est une fonction de $ax+by$ ou non; car, d'après sa formation, elle doit être satisfaite ou devenir identique, toutes les fois qu'on y substituera, au lieu de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$,

les valeurs qui résulteraient de la différentiation d'une fonction de $ax+by$. Je suppose qu'on ignore l'origine du polynome $a^2x^2+2abxy+b^2y^2$; en l'égalant à z, et en différentiant on trouvera

$$\frac{dz}{dx}=2a^2x+2aby, \qquad \frac{dz}{dy}=2abx+2b^2y;$$

ces valeurs mises dans l'équation $b\frac{dz}{dx}-a\frac{dz}{dy}=0$, la rendent identique : on en conclura donc que le polynome représenté par z, est une fonction de $ax+by$, ce qui est d'ailleurs évident, puisque

$$a^2x^2+2abxy+b^2y^2=(ax+by)^2.$$

On voit en général que $u=0$ étant une équation entre x, y, z et une fonction quelconque représentée par $f(t)$, et dans laquelle on ne connaît que la composition de t en x, y et z, on pourra toujours éliminer $f(t)$ et $f'(t)$, à l'aide de cette équation et de ses différentielles relatives à x et à y (*).

En passant au second ordre, le nombre d'équations devenant plus grand, il est possible, dans beaucoup de cas, d'éliminer deux fonctions indéterminées; mais je n'entrerai point dans ces détails, non plus que dans ce qui regarde les équations qui renferment plus de trois variables.

(*) Quand $b=a$, $f(ax+by)$, devenant $f[a(x+y)]$, se réduit à une fonction du binome $x+y$, et l'équation $b\frac{dz}{dx}-a\frac{dz}{dy}=0$, se change en $\frac{dz}{dx}-\frac{dz}{dy}=0$, qui est l'expression de la propriété caractéristique employée à développer $f(x+y)$, dans le n° 19. On trouve dans le Traité in-4°, t. I, chap. II, d'autres exemples de l'application des équations différentielles partielles au développement des fonctions, et particulièrement la formule appelée le *théorème de Lagrange*.

Application du Calcul différentiel à la théorie des surfaces courbes.

141. Toute équation à trois variables représentant une surface, on prendra pour ordonnée de cette surface, la variable qui sera regardée comme déterminée par les deux autres. En désignant par x, y, z, ces trois variables que, dans tout ce qui va suivre, nous supposerons rapportées à trois axes perpendiculaires entre eux, nous prendrons z pour l'ordonnée, x et y pour les abscisses d'un point quelconque, en sorte que z sera une fonction de x et de y.

De même que les lignes sont engendrées par le mouvement du point, les surfaces le sont par celui des lignes. Par exemple, les cylindres et les cônes dont on s'occupe dans les Elémens de Géométrie, ne sont que des cas particuliers des deux familles de *surfaces engendrées par une ligne droite, se mouvant parallèlement à elle-même, ou assujettie à passer constamment par un point donné.* Pour diriger le mouvement de cette droite, rien n'empêche de substituer au cercle d'où résultent les cônes et les cylindres, une courbe quelconque et située comme on voudra dans l'espace; mais, et ceci est bien remarquable, on peut, par l'emploi des différentielles partielles, écarter ce qui tient à la forme de cette courbe, et exprimer en général le caractère commun de toutes les surfaces d'une même famille.

En effet, si nous supposons d'abord que toutes les droites génératrices doivent être parallèles entre elles, il faudra que, dans leurs équations,

$$y = ax + \alpha, \qquad z = bx + \beta \ (\textit{Trig.}\ 181),$$

les coefficiens a et b soient constans, et que les quantités α et β varient ensemble, de manière que l'une soit

fonction de l'autre; car la première étant donnée, le plan projetant de la droite génératrice, sur le plan des xy est donné, et son intersection avec la courbe qui dirige le mouvement de cette droite achève de la déterminer (*) : on aura donc

$$y = ax + \alpha, \quad z = bx + \varphi(\alpha),$$

φ étant une fonction dont la forme dépend de la courbe directrice; mais la première de ces équations donnant

$$\alpha = y - ax,$$

il en résulte

$$z - bx = \varphi(y - ax).$$

Si l'on fait ici $b = 0$, on aura

$$z = \varphi(y - ax),$$

équation qui rentre dans celle du n° 140.

En éliminant la fonction φ dans le cas général, après avoir fait $dz = pdx + qdy$, on obtient

$$p + aq = b.$$

142. Quand les droites génératrices doivent toutes passer par un même point dont les coordonnées sont α, β, γ, leurs équations deviennent

$$y - \beta = a(x - \alpha), \quad z - \gamma = b(x - \alpha),$$

et ce sont les coefficiens a et b qui varient ensemble à chaque nouvelle position que prend la droite génératrice; il faut, en conséquence, poser $b = \varphi(a)$, ce qui donne

$$a = \frac{y-\beta}{x-\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{z-\gamma}{x-\alpha} = \varphi\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right).$$

L'élimination de la fonction φ conduit à

$$z - \gamma = p(x - \alpha) + q(y - \beta).$$

(*) Ou bien encore; soient $y' = \psi(x')$, $z' = \varpi(x')$, les équations de la courbe directrice; il faut qu'en posant $x = x'$, on ait $y = y'$, $z = z'$, et par conséquent $ax' + \alpha = \psi(x')$, $bx' + \beta = \varpi(x')$, d'où, en éliminant x', il résultera une équation entre α et β.

143. On voit encore sans peine, que si une courbe plane quelconque tourné autour de l'axe des z, chacun de ses points décrira un cercle, ayant son centre sur cet axe, et pour rayon, l'ordonnée de la courbe génératrice rapportée à ce même axe, et de plus, que le rayon de ce cercle varie avec sa distance au plan des xy, c'est-à-dire, avec z. Si donc on pose pour son équation, $x^2 + y^2 = a^2$, a devra être regardé comme une fonction de z, *et vice versâ*, d'où il suit

$$x^2 + y^2 = \varphi(z), \quad \text{ou} \quad z = \downarrow(x^2 + y^2),$$

$\downarrow$ désignant une fonction inverse de φ.

L'élimination de $\downarrow$ conduit à l'équation

$$py - qx = 0,$$

qui exprime le caractère des surfaces engendrées comme on vient de le voir, dont la sphère n'est qu'un cas particulier, et qu'on nomme *surfaces de révolution*. Pour les considérer sous le point de vue le plus général, il faudrait supposer dans une situation quelconque, l'axe autour duquel tourne la courbe génératrice.

Il n'est encore entré qu'une fonction arbitraire dans l'expression des familles de surfaces que nous venons d'examiner; il y en aurait eu un plus grand nombre, si l'on avait laissé plus de conditions à remplir dans le mouvement ou la nature des lignes génératrices; mais on ne peut qu'indiquer ici ce sujet. Cependant nous aurons bientôt l'occasion de faire connaître encore une classe de surfaces remarquables : ce sont toutes celles qui, comme les cylindres et les cônes, peuvent, sans déchirure ni duplicature, s'étendre sur un plan, et que pour cette raison, on nomme *surfaces développables* (161).

Enfin, il faudrait aussi montrer le procédé à suivre

pour particulariser, d'après une condition donnée, la forme des fonctions arbitraires contenues dans les équations primitives des familles de surfaces ; mais comme son principal usage se rapporte au Calcul intégral, je l'exposerai à la suite de l'intégration des équations différentielles partielles.

144. Considérons maintenant les diverses manières de passer d'un point à un autre sur une surface quelconque.

Lorsque x varie seul et devient $x+h$, on passe du point M, *fig.* 36, au point m, situé sur la section QMm, faite par un plan parallèle à celui des xz, et mené par le point M : l'ordonnée $m'm$ de cette section, a pour développement la série FIG. 36.

$$z+\frac{dz}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3z}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Si c'est y qui se change en $y+k$, et que x demeure constant, on passera au point n situé sur la section PMn faite par un plan parallèle à celui des yz, mené encore par le point M, et le développement de l'ordonnée $n'n$ de cette section, sera

$$z+\frac{dz}{dy}\frac{k}{1}+\frac{d^2z}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^3z}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

En faisant varier x et y en même temps, on passera du point M à un point quelconque N, et cela de deux manières différentes, savoir, en substituant $y+k$ au lieu de y dans le premier développement ci-dessus, ou bien $x+h$ au lieu de x dans le second. Par l'une de ces opérations, on passe de l'ordonnée $m'm$ à l'ordonnée $N'N$, dans la section pmN, et par l'autre, on passe de $n'n$ à $N'N$, dans la section qnN. Il est évident que ces deux sections doivent se rencontrer au point N, sans

quoi la surface proposée ne serait pas continue ; il faut donc que les résultats rapportés dans les nos 39 et 40 soient identiques : l'équation $\frac{d^2z}{dxdy} = \frac{d^2z}{dydx}$, à laquelle tient cette circonstance, n'est donc que l'expression de la loi de continuité.

Ayant à considérer particulièrement la série

$$z + \frac{dz}{dx}h + \frac{dz}{dy}k + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}h^2 + 2\frac{d^2z}{dxdy}hk + \frac{d^2z}{dy^2}k^2\right) + \text{etc.},$$

qui exprime le développement de la valeur de z, correspondante à $x+h$ et à $y+k$, pour abréger, je la représenterai par

$$z + ph + qk + \tfrac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + \text{etc.},$$

en posant

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = r, \quad \frac{d^2z}{dxdy} = s, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = t;$$

et je ferai observer que le rapport

$$\frac{k}{h} = \frac{N'm'}{M'm'} = \text{tang}\, N'M'm',$$

déterminant la direction de $M'N'$ par rapport aux axes des x et des y, fait connaître celle du plan $M'MNN'$, mené perpendiculairement au plan ABC, et coupant suivant MN la surface proposée.

145. Il suit des considérations précédentes, et de ce qui a été dit n° 136, que si $u = 0$ représente l'équation d'une surface courbe, les équations différentielles

$$\frac{du}{dx}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dx}=0 \quad \text{et} \quad \frac{du}{dy}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dy}=0,$$

appartiendront respectivement aux deux sections QMm et PMn; la coordonnée y n'entrera dans la première que comme une constante arbitraire, qui détermine la position du plan coupant : il en sera de même de la coordonnée x dans la seconde. On ne doit pas confondre le dz de l'une de ces équations avec celui de l'autre, puisque ces deux différentielles ne sont que partielles (135).

La différentielle totale, ou l'ensemble des termes du premier ordre, ayant pour expression

$$dz=\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy=p\,dx+q\,dy,$$

$dz=p\,dx$ est la différentielle de l'ordonnée de la section parallèle au plan des xz; semblablement $dz=q\,dy$ est celle de l'ordonnée de la section parallèle au plan des yz.

Si l'on demandait la différentielle de l'ordonnée de la section faite par un plan quelconque $M'MNN'$ perpendiculaire à celui des xy, l'équation de ce plan, de même que celle de sa commune section $M'N'$, étant de la forme $y=\alpha x+\beta$ (*Trig.* 176), établirait une dépendance entre les coordonnées x et y; il ne serait plus permis de faire varier l'une sans l'autre, et z ne pourrait changer que d'une seule manière; il faudrait alors employer la différentielle totale $dz=p\,dx+q\,dy$, en observant que l'équation du plan coupant donne $dy=\alpha\,dx$, d'où il suit

$$dz=(p+\alpha q)\,dx.$$

Cet exemple offre l'explication géométrique de ce

qu'on lit dans le n° 46, relativement à l'emploi des différentielles totales. En supposant toujours une dépendance entre les deux variables, on fixe la direction dans laquelle on passe d'un point à un autre sur la surface proposée; car si la section MN n'était pas faite par un plan perpendiculaire à celui des xy, et qu'elle eût en conséquence sur ce dernier, une courbe pour projection, la droite $M'N'$ serait la tangente de cette courbe au point M', et la projection de la droite qui toucherait, au point M, la section MN faite dans la surface proposée.

146. La première remarque qui se présente, c'est que la limite du rapport

$$\frac{NN' - MM'}{M'N'},$$

donnant la tangente trigonométrique de l'angle que fait, avec sa projection $M'N'$, la droite qui touche au point M la section formée dans la surface par le plan $M'MNN'$ (58), mesure l'inclinaison de cette section par rapport au plan des xy, et indique par conséquent la *pente* de la surface, dans la direction MN. Or, pour passer à la limite, il faut substituer aux accroissemens

$$NN' - MM' \quad \text{et} \quad M'N' = \sqrt{\overline{M'm'}^2 + \overline{N'm'}^2},$$

les différentielles correspondantes

$$dz = (p + \alpha q)\,dx, \quad \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + \alpha^2} \ (145),$$

d'où il résultera pour la limite cherchée,

$$\frac{p + \alpha q}{\sqrt{1 + \alpha^2}}.$$

Cela posé, on peut demander quelle doit être la si-

tuation du plan coupant $M'MNN'$ pour que l'expression ci-dessus, qui varie avec l'angle $N'M'm'$ dont la tangente $=\alpha$, soit un *maximum*. Pour résoudre ce problème, il faut différentier cette même expression par rapport à α, et égaler le résultat à zéro (101); on trouvera

$$\frac{q-p\alpha}{(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}=0, \quad \text{d'où} \quad q-p\alpha=0, \quad \alpha=\frac{q}{p};$$

et si l'on met pour α sa valeur $\frac{dy}{dx}$, on formera l'équation différentielle

$$qdx-pdy=0,$$

qui, conjointement avec celle de la surface,

$$dz=pdx+qdy,$$

fera connaître la direction dans laquelle doivent se succéder les points consécutifs pour descendre du point M au plan des xy par les arcs les plus inclinés, ou la *ligne de plus grande pente* qui conduit de ce point au plan des xy. Cette ligne qui, généralement, sera courbe, se présente souvent dans les arts de construction.

147. Venons maintenant aux oseulations des surfaces; concevons-en deux passant par un même point ayant pour coordonnées x, y, z, et qu'en changeant x en $x+h$, y en $y+k$, l'équation de la première surface donne

$$z+ph+qk+\tfrac{1}{2}(rh^2+2shk+tk^2)+\text{etc.},$$

et celle de la seconde

$$z+Ph+Qk+\tfrac{1}{2}(Rh^2+2Shk+Tk^2)+\text{etc.};$$

leur distance pour le second point que l'on considère, sera, dans le sens de l'ordonnée z,

$$(p-P)h+(q-Q)k$$
$$+\tfrac{1}{2}\{(r-R)h^2+2(s-S)hk+(t-T)k^2\}$$
$$+\text{etc.},$$

série qu'on peut rendre convergente, en prenant h et k très petits, et qui diminuera de plus en plus de valeur, lorsqu'elle perdra les termes de sa première, de sa seconde, etc., lignes.

En raisonnant ici comme on l'a fait par rapport aux courbes dans le n° 75, on se convaincra qu'une troisième surface pour laquelle ces termes ne disparaîtraient pas, passerait nécessairement en dehors des deux autres, dans tous les points qui environnent leur point commun.

Lorsqu'on aura

$$p-P=0, \quad q-Q=0,$$

les deux premières surfaces proposées se toucheront, et leur contact sera du premier ordre; il sera du second, si l'on a en même temps

$$r-R=0, \quad s-S=0, \quad t-T=0,$$

et ainsi de suite.

148. Si l'on suppose maintenant que l'équation de la seconde surface renferme un certain nombre de constantes indéterminées, on pourra disposer de ces constantes pour anéantir les premiers termes de la distance des deux surfaces, et établir ainsi entre elles le contact de l'ordre le plus élevé possible, c'est-à-dire, une osculation.

En représentant par x', y', z', les coordonnées de la seconde surface, la première condition à établir, c'est qu'en changeant dans son équation, que je représenterai par $V'=0$, x' et y' en x et y, on en tire

$$z'=z,$$

afin que les deux surfaces aient un point commun. Remplaçant ensuite les lettres

$$p,\ q,\ r,\ s,\ t, \text{ etc.},\quad P,\ Q,\ R,\ S,\ T, \text{ etc.},$$

par les coefficiens différentiels qu'elles désignent, les conditions posées dans le n° précédent deviendront, pour un contact du premier ordre,

$$\frac{dz'}{dx'} = \frac{dz}{dx},\quad \frac{dz'}{dy'} = \frac{dz}{dy};$$

de plus, pour un contact du second,

$$\frac{d^2z'}{dx'^2} = \frac{d^2z}{dx^2},\quad \frac{d^2z'}{dx'dy'} = \frac{d^2z}{dxdy},\quad \frac{d^2z'}{dy'^2} = \frac{d^2z}{dy^2},$$

et ainsi de suite, ce qui établit que les différentielles partielles du premier ordre, puis celles du second ordre, etc., de l'équation $V' = 0$, sont satisfaites quand on y change x', y', z' et leurs différentielles, en x, y, z et leurs différentielles.

149. Appliquons d'abord ce qui précède au plan, en prenant pour $V' = 0$, l'équation

$$z' = Ax' + By' + D \ (Trig.\ 176);$$

comme il n'y a ici que trois constantes, on ne peut satisfaire qu'aux trois conditions du contact du premier ordre. La première donne

$$z' = z = Ax + By + D,$$

et les deux autres

$$\frac{dz'}{dx'} = A = \frac{dz}{dx},\quad \frac{dz'}{dy'} = B = \frac{dz}{dy}.$$

En vertu de celles-ci, il vient d'abord

$$z = \frac{dz}{dx}x + \frac{dz}{dy}y + D,$$

et retranchant cette équation de celle du plan, on

obtient

$$z' - z = \frac{dz}{dx}(x' - x) + \frac{dz}{dy}(y' - y),$$

ou $$z' - z = p\,(x' - x) + q\,(y' - y) :$$

telle est l'équation du plan tangent à la première surface, au point dont les coordonnées sont x, y et z.

On déterminerait encore ce plan par la condition qu'il doit contenir les tangentes de toutes les sections qu'on pourrait faire dans la surface, par le point M; car pour ces tangentes, on a

$$dz = (p + \alpha q)\,dx \quad (145),$$

et, lorsqu'on fait $dy = \alpha dx$, l'équation du plan donne

$$dz' = A dx + B dy = (A + \alpha B) dx,$$

résultat qui sera identique avec le précédent, quel que soit α, si $A = p$, et $B = q$.

150. La droite perpendiculaire au plan tangent, menée par le point où il touche la surface proposée, s'appelle *normale*, et ses équations sont, d'après celle du plan tangent,

$$x' - x + p(z' - z) = 0,$$
$$y' - y + q(z' - z) = 0 \quad (Trig.\ 182)\ (*).$$

La distance du point considéré sur la surface courbe, à un point quelconque pris sur la normale, sera

$$\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} = (z-z')\sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

d'après les équations ci-dessus; et si l'on fait $z' = 0$, le résultat

$$z\sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

(*) Nous les retrouverons plus loin (157), par une considération de *maximum* et de *minimum*.

donnera la longueur de la partie de la normale comprise entre la surface proposée et le plan des xy.

151. Les conditions d'un contact du second ordre étant au nombre de six (148), ne peuvent pas toujours être remplies par la sphère, puisque son équation générale ne renferme que quatre constantes, savoir, les trois coordonnées du centre et le rayon (*Trig.* 184) : elle ne saurait donc avoir dans tous les sens, la même courbure que la surface proposée. Pour mesurer cette courbure, il faut employer deux cercles osculateurs différens, qu'Euler a déterminés le premier, mais auxquels Monge est ensuite parvenu par des considérations très élégantes, que je vais exposer.

On a vu, dans le n° 80, que les points de la développée, ou les centres de courbure d'une courbe, sont les limites des intersections des normales; étendons cette définition aux surfaces, en cherchant les limites des intersections de leurs normales consécutives, et pour cela reprenons les équations

$$x' - x + p\,(z' - z) = 0 \quad (a),$$
$$y' - y + q\,(z' - z) = 0 \quad (b),$$

trouvées dans le n° précéd. Les quantités x, y, z, p, q, relatives au point que l'on considère sur la surface proposée, sont constantes pour la même normale, mais elles changent de valeur lorsqu'on passe à une seconde normale; or, ce passage pouvant s'effectuer dans une infinité de directions, savoir, du point donné à chacun des points environnans, il faut faire varier en même temps x, y, et z; et puisque l'on ne cherche que le point d'intersection de la première normale avec la seconde, on regardera comme constantes, les coordonnées x', y' et z', affectées à ce point.

En différentiant ainsi les équations (a) et (b), et posant

$$dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy \quad (144 \text{ et } 44),$$

on trouvera

$$-dx - p^2\,dx - pq\,dy + (z' - z)(r\,dx + s\,dy) = 0 \quad (c),$$
$$-dy - q^2\,dy - pq\,dx + (z' - z)(s\,dx + t\,dy) = 0 \quad (d).$$

Mais les équations (a) et (b) donnant les valeurs de $x' - x$ et de $y' - y$, lorsque celle de $z' - z$ sera connue, il faut, pour que la question proposée ait une solution, que les deux équations (c) et (d) s'accordent dans la détermination de cette dernière quantité, c'est-à-dire qu'on ait

$$\frac{dx + p^2\,dx + pq\,dy}{r\,dx + s\,dy} = \frac{dy + q^2\,dy + pq\,dx}{s\,dx + t\,dy};$$

ce qui établit une relation entre dx et dy, et montre que la seconde normale ne rencontre la première, qu'autant que le point d'où elle part est dans la direction marquée par la valeur de $\frac{dy}{dx}$. Or, en faisant

$$dy = m\,dx,$$

dans l'équation précédente, et ordonnant par rapport à m, on obtient le résultat

$$[(1 + q^2)s - pqt]\,m^2 + [(1 + q^2)r - (1 + p^2)t]m - [(1 + p^2)s - pqr] = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (e),$$

qui donne pour m deux valeurs ; il n'y a donc, en général, à chaque point d'une surface, que deux directions dans lesquelles deux normales consécutives se coupent, et soient par conséquent dans le même plan.

Un simple changement de coordonnées suffit pour mettre en évidence la relation que ces directions ont entre elles, sur la surface proposée. Il est visible

d'abord qu'on peut faire coïncider le plan des xy avec le plan tangent au point que l'on considère, et placer l'origine des coordonnées à ce point, sans, pour cela, déranger la position respective de la surface proposée, et de ses normales; mais alors $x=0$, $y=0$, $z=0$, et, dans l'équation du plan tangent, z' doit être nul quels que soient x' et y', ce qui exige que $p=0$, $q=0$, et réduit l'équation (e) à

$$sm^2+(r-t)m-s=0, \quad \text{ou} \quad m^2+\frac{(r-t)}{s}m-1=0.$$

En nommant m' et m'' les racines de celle-ci, on a

$$m'm''+1=0;$$

et comme à présent toutes les droites qui touchent, au point M, *fig.* 37, la surface proposée, se confondent avec leur projection sur le plan des xy, m' et m'' représenteront les tangentes des angles que font, avec l'axe des x, les droites indiquant les directions sur lesquelles on trouve les normales qui se coupent; ainsi, ces directions seront perpendiculaires entre elles (*). FIG. 37.

152. On voit aussi qu'en menant par l'axe des z, qui coïncide à présent avec la normale MG, et par chacune des tangentes MN' et Mn', correspondantes aux valeurs m' et m'', des plans, ils couperont la surface proposée suivant deux courbes, dont les cercles osculateurs seront aussi ceux de la surface, puisqu'elles auront deux normales communes avec cette surface, tandis que les autres courbes ne sauraient en avoir qu'une.

C'est par les rayons de ces cercles qu'on mesure les

(*) m resterait indéterminée si l'on avait en outre $s=0$, $r-t=0$, ce qui a lieu pour la sphère, dont toutes les normales passent par son centre, que l'on suppose ici dans l'axe des z.

courbures de la surface proposée; or, leur expression est évidemment celle de la distance

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2},$$

entre l'intersection des normales et le point que l'on considère sur cette surface. Par la substitution des valeurs de $x-x'$ et de $y-y'$, tirées des équations (a) et (b), on trouve

$$(z-z')\sqrt{1+p^2+q^2},$$

où il n'y a plus qu'à substituer pour $z-z'$, sa valeur tirée de l'une des équations (c) et (d); mais on arrive à une valeur indépendante de m, en éliminant d'abord $\frac{dy}{dx}$ de ces deux équations, ce qui donne

$$\frac{-(1+p^2)+(z'-z)r}{pq-(z'-z)s}=\frac{pq-(z'-z)s}{-(1+q^2)+(z'-z)t};$$

posant ensuite

$$(z-z')\sqrt{1+p^2+q^2}=\delta, \text{ d'où } z'-z=\frac{-\delta}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

puis substituant cette valeur de $z'-z$, dans l'équation précédente, faisant disparaître les dénominateurs et ordonnant par rapport à δ, on obtient

$$(rt-s^2)\delta^2+[(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r]\delta\sqrt{1+p^2+q^2}+(1+p^2+q^2)^2=0\ldots\ (f),$$

équation dont les racines exprimeront les rayons des deux cercles osculateurs.

Les valeurs de m, données en fonction de x, y, z, changeant avec ces variables, pour chaque point de la surface proposée, il en résulte les équations différentielles

$$dy=m'dx,\quad dy=m''dx,$$

qui déterminent sur le plan des xy, deux courbes passant par le point M', *fig.* 36, et qui sont les projections de celles qu'il faut suivre sur la surface, pour rencontrer des normales qui se coupent. FIG. 36.

Chaque point M de la surface proposée se trouve sur deux de ces courbes; celle qui répond à la plus petite des valeurs de δ, est la *ligne de plus grande courbure*, l'autre est la *ligne de moindre courbure.*

Quand les valeurs de δ ont le même signe, les deux courbures de la surface sont tournées dans le même sens, et en sens contraire, si ces valeurs sont de signes différens.

Enfin, si l'on élimine x, y, z et m, entre l'équation de la surface proposée, et les équations (b), (c), (d), (e), (151), on aura, par les coordonnées x', y', z', l'équation de la surface qui est le lieu de tous les centres de courbure de la proposée, et qui, en général, sera composée de deux nappes, dont l'une contiendra tous les centres de la plus grande courbure, et l'autre ceux de la plus petite (*).

Des points singuliers des surfaces courbes, des maximums *et* minimums *des fonctions de plusieurs variables.*

153. Les surfaces courbes offrent, dans leur cours, non-seulement des points singuliers en nombre limité et distincts, mais ces points y forment aussi quelquefois des suites continues, qu'on pourrait nommer *lignes singulières;* les uns et les autres correspondent à des valeurs particulières des coefficiens différentiels de l'or-

(*) On trouvera, à la page 580 du Ier vol. du Traité in-4°, la formule pour déterminer par ces courbures, celle d'une section faite dans la surface, par un plan quelconque.

donnée de la surface, analogues à celles qui nous ont conduit à la détermination des points singuliers des courbes. Mais pour se faire une idée de la forme d'une surface, il ne suffit pas d'en chercher des points isolés; il faut, comme pour la construire, imaginer un ensemble de sections faites par des plans ou des surfaces assujetties à une loi constante et déterminée.

C'est ainsi qu'on peut reconnaître en quel point d'une surface, son ordonnée est un *maximum* ou un *minimum*, c'est-à-dire, plus grande ou plus petite que toutes celles qui l'entourent immédiatement, dans quelque direction qu'on les prenne; car il doit y avoir alors un *maximum* ou un *minimum* sur toutes les sections que forment, dans la surface proposée, les divers plans passant par cette ordonnée. Or, en posant pour l'une de ces sections

$$dy = \alpha dx,$$

le coefficient différentiel de z considéré comme l'ordonnée de cette section, sera exprimé par

$$\frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{p + \alpha q}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \quad (146);$$

et devra être nul ou infini (101), indépendamment d'aucune valeur de α; pour qu'il y ait *maximum* ou *minimum*, quelle que soit la situation du plan coupant.

Les conditions du premier cas seront donc

$$p = 0, \quad q = 0;$$

ou

$$\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dz}{dy} = 0,$$

et par leur moyen, on déterminera les abscisses du point cherché; mais, comme dans les courbes, on ne pourra pas conclure de ces seules conditions, qu'il y

ait *maximum* ou *minimum* : tout ce qu'il s'ensuit nécessairement, c'est que le plan tangent est parallèle à celui des xy, puisque son équation se réduit alors à $z' - z = 0$ (149).

Si la surface proposée est la sphère donnée par l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

on aura

$$p = -\frac{x}{z}, \quad q = -\frac{y}{z},$$

d'où

$$x = 0, \quad y = 0;$$

et l'on verra, par l'expression

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

que toutes les valeurs de z qui répondent à des abscisses différentes de zéro, sont $< a$.

154. En n'ayant égard qu'à la marche des valeurs de l'ordonnée z, on rencontre aussi des *maximums* et des *minimums* qui rendent infinis les coefficiens différentiels p et q; en voici un exemple.

Si dans l'équation

$$z = b + (x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}},$$

on fait x et y nuls, on aura $z = b$, et dès qu'on prendra x et y différens de zéro, on rendra $z > b$. Cette valeur est donc bien un *minimum*; mais en supposant aussi x et y nuls dans les expressions

$$p = \frac{2x}{3(x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}}, \quad q = \frac{2y}{3(x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}},$$

on trouve $\frac{0}{0}$. Pour en connaître la vraie valeur, il faut d'abord poser $y = mx$, ce qui les change en

$$p=\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}(1+m^2)^{\frac{2}{3}}},\quad q=\frac{2m}{3x^{\frac{1}{3}}(1+m^2)^{\frac{2}{3}}},$$

et montre qu'elles sont réellement infinies, lorsque $x=0$ et que m est assignable, d'où il résulte $y=0$.

A la vérité, si l'on cherche la forme de cette partie de la surface, on reconnaîtra sans peine que le point qui répond à $x=0$, $y=0$, est une espèce de bec ou de rebroussement, au-delà duquel la surface ne s'étend pas, et semblable à celui que produirait la courbe EM, *fig.* 14, en tournant autour de la ligne PM. On verra aussi que p et q se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$, parce que la position du plan tangent à ce point est indéterminée, puisque tout plan qui passe par l'axe des z, touche et coupe la surface. FIG. 14.

Il existe aussi, dans les surfaces courbes, des suites de points, ou des lignes dans lesquelles elles retournent sur elles-mêmes, qui sont nommées *arêtes de rebroussement*, et dont on verra bientôt un exemple; d'autres lignes où les courbures changent de côté; celles-ci sont des *lignes d'inflexion*, qui peuvent se reconnaître par le changement de signe des rayons de courbure; mais tous ces détails sortant des limites que j'ai dû me prescrire, je vais passer à la recherche purement analytique des *maximums* et des *minimums* des fonctions de deux variables.

155. Il est évident que la différence

$$u'-u=\mathrm{f}(x+h,\ y+k)-\mathrm{f}(x,y),$$

entre deux valeurs successives d'une fonction, lorsque les accroissemens demeurent très petits, mais sont d'ailleurs quelconques, doit rester toujours positive si

la première valeur de u est un *minimum*, ou négative dans le cas contraire.

Pour examiner les conséquences de cette condition, il faut en général développer la différence indiquée ci-dessus, suivant les puissances ascendantes des quantités h et k; mais en nous bornant ici au cas où les coefficiens différentiels ne deviennent pas infinis, nous pourrons faire usage de la série du n° 41, et pour abréger, nous désignerons par

$$B, C, D, E, F, \text{ etc.},$$

les fonctions

$$\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^2u}{dxdy}, \frac{d^2u}{dy^2}, \text{ etc.}$$

Posant ensuite $k = \alpha h$, il viendra

$$u' - u = \frac{h}{1}(B + C\alpha) + \frac{h^2}{1.2}(D + 2E\alpha + F\alpha^2), + \text{etc.},$$

série dans laquelle le terme affecté de la première puissance de h, pourra devenir supérieur à la somme de tous les autres; et comme il changerait de signe en même temps que h, il faudra qu'il s'évanouisse lors du *maximum* ou du *minimum*; ce qui fournit l'équation

$$B + C\alpha = 0,$$

qui, devant subsister dans toutes les relations de k avec h, doit se vérifier indépendamment de α : on aura donc

$$B = 0, \quad C = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0,$$

ainsi qu'on l'a déduit des considérations géométriques (153).

Ces conditions étant remplies par les valeurs de x et de y déterminées en conséquence, il faut encore que les coefficiens D, E et F, ne s'évanouissent pas en même temps, et de plus, que le signe de la quantité qui forme la seconde ligne du développement ci-dessus, soit indépendant des valeurs de α. En donnant à cette ligne la forme

$$\frac{Fh^2}{1.2}\left(\frac{D}{F}+\frac{2E}{F}\alpha+\alpha^2\right)\ldots\ (a),$$

on voit que son signe restera le même si le polynôme

$$\frac{D}{F}+\frac{2E}{F}\alpha+\alpha^2$$

n'en change pour aucune valeur de α; et c'est ce qui arrivera, si, étant égalé à zéro, il n'admet pour α que des valeurs imaginaires ou des valeurs égales: or, ces valeurs, exprimées en général par

$$\alpha=\frac{-E\pm\sqrt{E^2-FD}}{F},$$

seront imaginaires lorsque $E^2<FD$, et égales si $E^2=FD$.

Sans ces conditions, il n'y aura ni *maximum* ni *minimum;* et comme elles exigent d'abord que F et D aient le même signe, lorsqu'elles seront remplies, celui de la quantité (a) ne dépendra plus que du signe du coefficient F; on aura donc un *minimum* s'il est positif, et un *maximum* s'il est négatif.

Euler, dans ses *Institutiones Calculi differentialis*, n'indique qu'une seule condition, savoir, que D et F soient de même signe; Lagrange montra le premier

qu'elle n'était pas suffisante, et donna sur ce sujet une théorie à laquelle il ne manquait plus que l'examen du cas où $E^2 = FD$, discuté depuis par M. Français (*):

Si les coefficiens du second ordre s'anéantissaient en même temps que ceux du premier, il n'y aurait *maximum* ou *minimum* qu'autant que les coefficiens du troisième ordre disparaîtraient aussi, et que les termes du quatrième formeraient une quantité dont le signe ne dépendrait aucunement de α, c'est-à-dire, que le polynome en α, qui monterait alors au 4e degré, étant considéré comme une équation de ce degré, n'aurait que des racines imaginaires ou des racines égales.

156. Pour exemple analytique, j'ai choisi la question suivante, analogue à celle du n° 103. *Partager la quantité* a *en trois parties*, x, y, a—x—y, *telles que le produit* $x^m y^n (a-x-y)^p$ *soit un* maximum.

On a alors

$$u = x^m y^n (a-x-y)^p,$$

$$\frac{du}{dx} = x^{m-1} y^n (a-x-y)^{p-1} \{ma-mx-my-px\} = 0,$$

$$\frac{du}{dy} = x^m y^{n-1} (a-x-y)^{p-1} \{na-nx-ny-py\} = 0;$$

les facteurs $ma-mx-my-px$ et $na-nx-ny-py$, étant égalés à zéro, fournissent les équations

$$m(a-x-y)-px = 0, \quad n(a-x-y)-py = 0,$$

qui, par l'élimination de $a-x-y$, conduisent à

$$mpy-npx = 0, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{nx}{m};$$

(*) *Voyez* le Traité in-4°, IIIe vol., page 631.

et l'on trouve ensuite

$$x=\frac{ma}{m+n+p},\quad y=\frac{na}{m+n+p},\quad a-x-y=\frac{pa}{m+n+p}.$$

Pour savoir si ces valeurs appartiennent en effet à un *maximum*, on les substituera dans les expressions générales de

$$\frac{d^2u}{dx^2},\quad \frac{d^2u}{dxdy},\quad \frac{d^2u}{dy^2};$$

en faisant, pour abréger, $m+n+p=q$, on trouvera

$$D=-(m+p)\left(\frac{ma}{q}\right)^{m-1}\left(\frac{na}{q}\right)^{n}\left(\frac{pa}{q}\right)^{p-1},$$

$$E=-\frac{mna}{q}\left(\frac{ma}{q}\right)^{m-1}\left(\frac{na}{q}\right)^{n-1}\left(\frac{pa}{q}\right)^{p-1},$$

$$F=-(n+p)\left(\frac{ma}{q}\right)^{m}\left(\frac{na}{q}\right)^{n-1}\left(\frac{pa}{q}\right)^{p-1}.$$

Les quantités D et F sont toutes deux négatives, et l'on s'assurera sans peine qu'elles remplissent la condition $E^2<DF$, lorsque les exposans m, n, p, sont positifs; ainsi on a obtenu le *maximum* demandé.

157. Comme application géométrique, je prendrai la détermination de la plus courte distance entre un plan et un point donnés.

Soient x, y, z, les coordonnées du plan, qui sont les inconnues du problème, x', y', z', celles du point qui sont données; la distance entre le point et le plan sera exprimée par

$$u=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2},$$

qui devra être considéré comme une fonction des deux variables x et y, à cause de la dépendance qu'établit entre celles-ci et l'ordonnée z, l'équation du plan

donné. Si on la représente par $z = Ax + By + D$, que l'on différentie u dans cette hypothèse (136), on aura $dz = Adx + Bdy$; et supprimant les dénominateurs des valeurs de $\frac{du}{dx}$ et de $\frac{du}{dy}$, on trouvera

$$x - x' + (z - z')A = 0, \quad y - y' + (z - z')B = 0,$$

équations qui sont précisément celles de la perpendiculaire au plan donné.

S'il touche, au point dont les coordonnées sont x, y, z, une surface courbe pour laquelle $dz = pdx + qdy$, comme alors $A = p$, $B = q$, les équations ci-dessus deviendront celles de la normale à cette surface (150).

De l'application du Calcul différentiel aux courbes à double courbure, et des surfaces développables.

158. On sait (*Trig.* 193) que deux équations primitives entre trois variables, se représentent par une ligne considérée dans l'espace, tandis qu'une seule équation entre trois variables appartient à une surface. Lorsqu'on veut appliquer le Calcul différentiel aux courbes à double courbure, on peut les regarder comme les limites de polygones dont trois côtés consécutifs ne sauraient être dans le même plan. Le prolongement de l'un de ces côtés donne la tangente de même que dans les courbes planes.

Ainsi la tangente MT de la courbe MX, *fig.* 38, est la droite qui passe par les points dont les coordonnées sont FIG. 38.

$$x, \; y, \; z, \quad x + dx, \quad y + dy, \quad z + dz,$$

et l'on aura pour les équations de ses projections

sur les plans des xy et des xz,

$$y'-y=\frac{dy}{dx}(x'-x),$$

$$z'-z=\frac{dz}{dx}(x'-x)\ (Trig.\ 179),$$

qui appartiennent évidemment aux lignes $M'T'$ et $M''T''$, tangentes aux projections $M'X'$ et $M''X''$ de la courbe proposée (68). Il ne reste plus qu'à mettre dans ces équations, au lieu des coordonnées y, z et de leurs différentielles, les valeurs tirées des équations des projections de la courbe proposée.

159. Deux tangentes consécutives TM et tm, déterminent le plan qui passe par deux côtés consécutifs, et qu'on nomme *plan osculateur*. On peut trouver son équation en le regardant comme passant par trois points consécutifs de la courbe proposée : soit donc

$$z'=Ax'+By'+D$$

son équation ; il faudra qu'on ait d'abord

$$z=Ax+By+D,$$

puisqu'il doit contenir le point dont les coordonnées sont x, y et z; et pour que les deux points suivans s'y trouvent aussi, il faudra de plus que la différentielle première et la différentielle seconde de son équation aient lieu en même temps que celles des équations de la courbe proposée.

On pourrait prendre une des différentielles dx, dy, ou dz pour constante (133); mais il sera plus symétrique de les traiter toutes comme variables en même temps, et il viendra

$$dz=Adx+Bdy,$$
$$d^2z=Ad^2x+Bd^2y,$$

d'où l'on tirera

$$A=\frac{dzd^2y-dyd^2z}{dxd^2y-dyd^2x}, \quad B=\frac{dxd^2z-dzd^2x}{dxd^2y-dyd^2x};$$

puis retranchant l'équation

$$z=Ax+By+D,$$

de

$$z'=Ax'+By'+D,$$

mettant ensuite pour A et B leurs valeurs, faisant disparaître les dénominateurs, et passant tous les termes dans un seul membre, on trouvera

$$(x'-x)(dyd^2z-dzd^2y)+(y'-y)(dzd^2x-dxd^2z)+(z'-z)(dxd^2y-dyd^2x)=0,$$

résultat remarquable par sa forme.

En y substituant pour deux quelconques des trois coordonnées x, y, z, leurs valeurs tirées des équations de la courbe proposée, on aura l'équation du plan osculateur, particularisée par la coordonnée restante.

Ici s'offre l'occasion de vérifier ce qu'on lit à la fin du n° 132; car, si en regardant d'abord y et z comme des fonctions de x, on fait

$$dy=pdx, \quad d^2y=qdx^2, \quad dz=p'dx, \quad d^2z=q'dx^2,$$

et qu'ensuite on suppose les trois variables fonctions d'une quatrième t, on aura par le n° 131,

$$d^2y=qdx^2+pd^2x, \quad , \quad d^2z=q'dx^2+p'd^2x,$$

valeurs dont la substitution dans l'équation du plan osculateur, faisant disparaître d^2x, conduit au même résultat que si l'on eût fait dx constant.

160. On observera en passant, que la différentielle de l'arc de la courbe a pour expression

$$\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2},$$

puisque c'est celle de la distance des points dont les cordonnées respectives sont

$$x,\ y,\ z,\ x+\mathrm{d}x,\ y+\mathrm{d}y,\ z+\mathrm{d}z.$$

161. La série des tangentes d'une courbe à double courbure : ou, ce qui revient au même, la suite de ses plans osculateurs, lorsqu'on les mène par des points peu éloignés, forme un polyèdre composé de plans angulaires, accolés les uns aux autres par un côté commun, et qui peuvent se ramener au même plan ou se développer, en les faisant tourner autour de ce côté : c'est ce que représente la figure 39. Si, pour plus de simplicité, l'on n'y considère en premier lieu que les lignes tirées en plein, on verra bien comment les côtés du polygone $MM_1M_2M_3$ etc., prolongés dans le même sens, forment les angles

FIG. 39.

$$TM_1T_1,\ T_1M_2T_2,\ T_2M_3T_3,\ T_3M_4T_4,\ \text{etc.},$$

situés d'abord dans des plans différens, et qui se ramènent sur un seul, en tournant autour des lignes

$$M_1T_1,\quad M_2T_2,\quad M_3T_3,\quad \text{etc.}$$

Considérant ensuite leurs prolongemens dans le sens opposé, parties qui sont ponctuées, et qui croisent la direction des autres, en passant soit au-dessus, soit au-dessous, on en voit naître une seconde nappe du polyèdre, laquelle rencontre la première suivant les côtés du polygone, qui devient ainsi une ligne de rebroussement sur ce polyèdre.

Il est bon d'observer que chaque côté de ce polygone peut être envisagé comme l'intersection de deux faces contiguës du polyèdre, et chacun de ses angles, comme celle de trois faces consécutives du même polyèdre.

Cela posé, si l'on conçoit que les points pris sur la

courbe proposée, pour former le polygone, se rapprochent de plus en plus, le polyèdre tendra sans cesse vers un corps continu, qui en sera la limite, comme les cylindres et les cônes sont celles des prismes et des pyramides, et sa ligne de rebroussement se changera dans la courbe proposée, qui est aussi nommée l'*arête de rebroussement* de la surface formée par ses tangentes. Telle est l'origine la plus simple des surfaces développables, annoncées dans le n° 143.

Lorsqu'on a les équations de la courbe proposée, celle de la surface de ses tangentes s'obtient facilement; car, si dans les équations de la tangente,

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x),$$

$$z' - z = \frac{dz}{dx}(x' - x) \quad (158),$$

on change x, y, z, en α, β, γ, afin de pouvoir supprimer les accens affectés aux coordonnées courantes de cette droite, et qu'on représente par

$$\beta = \varphi(\alpha), \quad \frac{d\beta}{d\alpha} = \varphi'(\alpha), \quad \gamma = \psi(\alpha), \quad \frac{d\gamma}{d\alpha} = \psi'(\alpha),$$

les équations des projections de la courbe proposée, et leurs différentielles, en sorte que les équations de sa tangente deviennent

$$y - \varphi(\alpha) = \varphi'(\alpha)(x - \alpha) \quad (a),$$
$$z - \psi(\alpha) = \psi'(\alpha)(x - \alpha) \quad (b),$$

cette droite n'est plus particularisée que par la valeur de α. Si donc on élimine α, ce qui est toujours possible quand les fonctions φ et ψ sont connues, l'équation résultante en x, y et z, appartiendra à l'ensemble des

tangentes de la courbe proposée, et sera par conséquent l'équation de la surface qu'elles forment.

Il est évident qu'on pourra reconnaître par cette équation, si la courbe donnée est plane ou à double courbure, puisque dans le premier cas, la surface dont on vient de parler sera un plan, et dans le second une surface courbe.

Quand les formes des fonctions φ et ψ ne sont pas données, l'élimination ne peut s'effectuer qu'en différentiant, et l'on parvient alors au caractère général des surfaces développables. Il faut d'abord observer que l'équation (a), établissant une relation entre x, y et α, fait voir que la dernière de ces quantités est une fonction des deux autres; je différentie donc sous ce point de vue, et successivement par rapport à x et par rapport à y, les équations (a) et (b). Pour abréger, je pose

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad \frac{d\alpha}{dx} = \alpha', \quad \frac{d\alpha}{dy} = \alpha'';$$

après les réductions, il vient

$$\begin{aligned} o &= \varphi'(\alpha) + (x-\alpha)\,\alpha'\varphi''(\alpha), \\ 1 &= (x-\alpha)\,\alpha''\varphi''(\alpha), \\ p &= \psi'(\alpha) + (x-\alpha)\,\alpha'\psi''(\alpha), \\ q &= (x-\alpha)\,\alpha''\psi''(\alpha); \end{aligned}$$

mettant alors dans les valeurs de p et de q, celles de $(x-\alpha)\alpha'$ et de $(x-\alpha)\alpha''$, tirées des deux premières équations, p et q seront exprimés en α seulement, par des fonctions arbitraires de cette quantité : on aura donc

$$p = \varpi(q),$$

ϖ désignant une fonction dépendante de φ et de ψ et aussi arbitraire que celles-ci.

Maintenant, si l'on fait, comme dans le n° 151,

$$dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy,$$

qu'on différentie successivement par rapport à x et par rapport à y, l'équation $p = \varpi(q)$, on obtiendra

$$r = \varpi'(q)s, \quad s = \varpi'(q)t;$$

et éliminant la fonction ϖ', on aura enfin l'équation différentielle partielle du second ordre

$$rt - s^2 = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{d^2z}{dx^2}\frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2 = 0,$$

qui exprime le caractère général des surfaces développables, découvert par Euler.

Il faut d'abord remarquer que l'équation (f) du n° 152 se réduit au premier degré, lorsqu'on y fait $rt - s^2 = 0$, ce qui montre que les surfaces développables n'ont qu'une seule courbure, et qu'à proprement parler, l'une des deux valeurs de δ devient infinie dans ce cas. La ligne de courbure qui s'y rapporte, est précisément une des tangentes génératrices, celle qui passe par le point que l'on considère.

Le plan qui touche la courbe à ce point, passe par la même droite, à tous les points de laquelle s'étend le contact entre le plan et la surface proposée, ce qui est aisé à voir, puisque ce plan n'est autre que la limite des plans menés par deux tangentes consécutives.

Cette propriété, particulière aux surfaces développables et résultant de ce qu'elles sont composées de lignes droites qui se coupent deux à deux, les distingue de toutes les autres surfaces, sur lesquelles le contact avec un plan n'a lieu, en général, que dans un seul point.

162. Mener une normale à une courbe considérée dans l'espace, est un problème indéterminé; car il

existe un nombre infini de droites qui, passant par le point donné, sont en même temps perpendiculaires à la tangente: l'ensemble de ces droites forme un plan perpendiculaire à cette tangente, et qui se nomme *plan normal*. En donnant aux équations de la tangente (158) la forme

$$x'-x=\frac{dx}{dz}(z'-z),\quad y'-y=\frac{dy}{dz}(z'-z),$$

on voit que l'équation du plan normal est

$$(x'-x)\frac{dx}{dz}+(y'-y)\frac{dy}{dz}+z'-z=0 \quad (\textit{Trig.}\ 182),$$

ou

$$(x'-x)\,dx+(y'-y)\,dy+(z'-z)\,dz=0 \quad (1).$$

Considérons maintenant le plan normal pour le point consécutif; il est évident qu'il coupera celui qu'on vient de déterminer, et que, sur cette intersection, les coordonnées x', y', z', n'auront pas varié, quoique x soit devenu $x+dx$; on aura donc alors

$$(x'-x)d^2x+(y'-y)d^2y+(z'-z)d^2z-ds^2=0 \quad (2),$$

en posant pour abréger,

$$dx^2+dy^2+dz^2=ds^2,$$

et le système des équations (1) et (2) exprimera la droite dont il s'agit. Si on le combine avec les équations de la courbe proposée, pour éliminer x, y et z, il restera une seule équation appartenante à la surface qui est la limite des intersections successives des plans normaux, comme la développée des courbes planes est celle des intersections consécutives de leurs normales (80).

Cette surface est évidemment développable; car, ainsi que celle des tangentes, elle est composée de

lignes droites qui se coupent deux à deux, puisque, si l'on substitue un polygone à la courbe proposée, l'intersection du premier plan normal avec le second, et celle du second avec le troisième, seront toutes deux dans le second, et ainsi de proche en proche.

C'est ce que l'analyse prouve aussi; car si l'on change x en α comme dans le n° précéd., qu'on fasse $d\alpha$ constant, et qu'on supprime les accens, les équations (1) et (2) deviendront

$$x-\alpha+[y-\varphi(\alpha)]\varphi'(\alpha)+[z-\psi(\alpha)]\psi'(\alpha)=0 \quad (1'),$$

$$\left.\begin{array}{l}[y-\varphi(\alpha)]\varphi''(\alpha)+[z-\psi(\alpha)]\psi''(\alpha)\\ -1-\varphi'(\alpha)^2-\psi'(\alpha)^2\end{array}\right\}=0 \quad (2');$$

la seconde étant la différentielle de la première par rapport à α, montre qu'on peut différentier celle-ci par rapport à x et y sans faire varier α, puisque les termes qui résulteraient de cette fonction, seraient nuls en vertu de la seconde équation. La première donnera donc seulement

$$1+p\psi'(\alpha)=0, \qquad \varphi'(\alpha)+q\psi'(\alpha)=0,$$

d'où il faut conclure comme dans le n° cité, que $p=\varpi(q)$ (*).

(*) Si, dans l'équation (1'), on change x en z, y en x, z en y, et qu'on fasse

$$\alpha+\varphi(\alpha)\varphi'(\alpha)+\psi(\alpha)\psi'(\alpha)=m,$$

on pourra poser

$$\varphi'(\alpha)=-\Phi(m), \qquad \psi'(\alpha)=-\Psi(m),$$

et il viendra

$$z-m=x\Phi(m)+y\Psi(m) \quad (1''),$$
$$-1=x\Phi'(m)+y\Psi'(m) \quad (2'').$$

Ces équations, qui dérivent de celle du plan, $z=Ax+By+m$, dans laquelle on a rendu deux des constantes, fonctions de la troisième, appartiennent à la suite des intersections d'un plan as-

163. Nous sommes maintenant en état de déterminer les courbures, ou *flexions*, d'une courbe à double courbure. La première, celle qui subsisterait encore quand on développerait la surface de ses tangentes ou de ses plans osculateurs, est celle du cercle qui est la limite de tous les cercles passant par trois points consécutifs de cette courbe, et contenu par conséquent dans le plan osculateur. Son centre, qui est évidemment l'intersection de ce plan avec les deux plans normaux consécutifs, sera donné en joignant l'équation du n° 159, au système des équations (1) et (2) du n° précédent.

Au moyen de ces équations, on déterminera les valeurs de

$$x' - x, \quad y' - y, \quad z' - z,$$

pour les substituer dans l'expression

$$\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2},$$

qui sera celle du rayon cherché, que je représenterai par u.

Si l'on pose d'abord pour abréger

---

sujetti à se mouvoir d'une manière quelconque dans l'espace; tel est l'énoncé le plus concis de la formation des surfaces développables.

En joignant aux équations (1″) et (2″) la différentielle de la seconde, prise seulement par rapport à m, afin de passer au point commun à deux intersections successives des plans générateurs, on aura pour ce point,

$$o = x\Phi''(m) + y\Psi''(m) \quad (3'');$$

et si l'on élimine m entre les équations (1″), (2″) et (3″), on obtiendra l'arête de rebroussement de la surface développable (161).

La famille des surfaces développables ne renferme pas toutes celles qui sont engendrées par le mouvement d'une droite; il y a en outre les *surfaces gauches* ou *réglées*: *voyez*, sur ce sujet, le Traité in-4°, t. I, page 606, et t. III, page 666.

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = Z,$$
$$dz\,d^2x - dx\,d^2z = Y,$$
$$dy\,d^2z - dz\,d^2y = X,$$

en indiquant chacune de ces expressions par la lettre qui ne s'y trouve point, l'équation du plan osculateur (159) deviendra

$$X(x'-x) + Y(y'-y) + Z(z'-z) = 0;$$

et en la combinant avec celle du premier plan normal, n° précédent, on en tirera d'abord les valeurs de $x'-x$ et de $y'-y$ en $z'-z$, qu'on mettra dans l'équation du second plan normal, qui donnera

$$z'-z = \frac{X\,dy - Y\,dx}{D}\,ds^2,$$

où

$$D = (Y\,dz - Z\,dy)\,d^2x + (Z\,dx - X\,dz)\,d^2y + (X\,dy - Y\,dx)\,d^2z,$$

puis

$$x'-x = \frac{(Y\,dz - Z\,dy)\,ds^2}{D},$$
$$y'-y = \frac{(Z\,dx - X\,dz)\,ds^2}{D};$$

et substituant ces valeurs dans l'expression de u^2, on trouvera

$$u^2 = \frac{[(X\,dy - Y\,dx)^2 + (Z\,dx - X\,dz)^2 + (Y\,dz - Z\,dy)^2]\,ds^4}{D^2}.$$

Cela fait, on s'assurera aisément que

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0,$$

et en ajoutant le quarré de cette expression au premier facteur du numérateur de u^2, on aura

$$u^2 = \frac{(X^2 + Y^2 + Z^2)ds^6}{D^2}.$$

On verra aussi, en développant la valeur de D, qu'elle se réduit à $X^2 + Y^2 + Z^2$: on obtiendra donc pour dernier résultat

$$u^2 = \frac{ds^6}{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

L'intersection de deux plans normaux consécutifs, étant perpendiculaire au plan du cercle qui passe par les trois points pris sur la courbe proposée, en est l'axe, et chacun de ses points peut servir à décrire le cercle, en prenant pour rayon la distance de ce point à ceux du cercle; mais parmi tous ces rayons, on distingue sous le nom de *rayon de courbure absolu*, celui qui est dans le plan même du cercle, et que nous venons de trouver.

Les valeurs de x', y' et z', feront connaître la position du centre de courbure; et en éliminant x, y et z, on obtiendra les équations de la courbe formée par tous ces centres; mais cette courbe n'est point la développée de la proposée, lorsque celle-ci n'est pas plane (*).

La formule précédente donnant, comme cas particulier, la courbure de l'intersection d'une surface et d'un plan quelconque, se rattache à ce qu'on a vu sur la courbure des surfaces (151). Je me bornerai ici au cas où le plan coupant passe par la normale à la surface proposée; je prendrai le plan tangent pour celui des xy, et pour origine des coordonnées le point où l'on cherche la courbure. Par cette hypothèse on a $dz = 0$ et aussi

(*) *Voyez* pages 625 et 630 du Ier vol. du Traité in-4°.

$d^2y=0$, à cause que le plan coupant étant perpendiculaire sur le plan tangent, l'intersection du premier avec la surface, se projette en ligne droite sur le second. Faisant ensuite dx constant, il en résulte

$$Z=0,\quad Y=-dxd^2z,\quad X=dyd^2z,\quad ds^2=dx^2+dy^2,$$

$$u^2=\frac{(dx^2+dy^2)^2}{d^2z^2};$$

mais si l'on pose en général $dz=pdx+qdy$, on en déduira, dans l'hypothèse actuelle,

$$\begin{aligned} d^2z &= d(pdx+qdy)=dpdx+dqdy \\ &= (r+2sm+tm^2)dx^2, \end{aligned}$$

suivant la notation du n° 151, où $dy=mdx$; et de là résulte

$$u=\pm\frac{1+m^2}{r+2sm+tm^2}.$$

Cette expression dépendant de m, change de valeur avec la direction du plan coupant, et peut, en conséquence, être susceptible de *maximum* ou de *minimum*. En égalant à zéro sa différentielle relative à m, on trouve

$$(r+2sm+tm^2)m-(1+m^2)(s+tm)=0,$$

ce qui se réduit à

$$sm^2+(r-t)m-s=0;$$

ainsi les valeurs de m sont ici les mêmes qu'au n° 151. De plus, l'élimination de m conduirait entre u, r, s, t, à ce que deviendrait l'équation (f) (152), si on y faisait $p=0$, $q=0$, $\delta=u$, en sorte que les deux valeurs de δ appartiennent aux sections normales de plus grande et de moindre courbure.

164. La seconde courbure, ou la seconde flexion des courbes qui ne sont pas planes, est la courbure des surfaces développables formées par leurs tangentes, et indiquée par les angles compris entre les plans osculateurs, comme leur première flexion l'est par les angles compris entre leurs tangentes. Or, les droites qui sont les intersections des plans normaux, étant perpendiculaires aux plans osculateurs, comprennent entre elles le même angle que ces derniers; de plus, comme elles forment, par leurs rencontres, l'arête de rebroussement de la surface des plans normaux, elles sont aussi les tangentes de cette arête, qui font, par conséquent, entre elles des angles égaux à ceux des plans osculateurs correspondans; ainsi la *seconde flexion de la courbe proposée est égale à la première flexion de l'arête de rebroussement des plans normaux.* Cette relation remarquée par M. Fourier, est réciproque entre les deux courbes, puisque les tangentes de la proposée comprennent évidemment entre elles des angles égaux à ceux que forment ses plans normaux, qui sont les plans osculateurs de l'arête de rebroussement de la surface développable qu'ils composent.

Ce serait ici le lieu de parler des points singuliers que peuvent présenter les courbes à double courbure; mais cette discussion me mènerait trop loin; je me contenterai de faire observer qu'elles sont susceptibles de deux sortes d'inflexions: l'une qui se rapporte à leur première courbure, se manifeste comme dans les courbes planes, par le changement de signe de leur rayon de courbure absolu; l'autre, par celui du rayon de courbure de la surface de leurs tangentes, ou de l'arête de rebroussement de la surface de leurs plans normaux.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET DE CALCUL INTÉGRAL.

SECONDE PARTIE.

CALCUL INTÉGRAL.

De l'intégration des fonctions rationnelles d'une seule variable.

165. Le Calcul intégral est l'inverse du Calcul différentiel; il a pour but de remonter des coefficiens différentiels aux fonctions dont ils dérivent. L'exposition des principes de ce Calcul présente des divisions analogues à celles qu'offre le Calcul différentiel. Il peut arriver que la composition des coefficiens différentiels de la fonction cherchée, soit donnée immédiatement par les variables indépendantes, ou qu'on ait seulement une équation entre quelques-uns de ces coefficiens et une ou plusieurs des variables : le premier cas étant le plus simple, c'est celui qu'il convient de traiter d'abord.

Lorsque le coefficient différentiel du premier ordre d'une fonction de x, est donné en x, on a

$$\frac{dy}{dx} = X, \quad \text{ou} \quad dy = X dx;$$

la fonction cherchée est donc celle dont la différentielle est $X dx$, et on l'indique comme ci-dessous :

$$y = \int X dx,$$

la caractéristique $\int$ étant l'inverse de la caractéristique d (*).

Cela posé, les diverses formes que peut avoir la fonction donnée X se classent ainsi qu'il suit : fonctions rationnelles,

$$Ax^m + Bx^n + Cx^p + \ldots = U,$$
$$\frac{Ax^m + Bx^n + Cx^p + \ldots}{A'x^{m'} + B'x^{n'} + C'x^{p'} + \ldots} = \frac{U}{V};$$

fonctions irrationnelles,

$$U, \sqrt[n]{V};$$

fonctions transcendantes,

$$f(U, \log V), \quad f(U, \sin V), \quad \text{etc.}$$

166. On voit d'abord que pour effectuer l'intégra-

(*) Ceux qui ont écrit les premiers sur le Calcul intégral, ont employé la lettre $\int$ comme l'initiale du mot *somme*, parce que, suivant les idées de Leibnitz, les différentielles représentant les accroissemens infiniment petits des variables (6), il s'ensuit qu'une variable quelconque est la somme du nombre infini d'accroissemens qu'elle a reçus depuis son origine jusqu'au moment où on la considère; et c'est pour cela qu'on a donné à la fonction que j'ai appelée *primitive*, le nom d'*Intégrale*, comme étant le résultat de l'agrégation de toutes les différentielles : on verra plus loin qu'elle est, en toute rigueur, la *limite* de leurs sommes : ces dénominations étant bien entendues, on peut se servir indifféremment de l'une ou de l'autre.

tion, il faut renverser les règles qui ont servi à différentier ; or, par la première de ces règles, on a

$$d(u+v-w)=du+dv-dw \quad (10),$$

et si l'on intègre le premier membre, en y supprimant la caractéristique d, on trouve

$$u+v-w=\int(du+dv-dw),$$

ce qui revient à

$$\int du+\int dv-\int dw=\int(du+dv-dw),$$

d'où il résulte que

$$\int(Pdx+Qdx-Rdx)=\int Pdx+\int Qdx-\int Rdx,$$

c'est-à-dire que *l'intégrale de la somme de plusieurs fonctions différentielles, est égale à la somme des intégrales de chacune de ces fonctions.*

De même, $d.au=adu$ (11) donne $au=\int adu$, et par conséquent $\int adu=a\int du$, d'où $\int aXdx=a\int Xdx$: l'on peut donc faire sortir du signe $\int$ la constante a.

167. La différentielle de Ax^m+B étant $mAx^{m-1}dx$, on en conclura que l'intégrale de ax^ndx est $\frac{ax^{n+1}}{n+1}+B$; car en comparant ax^ndx avec $mAx^{m-1}dx$, on a

$$m-1=n, \quad \text{et} \quad mA=a, \quad \text{où} \quad A=\frac{a}{m}=\frac{a}{n+1}.$$

Il résulte de cet exemple, que lorsque

$$dy=ax^ndx, \quad y=\frac{ax^{n+1}}{n+1}+B,$$

c'est-à-dire, que *pour intégrer la différentielle monome* ax^ndx, *il faut augmenter l'exposant de la variable d'une unité, puis diviser par le nouvel exposant et par* dx.

La constante B est demeurée arbitraire, comme on devait s'y attendre (7).

168. Avant d'aller plus loin, il est à propos d'examiner un cas particulier, dans lequel la règle ci-dessus est en défaut; c'est celui où $n = -1$. Il vient alors

$$y = \frac{ax^0}{0} + B = \frac{a}{0} + B;$$

mais si l'on fait attention que

$$dy = ax^{-1}dx = \frac{adx}{x} = ad.lx \quad (29),$$

on reconnaîtra bientôt que

$$y = alx + B,$$

et que l'exception que présente ici la règle du n° précédent, tient à l'impossibilité d'exprimer la transcendante lx en un nombre fini de termes algébriques.

Néanmoins, un simple changement de forme dans la constante B, suffit pour rattacher ce cas particulier à la formule générale; car si l'on écrit $-\frac{a}{n+1} + B$ au lieu de B, ce qui est permis, puisque cette constante est arbitraire, la formule générale est alors

$$y = \frac{ax^{n+1} - a}{n+1} + B,$$

et devient $\frac{0}{0}$ quand $n = -1$: mais si l'on y applique le procédé du n° 95, en prenant n pour variable, on obtiendra la vraie valeur

$$y = alx + B,$$

la même que ci-dessus.

169. L'expression

$$dy = ax^m dx + bx^n dx - cx^p dx \ldots\ldots$$

qui représente une différentielle rationnelle et entière, quelconque d'ailleurs, conduit à

$$y = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{bx^{n+1}}{n+1} - \frac{cx^{p+1}}{p+1}, \ldots + B,$$

d'après les règles des n°s 166 et 167.

Je n'ajoute qu'une constante arbitraire; car il est aisé de voir que si l'on en ajoutait une pour chaque monome, elles n'équivaudraient toutes ensemble qu'à une seule, qui serait égale à leur somme.

170. Si l'on avait $dy = (ax+b)^m dx$, on développerait la puissance indiquée, et l'on intégrerait chaque monome qui résulterait de cette opération; mais il est bon d'observer qu'on peut arriver au résultat sans effectuer le développement. Il suffit de faire $ax+b=z$, ce qui donne $x = \frac{z-b}{a}$, $dx = \frac{dz}{a}$; substituant dans l'expression de dy, on trouve $dy = \frac{z^m dz}{a}$, et par conséquent $y = \frac{z^{m+1}}{a(m+1)} + B$. Mettant pour z sa valeur, on aura donc, lorsque

$$dy = (ax+b)^m dx, \quad y = \frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)} + B.$$

Pour $dy = (ax^n + b)^m x^{n-1} dx$, la transformation réussit encore; car en posant $ax^n + b = z$, il en résulte $nax^{n-1}dx = dz$, d'où

$$x^{n-1}dx = \frac{dz}{na}, \quad dy = \frac{z^m dz}{na}, \text{ et } y = \frac{z^{m+1}}{na(m+1)} + B,$$

ce qui donne, lorsque

$$dy = (ax^n + b)^m x^{n-1} dx, \quad y = \frac{(ax^n+b)^{m+1}}{na(m+1)} + B.$$

171. Je passe aux fonctions fractionnaires, et pour commencer par le cas le plus simple, je suppose qu'on

ait $dy = \frac{Ax^m dx}{(ax+b)^n}$. En faisant $ax+b=z$, on trouve

$$x = \frac{z-b}{a}, \quad dx = \frac{dz}{a},$$

et par conséquent

$$dy = \frac{A(z-b)^m dz}{a^{m+1} z^n};$$

développant la puissance $(z-b)^m$, multipliant le résultat par dz, et divisant après par z^n, on aura une suite de monomes à intégrer.

Prenons pour exemple le cas où $m=3$ et $n=2$; il viendra

$$dy = \frac{A(z-b)^3 dz}{a^4 z^2} = \frac{A}{a^4}[z dz - 3b dz + 3b^2 z^{-1} - b^3 z^{-2} dz]:$$

en appliquant à chacun de ces monomes la règle générale (167), il en résultera

$$y = \frac{A}{a^4}\left[\frac{z^2}{2} - 3bz + 3b^2 lz + b^3 z^{-1}\right] + B.$$

On remettra ensuite pour z sa valeur, et l'on aura enfin, lorsque

$$dy = \frac{Ax^3 dx}{(ax+b)^2},$$

$$y = \frac{A}{a^4}\left[\tfrac{1}{2}(ax+b)^2 - 3b(ax+b) + 3b^2 l(ax+b) + b^3(ax+b)^{-1}\right] + B.$$

On construirait sans peine la formule générale; et si l'on avait

$$dy = \frac{Ax^n dx + Bx^p dx + Cx^q dx \ldots\ldots}{(ax+b)^m},$$

on l'écrirait comme il suit,

$$dy = \frac{Ax^n dx}{(ax+b)^m} + \frac{Bx^p dx}{(ax+b)^m} + \frac{Cx^q dx}{(ax+b)^m} \ldots\ldots,$$

puis on opérerait sur chaque terme en particulier, comme je viens de le faire sur le premier.

172. Les différentielles fractionnaires et rationnelles sont en général de la forme

$$\frac{(Ax^m + Bx^n + Cx^p \ldots .)dx}{A'x^{m'} + B'x^{n'} + C'x^{p'} \ldots .},$$

que, pour abréger, je représenterai par $\frac{Udx}{V}$. Il faut d'abord observer que l'exposant de x dans le numérateur peut être supposé moindre que dans le dénominateur; car si cela n'était pas, en divisant U par V, et nommant Q le quotient de cette division et R le reste, il viendrait $\int \frac{Udx}{V} = \int Qdx + \int \frac{Rdx}{V}$; mais Q étant une fonction rationnelle et entière, $\int Qdx$ s'obtiendrait par l'application immédiate de la règle du n° 167, et il ne resterait plus à trouver que $\int \frac{Rdx}{V}$, dans laquelle la fonction R est, par rapport à x, d'un degré moins élevé que la fonction V. La forme la plus générale que puisse avoir la fraction $\frac{Udx}{V}$, sera donc

$$\frac{(Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \ldots + T)dx}{x^n + A'x^{n-1} + B'x^{n-2} + C'x^{n-3} \ldots + T'}.$$

La méthode générale pour intégrer les différentielles exprimées par des fractions rationnelles, consiste à les décomposer en d'autres dont les dénominateurs soient plus simples, qu'on désigne sous le nom de *fractions partielles*, et qu'on obtient comme il suit.

En égalant à zéro le dénominateur de la fraction proposée, on formera l'équation

$$x^n + A'x^{n-1} + B'x^{n-2} \ldots \ldots + T' = 0,$$

et concevant qu'on ait déterminé les diverses racines de cette équation, on les représentera par

$$a,\quad a',\quad a'',\quad a''',\quad \text{etc.},$$

en supposant qu'elles soient toutes inégales; par ce moyen, le premier membre de l'équation ci-dessus, ou le dénominateur de la fraction proposée, sera mis sous la forme d'un produit de n facteurs

$$x-a,\quad x-a',\quad x-a'',\quad x-a''',\quad \text{etc.}$$

Cela fait, on regardera la fraction proposée comme la somme des fractions

$$\frac{N\mathrm{d}x}{x-a},\quad \frac{N'\mathrm{d}x}{x-a'},\quad \frac{N''\mathrm{d}x}{x-a''},\quad \text{etc.},$$

ayant pour dénominateurs les facteurs du dénominateur de la proposée, et pour numérateurs des constantes indéterminées.

Je suppose, pour fixer les idées, que la différentielle à intégrer soit

$$\frac{(Ax^2+Bx+C)\mathrm{d}x}{x^3+A'x^2+B'x+C'},$$

et qu'on ait trouvé

$$x^3+A'x^2+B'x+C'=(x-a)(x-a')(x-a'').$$

En réduisant au même dénominateur les fractions

$$\frac{N\mathrm{d}x}{x-a},\quad \frac{N'\mathrm{d}x}{x-a'},\quad \frac{N''\mathrm{d}x}{x-a''},$$

et en les ajoutant il viendra

$$\frac{N(x-a')(x-a'')+N'(x-a)(x-a'')+N''(x-a)(x-a')}{(x-a)(x-a')(x-a'')}\mathrm{d}x;$$

le dénominateur sera le même que celui de la proposée, et le numérateur sera nécessairement une fonction du

degré inférieur à celui du numérateur, c'est-à-dire, du second degré. En développant, on a en effet

$$\{(N+N'+N'')x^2-[N(a'+a'')+N'(a+a'')+N''(a+a')]x + Na'a''+N'aa''+N''aa'\}dx.$$

Cette fonction étant comparée avec le numérateur de la fraction proposée, donne les trois équations

$$\begin{aligned} N+N'+N'' &= A, \\ -N(a'+a'')-N'(a+a'')-N''(a+a') &= B, \\ Na'a''+N'aa''+N''aa' &= C, \end{aligned}$$

qui ne sont que du premier degré, par rapport aux indéterminées N, N' et N''.

Pour les résoudre, il suffit de multiplier la première par a^2, la seconde par a, et d'ajouter les produits avec la troisième; on trouve de cette manière,

$$\begin{aligned} Aa^2+Ba+C &= N[a^2-(a'+a'')a+a'a''] \\ &= N(a-a')(a-a''), \end{aligned}$$

d'après les lois de la composition des équations, et par conséquent,

$$N=\frac{Aa^2+Ba+C}{(a-a')(a-a'')},$$

où *le numérateur est ce que devient celui de la fraction proposée, quand on y change* x *en* a, *et le dénominateur, le produit des différences entre la racine* a *et toutes les autres.*

Suivant cette loi, on aura, sans calcul,

$$N'=\frac{Aa'^2+Ba'+C}{(a'-a)(a'-a'')}, \quad N''=\frac{Aa''^2+Ba''+C}{(a''-a)(a''-a')},$$

et il ne serait pas difficile de s'assurer qu'elle convient au cas général; mais nous y parviendrons bientôt encore plus facilement.

Cela posé, puisque

$$\frac{(Ax^2+Bx+C)\,dx}{x^3+A'x^2+B'x+C'}=\frac{N\,dx}{x-a}+\frac{N'\,dx}{x-a'}+\frac{N''\,dx}{x-a''},$$

on fera d'abord $x-a=z$, et l'on aura $\frac{N\,dx}{x-a}=\frac{N\,dz}{z}$, dont l'intégrale est $N\mathrm{l}z$, ou $N\mathrm{l}(x-a)$. On trouvera de même que

$$\int\frac{N'\,dx}{x-a'}=N'\mathrm{l}(x-a'),\quad \int\frac{N''\,dx}{x-a''}=N''\mathrm{l}(x-a'');$$

et l'on aura par conséquent

$$\int\frac{(Ax^2+Bx+C)\,dx}{x^3+A'x^2+B'x+C'}$$
$$=N\mathrm{l}(x-a)+N'\mathrm{l}(x-a')+N''\mathrm{l}(x-a'')+const.$$
$$=\mathrm{l}\left[(x-a)^N(x-a')^{N'}(x-a'')^{N''}\right]+const.$$

173. L'intégration des fractions rationnelles n'a donc aucune difficulté, lorsqu'elles sont décomposées comme on vient de le voir, en fractions partielles, dont les dénominateurs sont des binomes du premier degré; mais cette forme n'est possible que pour les facteurs qui sont simples dans le dénominateur de la fraction proposée. En effet, la supposition de $a'=a$, dans l'exemple du n° précédent, rend infinies les valeurs de N, N', et cela tient à ce que, dans l'ensemble des fractions partielles

$$\frac{N}{x-a}+\frac{N'}{x-a}=\frac{N+N'}{x-a},$$

la somme des indéterminées $N+N'$ se comportant comme une seule, il ne s'en trouve plus un nombre suffisant.

On obvie à cet inconvénient, en substituant à ces deux fractions, qui n'en font plus qu'une, la suivante,

$$\frac{(Nx+N')\mathrm{d}x}{(x-a)^2};$$

et en la réduisant au même dénominateur avec la dernière, $\frac{N''\mathrm{d}x}{x-a''}$, on obtient encore un nombre d'équations égal à celui des inconnues N, N' et N''.

L'intégration de la nouvelle fraction n'offre d'ailleurs aucune difficulté, puisqu'en faisant $x-a=z$, on retombe sur des monomes, comme dans le dernier exemple du n° 171, dont celui-ci n'est qu'un cas particulier.

En général, si le dénominateur V de la fraction proposée contenait le facteur $(x-a)^m$, il faudrait prendre pour ce facteur, une fraction partielle de la forme

$$\frac{(Nx^{m-1}+N_1x^{m-2}+N_2x^{m-3}\ldots+N_{m-1})\mathrm{d}x}{(x-a)^m},$$

qu'on intégrerait en posant

$$x-a=z, \quad \text{d'où} \quad x=a+z, \quad \mathrm{d}x=\mathrm{d}z.$$

Mais le résultat de cette substitution, étant de la forme

$$\frac{(M+M_1z+M_2z^2\ldots+M_{m-1}z^{m-1})\mathrm{d}z}{z^m},$$

revient à

$$\frac{M\mathrm{d}z}{z^m}+\frac{M_1\mathrm{d}z}{z^{m-1}}+\frac{M_2\mathrm{d}z}{z^{m-2}}\ldots+\frac{M_{m-1}\mathrm{d}z}{z},$$

et montre qu'on peut substituer à la première fraction, les suivantes

$$\frac{M\mathrm{d}x}{(x-a)^m}+\frac{M_1\mathrm{d}x}{(x-a)^{m-1}}+\frac{M_2\mathrm{d}x}{(x-a)^{m-2}}\ldots+\frac{M_{m-1}\mathrm{d}x}{x-a},$$

dont les numérateurs sont des constantes, et qui s'intègrent aussi par le procédé du n° 171.

174. Cette dernière forme et celle qui répond aux facteurs inégaux (172), sont les plus simples dans lesquelles on puisse décomposer les fractions rationnelles à intégrer, et donnent lieu à une opération subsidiaire qui se divise en deux parties. La première, qui consiste à déterminer les facteurs du dénominateur V, dépend, comme nous l'avons déjà dit, de la résolution de l'équation $V = 0$ (172); la seconde partie, qui est la détermination des numérateurs des fractions partielles, s'effectue par plusieurs procédés, dont voici le plus élémentaire.

Ayant mis à part un facteur simple $x - a$ du dénominateur, on pose

$$V = (x-a)Q \quad \text{et} \quad \frac{U}{V} = \frac{N}{x-a} + \frac{P}{Q},$$

P étant une fonction de x, provenant de la réduction au même dénominateur de toutes les fractions autres que $\frac{N}{x-a}$, qui entrent dans la proposée; ce sera par conséquent une fonction entière par rapport à x. Mais en réduisant au même dénominateur, les deux membres de la dernière équation posée ci-dessus, on aura

$$U = NQ + (x-a)P, \quad \text{d'où} \quad P = \frac{U - NQ}{x-a};$$

et puisque P est une fonction entière de x, il faudra que $U - NQ$ soit divisible par $x - a$, ce qui ne peut avoir lieu, suivant le théorème fondamental de la composition des équations, à moins que le polynome $U - NQ$ ne s'évanouisse lorsqu'on y change x en a.

Si donc on désigne par u et par q ce que deviennent U et Q, après cette substitution qui ne change rien à N, puisque c'est une constante, on aura

$$u - Nq = 0, \quad \text{et} \quad N = \frac{u}{q},$$

expression dont la valeur sera toujours finie; car son numérateur et son dénominateur ne sauraient devenir nuls, puisque la fraction étant réduite à sa plus simple expression, le facteur $x - a$ ne fera point partie de U, et n'entrera pas non plus dans Q, puisqu'il ne se trouve qu'une fois dans V: il sera donc toujours possible d'obtenir la fraction partielle correspondante à un facteur de cette sorte.

Si l'on met au lieu de U ce qu'il représente (172), et qu'on observe que

$$Q = (x-a')(x-a'')(x-a''') \text{ etc.},$$

on obtient

$$N = \frac{u}{q} = \frac{Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + Ca^{n-3} \ldots + T}{(a-a')(a-a'')(a-a''') \text{ etc.}},$$

expression qui rentre dans la loi annoncée plus haut (172).

175. Voyons maintenant comment on peut trouver les numérateurs des fractions partielles qui répondent aux facteurs égaux. Soit $V = Q(x-a)^m$; posons

$$\frac{U}{V} = \frac{N}{(x-a)^m} + \frac{N_1}{(x-a)^{m-1}} + \frac{N_2}{(x-a)^{m-2}} \ldots + \frac{N_{m-1}}{x-a} + \frac{P}{Q}$$

(173), forme que la détermination des inconnues va justifier. En réduisant au même dénominateur, il viendra

$$U = Q[N + N_1(x-a) + N_2(x-a)^2 \ldots + N_{m-1}(x-a)^{m-1}] + P(x-a)^m,$$

$$P = \frac{U - Q[N + N_1(x-a) + N_2(x-a)^2 \ldots + N_{m-1}(x-a)^{m-1}]}{(x-a)^m};$$

et comme P doit être une fonction entière, il faudra que le numérateur de son expression soit divisible m fois de suite par $x-a$: ce numérateur s'évanouira donc lors-

qu'on y changera x en a. On voit d'abord qu'il se réduit dans ce cas à $U-QN$; mais pour que $U-QN$ soit divisible par $x-a$, il faut, en conservant les mêmes dénominations que dans le n° précédent, qu'on ait $u-qN=0$ ou $N=\frac{u}{q}$.

Cette valeur changera $U-QN$ en $U-\frac{u}{q}Q$, qui, se divisant alors par $x-a$, sera de la forme $U_1(x-a)$, U_1 désignant le quotient; et la suppression du facteur $x-a$, dans les deux termes de P, donnera

$$P=\frac{U_1-Q[N_1+N_2(x-a)\ldots.+N_{m-1}(x-a)^{m-2}]}{(x-a)^{m-1}}.$$

Maintenant pour obtenir N_1, on fera $x-a=0$, et en nommant u_1, ce que devient U_1, par le changement de x en a, on aura $u_1-qN_1=0$, ou $N_1=\frac{u_1}{q}$.

Mettant ensuite au lieu de N_1 sa valeur dans U_1-QN_1, il en résultera la quantité $U_1-\frac{u_1}{q}Q$, qui, s'évanouissant lorsque $x-a=0$, sera divisible par $x-a$, et par conséquent P se réduira à

$$P=\frac{U_2-Q[N_2+N_3(x-a)\ldots.+N_{m-1}(x-a)^{m-3}]}{(x-a)^{m-2}},$$

U_2 représentant le quotient de la division de $U_1-\frac{u_1}{q}Q$ par $x-a$. En continuant la même notation, on trouvera encore $u_2-qN_2=0$, d'où $N_2=\frac{u_2}{q}$, et ainsi des autres, sans tomber jamais sur des valeurs infinies.

176. Le Calcul différentiel facilite beaucoup les opé-

rations précédentes. En effet, si l'on différentie successivement $n-1$ fois l'équation

$$U = Q[N + N_1(x-a) + N_2(x-a)^2 \ldots\ldots\ldots + N_{m-1}(x-a)^{m-1}] + P(x-a)^m,$$

et qu'on fasse ensuite $x-a=0$, dans cette équation et dans celles qu'on en aura déduites, il viendra

$$U = NQ,$$
$$\mathrm{d}U = N\mathrm{d}Q + N_1 Q\mathrm{d}x,$$
$$\mathrm{d}^2U = N\mathrm{d}^2Q + 2N_1\mathrm{d}Q\mathrm{d}x + 2N_2 Q\mathrm{d}x^2,$$
$$\mathrm{d}^3U = N\mathrm{d}^3Q + 3N_1\mathrm{d}^2Q\mathrm{d}x + 6N_2\mathrm{d}Q\mathrm{d}x^2 + 6N_3 Q\mathrm{d}x^3,$$
etc.,

équations qui déterminent chacune des inconnues N, N_1, N_2, etc., par celles qui la précèdent; bien entendu qu'après les différentiations, il faudra changer x en a.

Le moyen le plus simple pour obtenir la valeur de Q, dans ce cas, est de diviser V par $(x-a)^m$; cependant on peut y parvenir par la différentiation; car, puisqu'on a $V = Q(x-a)^m$, en différentiant un nombre m de fois chacun des membres de cette équation, et faisant ensuite $x-a=0$, on trouvera $\mathrm{d}^m V = m(m-1)\ldots 2.1.Q\mathrm{d}x^m$ (57), et par conséquent $Q = \dfrac{\mathrm{d}^m V}{1.2\ldots m\mathrm{d}x^m}$.

On parviendra à l'expression des différentielles de Q dans l'hypothèse de $x-a=0$, en prenant successivement celles de l'ordre $m+1$, $m+2$, etc., de l'équation $V = Q(x-a)^m$; car il est aisé de voir, d'après la remarque du n° 57, que dans ce cas, $\mathrm{d}^{m+1}V = \mathrm{d}^{m+1}.Q(x-a)^m$, par exemple, se réduit à $(m+1)m\ldots 2.1.\mathrm{d}Q\mathrm{d}x^{m+1}$. Il suit de là, qu'on pourra exprimer les indéterminées N_1, N_2, N_3, etc., à l'aide des différentielles du numé-

rateur U et de celles du dénominateur V de la fraction proposée (*).

177. Le fond du calcul ne changerait pas, quand même quelques-unes des racines a, a', a'', etc., ne seraient pas réelles; les imaginaires qui s'introduiraient alors dans les numérateurs des fractions partielles, disparaîtraient par des réductions au même dénominateur; mais il est peut-être plus simple d'éviter ces formes, en ne décomposant le dénominateur V qu'en facteurs réels, ce qui est toujours possible, parce que les facteurs imaginaires d'un polynome quelconque, se groupent deux à deux en facteurs réels du second degré. (*Complément des Élémens d'Algèbre.*)

Ces facteurs peuvent en général être représentés par

$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2;$$

et pour obtenir les fractions partielles correspondantes, il ne faut que modifier très peu les procédés des nos 174 et 175.

Dans le cas d'un facteur simple, on pose

$$\frac{U}{V} = \frac{Mx+N}{x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2} + \frac{P}{Q},$$

d'où l'on tire

$$U = Q(Mx+N) + P(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2),$$

$$P = \frac{U - Q(Mx+N)}{x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2};$$

et raisonnant comme dans le n° 174, puisque P doit

(*) *Voyez* le Traité in-4°, t. II, page 19; *voy.* aussi, dans les *Acta acad. Petropolitanæ*, *an.* 1780, *pars* 1ª, p. 32, comment Euler, au moyen d'un développement analogue à celui de u' dans le n° 92, détermine les numérateurs des fractions partielles, lesquels sont les coefficiens des puissances négatives de h, quand on change P en $\frac{U}{Q}$.

toujours être une fonction entière de x, il faut que la quantité $U - Q(Mx + N)$, soit divisible par..... $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$: elle doit donc renfermer au nombre de ses facteurs, ceux de ce dernier, et s'évanouir par conséquent dans les mêmes circonstances. Mais les racines de $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = 0$, sont

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad x = \alpha - \beta\sqrt{-1},$$

valeurs qui, substituées successivement dans..... $U - Q(Mx + N)$, doivent faire évanouir cette quantité. Soient donc $u \pm u'\sqrt{-1}$, et $q \pm q'\sqrt{-1}$, ce que deviennent U et Q, après cette substitution; on aura

$$u \pm u'\sqrt{-1} - (q \pm q'\sqrt{-1})[M(\alpha \pm \beta\sqrt{-1}) + N] = 0 \ (*),$$

équation double, à cause du signe $\pm$ dont sont affectés plusieurs de ses termes, et qui est équivalente à celles qu'on formerait, en égalant séparément à zéro la partie réelle et la partie imaginaire. D'après cette considération, on aura

$$u - (q\alpha - q'\beta)M - qN = 0,$$
$$u' - (q'\alpha + q\beta)M - q'N = 0,$$

équations qui donneront les valeurs de M et de N.

178. Si le facteur $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$, que, pour abréger, je représenterai par R, se trouve plusieurs fois dans le dénominateur V, et qu'on ait

$$V = Q(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^m = QR^m,$$

on prendra dans ce cas (175),

$$\frac{Mx + N}{R^m} + \frac{M_1 x + N_1}{R^{m-1}} + \frac{M_2 x + N_2}{R^{m-2}} \cdot \cdots \cdots + \frac{P}{Q};$$

(*) En développant les puissances $(\alpha + \beta\sqrt{-1})^m$ et $(\alpha - \beta\sqrt{-1})^m$, on verra que les expressions telles que $Ax^m + Bx^n - Cx^p +$ etc., doivent en effet prendre la forme supposée.

réduisant au même dénominateur, et tirant la valeur de P, il viendra

$$P=\frac{U-Q[Mx+N+(M_1x+N_1)R+(M_2x+N_2)R^2+\ldots]}{R^{m-1}}.$$

En raisonnant dans ce cas comme dans les précédens, on conclura que le numérateur de cette expression doit s'évanouir par la supposition de $x=\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$, qui rend aussi $R=0$; et gardant les mêmes dénominations que ci-dessus, on aura, après cette opération,

$$u\pm u'\sqrt{-1}-(q\pm q'\sqrt{-1})[M(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})+N]=0,$$

ce qui donnera, pour déterminer M et N, les mêmes équations que dans le n° précédent. Ayant trouvé les valeurs de ces quantités, on les substituera dans le numérateur de P; et les termes $U-Q(Mx+N)$ étant divisibles par R, ou $x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$, l'expression entière le deviendra aussi. Nommant donc U_1 le quotient de $U-Q(Mx+N)$ par $x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$, on sera conduit à

$$P=\frac{U_1-Q[M_1x+N_1+(M_2x+N_2)R+\ldots]}{R^{m-1}}.$$

En remettant, dans ce nouveau numérateur, pour x ses valeurs $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$, puis égalant le résultat à zéro, M_1 et N_1 seront déterminées comme l'ont été plus haut M et N, et l'on continuera d'opérer de la même manière, pour parvenir aux valeurs des lettres M_2, N_2, M_3, N_3, etc.

179. Ce cas est parfaitement analogue à celui qu'on a traité dans le n° 175; et le Calcul différentiel s'applique de la même manière, à l'un et à l'autre, au moyen de l'équation

$$U=Q[Mx+N+(M_1x+N_1)R+(M_2x+N_2)R^2+\ldots.]+PR^m,$$

et de ses différentielles, dans lesquelles, jusqu'à l'ordre $m-1$ inclusivement, celles du terme PR^m s'évanouissent lorsqu'on fait $R=0$. On obtiendra de cette manière les équations

$$U=(Mx+N)Q,$$
$$dU=(Mx+N)dQ+MQdx+(M_1x+N_1)QdR,$$
etc.,

chacune desquelles deviendra double, lorsqu'on mettra pour x les valeurs dont il est susceptible en vertu de l'équation $R=0$, ou $x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2=0$. En égalant séparément à zéro, la partie réelle et la partie imaginaire, on obtiendra un nombre suffisant d'équations, pour déterminer M, N, M_1, N_1, etc.

Il faut encore remarquer que de

$$V=QR^m,$$

on tirera

$$d^mV=Qd^m.R^m, \quad \text{d'où} \quad Q=\frac{d^mV}{d^m.R^m},$$

lorsqu'on supposera

$$R \text{ ou } x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2=0.$$

On trouvera dQ, d^2Q, etc., dans la même hypothèse, en prenant les différentielles des ordres $m+1$, $m+2$, etc. de l'équation

$$V=QR^m,$$

et supprimant ensuite les termes que cette hypothèse rend nuls.

180. Pour intégrer la fraction

$$\frac{(Mx+N)dx}{x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2},$$

on observera que

$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = (x-\alpha)^2 + \beta^2,$$

on fera

$$x - \alpha = z,$$

et il viendra

$$\frac{(Mx+N)\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{(Mz+M\alpha+N)\mathrm{d}z}{z^2+\beta^2} = \frac{(Mz+N')\mathrm{d}z}{z^2+\beta^2},$$

en posant

$$M\alpha + N = N'.$$

Mais

$$\frac{(Mz+N')\mathrm{d}z}{z^2+\beta^2} = \frac{Mz\mathrm{d}z}{z^2+\beta^2} + \frac{N'\mathrm{d}z}{z^2+\beta^2};$$

la première partie du second membre de l'équation ci-dessus est intégrable; car, en faisant $z^2 + \beta^2 = u$, on a $z\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}u}{2}$, ce qui donne

$$\int \frac{Mz\mathrm{d}z}{z^2+\beta^2} = \frac{M}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = M.\frac{1}{2}lu = Ml\sqrt{z^2+\beta^2}.$$

Quant à la seconde partie, si l'on y fait $z = \beta u$, elle se change en

$$\frac{N'\mathrm{d}z}{z^2+\beta^2} = \frac{N'}{\beta}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1};$$

mais on a vu, n° 36, que $\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ est la différentielle de l'arc dont la tang $= u$: donc

$$\int \frac{N'}{\beta}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \frac{N'}{\beta}\,\mathrm{arc}\,(\mathrm{tang} = u) + const.$$

$$= \frac{N'}{\beta}\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{z}{\beta}\right) + const.$$

En réunissant ces deux résultats, on obtiendra

$$\int\frac{(Mz+N')\mathrm{d}z}{z^2+\beta^2}=M\mathrm{l}\sqrt{z^2+\beta^2}+\frac{N'}{\beta}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{z}{\beta}\right)+const.$$

Il est bon de remarquer que l'arc dont la tangente est $\frac{z}{\beta}$ a pour sinus $\frac{z}{\sqrt{z^2+\beta^2}}$, pour cosinus $\frac{\beta}{\sqrt{z^2+\beta^2}}$ (*Trig.* 29); car cette considération offre le moyen de présenter l'intégrale proposée sous plusieurs formes, en désignant l'arc par son sinus ou par son cosinus.

Lorsqu'on remet pour z sa valeur, on trouve

$$\int\frac{(Mx+N)\mathrm{d}x}{x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}=$$

$$M\mathrm{l}\sqrt{x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}+\frac{M\alpha+N}{\beta}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{x-\alpha}{\beta}\right)+const.$$

Venons maintenant à la différentielle

$$\frac{(Mx+N)\mathrm{d}x}{(x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^m};$$

on fera d'abord $x-\alpha=z$ et $M\alpha+N=N'$; par ce moyen on n'aura plus à trouver que $\int\frac{(Mz+N')\mathrm{d}z}{(z^2+\beta^2)^m}$, qui peut s'écrire ainsi :

$$M\int\frac{z\mathrm{d}z}{(z^2+\beta^2)^m}+N'\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+\beta^2)^m}.$$

La première partie est intégrable immédiatement; et cela se voit en faisant $z^2+\beta^2=u$, puisqu'on a

$$z\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{d}u}{2},$$

d'où l'on tire

$$M\int\frac{z\mathrm{d}z}{(z^2+\beta^2)^m}=\frac{M}{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{u^m}=\frac{Mu^{-m+1}}{2(1-m)}.$$

Quant à la seconde partie, elle est comprise dans une classe de formules dont nous nous occuperons bientôt, et au moyen desquelles on ramène son intégration à celle de la formule $\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{m-1}}$ (200), où l'exposant du dénominateur est moindre d'une unité, et ainsi de suite jusqu'à $\int\frac{dz}{z^2+\beta^2}$, déjà obtenue.

En rapprochant les résultats précédens, on remarquera sans doute que les différentielles qui se présentent sous la forme de fractions rationnelles, peuvent toujours s'intégrer, soit algébriquement, soit par le moyen des logarithmes ou des arcs de cercle.

181. Je vais donner maintenant une appli[illegible] qui précède. Soit la fraction

$$\frac{dx}{x^8+x^7-x^4-x^3};$$

les facteurs de son dénominateur sont facile[illegible] vrir; car il peut se mettre sous la forme

$$x^3(x^5+x^4-x-1)=x^3(x+1)(x^4-[illegible]$$

Le facteur x^4-1, se décompose en x^2-1 [illegible] ou $x-1$, $x+1$ et x^2+1 : on a donc

$$x^8+x^7-x^4-x^3=x^3(x-1)(x+1)^2(x^2+1),$$

et par conséquent la fraction proposée est décomposable comme il suit (172, 173) :

$$\frac{A\,dx}{x-1}+\frac{B\,dx}{(x+1)^2}+\frac{C\,dx}{x+1}$$
$$+\frac{D\,dx}{x^3}+\frac{E\,dx}{x^2}+\frac{F\,dx}{x}+\frac{(Gx+H)\,dx}{x^2+1}.$$

En réduisant au même dénominateur, et comparant le résultat avec $\frac{dx}{x^8+x^7-x^4-x^3}$, on déterminerait les numérateurs inconnus; mais je vais faire usage des autres procédés indiqués ci-dessus.

Pour cela, je considère séparément les quatre facteurs

$$x-1, \quad (x+1)^2, \quad x^3 \quad \text{et} \quad x^2+1,$$

qui forment le dénominateur de la fraction proposée. Au premier répond une fraction de la forme $\frac{N}{x-1}$; les quantités $U=1$ et $Q=x^3(x+1)^2(x^2+1)$, lorsqu'on y fait $x=1$, donnent $u=1$, $q=8$: on a donc (174) $N=\frac{1}{8}$, et pour la première fraction partielle $\frac{1}{8}\frac{1}{x-1}$.

J'observerai qu'on aurait trouvé immédiatement la valeur de q, en différentiant le dénominateur..... $x^8+x^7-x^4-x^3$, et faisant ensuite $x=1$ (176).

Au facteur $(x+1)^2$ répondent deux fractions partielles de la forme

$$\frac{N}{(x+1)^2}+\frac{N_1}{x+1} \quad (175);$$

ayant alors $Q=x^3(x-1)(x^2+1)$, je fais $x+1=0$, d'où $x=-1$, $q=4$, et $\frac{u}{q}=\frac{1}{4}$: ainsi la seconde fraction partielle est $\frac{1}{4}\frac{1}{(x+1)^2}$.

Mettant dans $U-NQ$, au lieu de N sa valeur $\frac{1}{4}$, pour obtenir l'expression de U_1 (175), j'ai

$$U_1 = \frac{U + NQ}{x+1} = \frac{4 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3}{4(x+1)}$$
$$= \frac{-x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + 4}{4},$$

d'où il vient $\frac{u_1}{q} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$; on a donc pour la troisième fraction partielle $\frac{9}{8}\frac{1}{x+1}$.

Pour appliquer ici le Calcul différentiel, on formerait (176) l'équation

$$1 = Q[N + N_1(x+1)] + P(x+1)^2,$$

qu'il suffirait de différentier une fois; et posant ensuite $x = -1$, il viendrait

$$1 = NQ,$$
$$0 = N\,dQ + N_1 Q\,dx;$$

Q étant $x^6 - x^5 + x^4 - x^3$, la première de ces équations donnerait $N = \frac{1}{4}$, et la seconde $N_1 =$

Le facteur x^3 fournit les trois fractions partielles

$$\frac{N}{x^3} + \frac{N_1}{x^2} + \frac{N_2}{x},$$

qu'on détermine au moyen de l'équation

$$1 = Q[N + N_1 x + N_2 x^2] + Px^3$$

et de ses différentielles première et seconde. En observant que $Q = x^5 + x^4 - x - 1$, et faisant $x = 0$, dans Q, dQ et d^2Q, on obtient

$$N = -1, \quad N_1 = 1, \quad N_2 = -1 :$$

on a donc $-\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$.

Il ne reste plus à trouver que la fraction partielle

correspondante au facteur x^2+1, et dont la forme est $\frac{Mx+N}{x^2+1}$. On pourrait la conclure en retranchant de la proposée toutes les précédentes; mais je vais y parvenir directement par les formules du n° 177. On a d'abord $Q=x^3(x-1)(x+1)^2=x^6+x^5-x^4-x^3$; puis le facteur x^2+1, étant égalé à zéro, donne

$$x=\pm\sqrt{-1},\quad \alpha=0,\quad \beta=1,\quad \text{d'où l'on tire}$$

$$q\pm q'\sqrt{-1}=-2\pm 2\sqrt{-1},\quad u=1,\ \text{et}\ u'=0;$$

les équations qui déterminent M et N deviennent

$$1+2M+2N=0,\quad 2M-2N=0;$$

et l'on trouve par conséquent $M=N=-\frac{1}{4}$.

Voilà donc la fraction proposée, $\frac{dx}{x^6+x^5-x^4-x^3}$, décomposée dans les suivantes :

$$\frac{1}{8}\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{4}\frac{dx}{(x+1)^2}+\frac{9}{8}\frac{dx}{x+1}$$
$$-\frac{dx}{x^3}+\frac{dx}{x^2}-\frac{dx}{x}-\frac{1}{4}\frac{(x+1)dx}{x^2+1}.$$

L'intégration de chacune de celles-ci ne présente aucune difficulté, et l'on obtiendra pour résultat

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{8}l(x-1)-\frac{1}{4}\frac{1}{x+1}\\&+\frac{9}{8}l(x+1)+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}-lx\\&-\frac{1}{8}l(x^2+1)-\frac{1}{4}\operatorname{arc}(\operatorname{tang}=x)+\textit{const.}\end{aligned}\right\}.$$

La réunion de tous les termes algébriques produira la fraction $\frac{2-2x-5x^2}{4x^2(1+x)}$, et celle des termes logarith-

miques donnera

$$\tfrac{1}{8}\mathrm{l}(x-1)+\tfrac{1}{8}\mathrm{l}(x+1)+\mathrm{l}(x+1)-\tfrac{1}{8}\mathrm{l}(x^2+1)-\mathrm{l}x$$
$$=\frac{1}{8}\mathrm{l}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)+\mathrm{l}\left(\frac{x+1}{x}\right);$$

on aura donc

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^8+x^7-x^4-x^3}=\frac{2-2x-5x^2}{4x^2(1+x)}+\frac{1}{8}\mathrm{l}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$
$$+\mathrm{l}\left(\frac{x+1}{x}\right)-\tfrac{1}{4}\mathrm{arc}\,(\mathrm{tang}=x)+const.$$

De l'intégration des fonctions irrationnelles.

182. Les fonctions irrationnelles doivent être regardées comme intégrées, toutes les fois que, par quelque transformation, on les a rendues rationnelles, ou du moins lorsqu'on les a ramenées à une suite de moyennes irrationnels; car alors on peut y appliquer immédiatement les règles précédentes.

Soit pour exemple $\dfrac{(1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})^2}{1+\sqrt[3]{x}}$. Il est évident qu'en faisant $x=z^6$, toutes les extractions indiquées s'effectuent, et l'on a $\dfrac{6z^5\mathrm{d}z(1+z^2-z^3)}{1+z^2}$, divisant par $1+z^2$, il vient

$$-6\left[z^7\mathrm{d}z-z^6\mathrm{d}z-z^5\mathrm{d}z+z^4\mathrm{d}z-z^2\mathrm{d}z+\mathrm{d}z-\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}\right],$$

dont l'intégrale est

$$-6\left[\frac{z^8}{8}-\frac{z^7}{7}-\frac{z^6}{6}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^3}{3}+z-\mathrm{arc}(\mathrm{tang}=z)\right]+const.;$$

et remettant pour z sa valeur $\sqrt[6]{x}$, on obtient

$$-\tfrac{6}{8}x\sqrt[6]{x^5}+\tfrac{6}{7}x\sqrt[6]{x}+x-\tfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt[6]{x^3}-6\sqrt[6]{x}$$
$$+6\operatorname{arc}(\operatorname{tang}=\sqrt[6]{x})+const.$$

183. La première espèce de fonctions irrationnelles dont je vais m'occuper est celle qui ne renferme que le radical $\sqrt{A+Bx+Cx^2}$, et qui ne saurait avoir que l'une ou l'autre des formes $Xdx\sqrt{A+Bx+Cx^2}$, et $\frac{Xdx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}$, X étant une fonction rationnelle de x. Il faut d'abord remarquer que l'une de ces formes rentre dans l'autre; car l'on peut écrire la première ainsi qu'il suit,

$$Xdx\frac{\sqrt{A+Bx+Cx^2}\times\sqrt{A+Bx+Cx^2}}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}=\frac{X(A+Bx+Cx^2)dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}},$$

et le numérateur du résultat est alors une fonction rationnelle.

Avant d'indiquer les moyens de rendre rationnelle, par rapport à x, l'expression $\sqrt{A+Bx+Cx^2}$, je mettrai la quantité $A+Bx+Cx^2$, sous la forme

$$C\left(\frac{A}{C}+\frac{B}{C}x+x^2\right);$$

et faisant pour abréger

$$C=\gamma^2,\quad \frac{A}{C}=\alpha,\quad \frac{B}{C}=\beta,$$

il en résultera $\sqrt{A+Bx+Cx^2}=\gamma\sqrt{\alpha+\beta x+x^2}$.

Cela posé, si l'on prend

$$\sqrt{\alpha+\beta x+x^2}=z-x,$$

en élevant au quarré, il viendra $\alpha+\beta x=z^2-2xz$, ce qui donnera $x=\frac{z^2-\alpha}{\beta+2z}$, d'où

$$\sqrt{A+Bx+Cx^2}=\gamma(z-x)=\gamma\left(\frac{\alpha+\beta z+z^2}{\beta+2z}\right),$$

$$dx=\frac{2(\alpha+\beta z+z^2)dz}{(\beta+2z)^2}.$$

Par le moyen de ces valeurs, on changera la différentielle $\frac{Xdx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}$ en une autre de la forme Zdz, Z étant une fonction rationnelle de z, et réelle tant que C sera positif; mais si C était négatif, γ deviendrait imaginaire, et la transformée pourrait le devenir aussi.

Dans ce cas, on aurait $\sqrt{A+B[illegible]-C[illegible]}$, et [illegible]

$$C=\gamma^2,\quad \frac{A}{C}=\alpha,\quad \frac{B}{C}=\beta;$$

il viendrait $\gamma\sqrt{\alpha+\beta x-x^2}$. La q[illegible] peut toujours se décomposer en f[illegible] mier degré; si on les représente [illegible] il est évident que

$$\alpha+\beta x-x^2=-(x^2-\beta x-\alpha)=(x-[illegible])(a'-x)$$

Faisant ensuite $\sqrt{(x-a)(a'-x)}=$ [illegible] vant au quarré les deux membres de cette équation, elle deviendra divisible par $x-a$, et l'on aura.... $a'-x=(x-a)z^2$, d'où l'on tirera

$$x=\frac{az^2+a'}{z^2+1},\quad (x-a)z=\frac{(a'-a)z}{z^2+1},\quad dx=\frac{2(a-a')zdz}{(z^2+1)^2},$$

valeurs qui rendront encore rationnelle la différentielle proposée.

184. Je prends d'abord pour exemple la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}$; la première des transformations précédentes donnera $\frac{2dz}{\gamma(\beta+2z)}$, dont l'intégrale est $\frac{1}{\gamma}l(\beta+2z)+const.$ Remettant pour z sa valeur $x+\sqrt{\alpha+\beta x+x^2}$, et pour α, β et γ les quantités qu'ils représentent, il viendra

$$\frac{1}{\sqrt{C}}l\left[\frac{2}{\sqrt{C}}\left(\frac{B}{2\sqrt{C}}+x\sqrt{C}+\sqrt{A+Bx+Cx^2}\right)\right]+const.,$$

résultat auquel on peut donner la forme

$$\frac{1}{\sqrt{C}}l\left[\frac{B}{2\sqrt{C}}+x\sqrt{C}+\sqrt{A+Bx+Cx^2}\right]+\frac{1}{\sqrt{C}}l\frac{2}{\sqrt{C}}+const.,$$

ur réunir ensuite, avec la constante arbitraire, le me constant $\frac{1}{\sqrt{C}}l\frac{2}{\sqrt{C}}$.

185. Soit pour second exemple $\frac{dx}{\sqrt{A+Bx-Cx^2}}$; en ant usage de la dernière transformation du n° 183, on aura $\frac{-2dz}{\gamma(z^2+1)}$, dont l'intégrale est

$$-\frac{2}{\gamma}\text{arc}\,(\text{tang}=z)+const.$$

Substituant au lieu de z, sa valeur $\frac{\sqrt{a'-x}}{\sqrt{x-a}}$, tirée de l'équation

$$a'-x=(x-a)z^2;$$

et mettant $\sqrt{C}$ pour γ, on obtiendra

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A+Bx-Cx^2}} = -\frac{2}{\sqrt{C}}.\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{\sqrt{a'-x}}{\sqrt{x-a}}\right) + const.,$$

a et a' étant les racines de l'équation

$$x^2 - \frac{B}{C}x - \frac{A}{C} = 0.$$

Si l'on prend $A = C = 1$ et $B = 0$, la différentielle proposée devient, dans ce cas particulier, $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, et la formule précédente donne pour son intégrale $-2.\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\right) + const.$, car a et a' étant alors les racines de $x^2 - 1 = 0$, il faut prendre $a = -1$ et $a' = 1$, pour ne pas tomber dans l'imaginaire.

Je vais montrer que ce résultat revient à l'arc dont le sinus $= x$, et dont on sait que $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ exprime la différentielle (36). Pour cela, je rappellerai que

$$\text{tang } 2A = \frac{2\text{tang } A}{1-\text{tang } A^2} \quad (Trig.\ 69),$$

d'où il suit que l'arc double de celui dont la tangente est $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, dans la formule précédente a pour tangente $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, et que par conséquent il est le complément de l'arc dont $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ serait la tangente et x le sinus (*Trig.* 9). Nommant donc s ce dernier, on aura

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = s - \frac{\pi}{2} + const.,$$

et comprenant l'arc $-\frac{\pi}{2}$ dans la constante arbitraire, il viendra $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = s + const.$

En général, dans tous les cas où l'on obtient deux intégrales diverses en apparence, pour la même différentielle, la différence ne peut porter que sur la constante arbitraire; car si deux fonctions V et X sont telles que $dX = dV$, ou $dX - dV = d(X-V) = 0$, il faut nécessairement que $X - V = const.$

186. On peut ramener immédiatement la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{A+Bx-Cx^2}} = \frac{dx}{\gamma\sqrt{\alpha+\beta x-x^2}}$ à celle d'un arc de cercle; car en faisant d'abord $x - \frac{\beta}{2} = z$, on aura $\frac{dz}{\gamma\sqrt{\alpha+\frac{1}{4}\beta^2-z^2}}$; posant ensuite $\alpha+\frac{1}{4}\beta^2 = g^2$ et $z = gu$, on trouvera $\frac{du}{\gamma\sqrt{1-u^2}}$, dont l'intégrale est $\frac{1}{\gamma}$.arc(sin $= u$) $+ const.$

187. L'intégration de la formule $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ peut aussi s'effectuer au moyen des logarithmes, et conduit alors, par des expressions imaginaires, à une relation très remarquable entre l'arc, le sinus et le cosinus.

En comparant cette formule avec $\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}$, on trouve $A = 1$, $B = 0$, $C = -1$, et l'intégrale générale devient (184)

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} l\left(x\sqrt{-1} + \sqrt{1-x^2}\right) + const.$$

Si l'on représente par z l'arc dont $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ est la différentielle, on aura donc

$$z = \frac{1}{\sqrt{-1}} l\,(x\sqrt{-1} + \sqrt{1-x^2}) + const.$$

Mais si l'on veut que cet arc soit nul en même temps que x, il faut supprimer la constante arbitraire ; car, en faisant $x = 0$, le second membre se réduit à cette constante, à cause que $l\,1 = 0$ (*).

Cela posé, en observant que x étant le sinus de l'arc z, $\sqrt{1-x^2}$ en est le cosinus, l'équation ci-dessus deviendra

$$z\sqrt{-1} = l\,(\cos z + \sqrt{-1}\,\sin z)\,;$$

et si l'on suppose z négatif, comme

$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z,$$

(*) Il peut n'être pas inutile de montrer que cette [illegible] s'obtient immédiatement en posant

$$\sqrt{1-x^2} = t - x\sqrt{-1}$$

d'où il suit

$$1 = t^2 - 2tx\sqrt{-1}$$

puis en différentiant, et divisant par 2

$$0 = (t - x\sqrt{-1})dt - [illegible]$$

d'où l'on conclut

$$\frac{dx}{t - x\sqrt{-1}} = \frac{dt}{t\sqrt{-1}}$$

et par conséquent

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dx}{t - x\sqrt{-1}} = \int \frac{dt}{t\sqrt{-1}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} lt + const.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}} l\,(\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{-1}) + const.$$

on aura encore

$$-z\sqrt{-1} = l(\cos z - \sqrt{-1}\sin z),$$

en sorte que

$$\pm z\sqrt{-1} = l(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z).$$

Prenant dans chaque membre, au lieu des logarithmes, les nombres correspondans, il viendra

$$e^{\pm z\sqrt{-1}} = \cos z \pm \sqrt{-1}\sin z,$$

équation qui peut se vérifier en y substituant au lieu de l'exponentielle, du cosinus et du sinus, leurs développemens tirés des n°s 27 et 37.

Si l'on considère à part les équations

$$e^{z\sqrt{-1}} = \cos z + \sqrt{-1}\sin z,$$
$$e^{-z\sqrt{-1}} = \cos z - \sqrt{-1}\sin z,$$

pour les ajouter, on en tirera

$$\cos z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2};$$

et en retranchant la seconde de la première, il en résultera

$$\sin z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Ces expressions ne sont au fond que de purs symboles algébriques, représentant, sous une forme abrégée, les séries du n° 37; mais quoiqu'on ne puisse leur assigner de valeur sous aucune forme finie, ils ne s'en prêtent pas moins au calcul avec la plus grande facilité, et manifestent toutes les propriétés dont jouissent les lignes trigonométriques qu'ils expriment.

En mettant nz au lieu de z, dans l'équation

$$e^{\pm z\sqrt{-1}} = \cos z \pm \sqrt{-1}\,\sin z,$$

elle devient

$$e^{\pm nz\sqrt{-1}} = \cos nz \pm \sqrt{-1}\,\sin nz;$$

mais on a aussi

$$e^{\pm nz\sqrt{-1}} = (e^{\pm z\sqrt{-1}})^n = (\cos z \pm \sqrt{-1}\,\sin z)^n;$$

donc

$$(\cos z \pm \sqrt{-1}\,\sin z)^n = \cos nz \pm \sqrt{-1}\,\sin nz.$$

Ces équations conduisent à des résultats très importans (*); ici je m'arrêterai sur l'usage qu'on en peut faire pour découvrir les facteurs de la fonction $x^n \mp a^n$, parce que cette recherche est nécessaire dans l'intégration de la formule $\frac{x^m dx}{x^n \mp a^n}$.

188. La fonction $x^n \mp a^n$ se transforme en $a^n(y^n \mp$ lorsqu'on fait $x = ay$; et pour en connaître les facteurs il suffit de résoudre l'équation

$$y^n \mp 1 = 0,$$

qui revient à

$$y^n = \pm 1.$$

L'expression

$$y = \cos z + \sqrt{-1}\,\sin z$$

satisfait à cette équation, par une détermination très simple de l'arc z; car l'on a

$$y^n = (\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n = \cos nz + \sqrt{-1}\sin nz;$$

et comme, en désignant par π la demi-circonférence, et par m un nombre entier quelconque, il vient

(*) *Voyez* la note *B*, à la fin de l'ouvrage.

$$\sin m\pi = 0, \quad \cos m\pi = \pm 1,$$

selon que m est un nombre pair ou impair, on n'aura qu'à supposer $nz = m\pi$, pour obtenir $y^n = \pm 1$.

Afin de distinguer plus particulièrement le cas où le nombre m est pair, de celui où il est impair, on écrit pour le premier $2m$ au lieu de m, et pour le second $2m+1$, et l'on fait

$$nz = 2m\pi, \quad \text{et} \quad nz = (2m+1)\pi.$$

Dans la première hypothèse, il vient

$$y = \cos\frac{2m\pi}{n} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{2m\pi}{n}, \quad y^n = +1,$$

et dans la seconde,

$$y = \cos\frac{(2m+1)\pi}{n} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{(2m+1)\pi}{n}, \quad y^n = -1.$$

189. Au moyen du nombre indéterminé m, on obtient par ce qui précède toutes les valeurs dont y est susceptible; car la première expression, en y faisant

$m=0$, donne $y=1$;

$m=1$, $y=\cos\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n}$;

$m=2$, $y=\cos\frac{4\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{n}$;

.....

$m=n-2$, $y=\cos\frac{(2n-4)\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{(2n-4)\pi}{n}$;

$m=n-1$, $y=\cos\frac{(2n-2)\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{(2n-2)\pi}{n}$.

1°. Passé ce terme, on ne retrouve plus de nouvelles valeurs, mais seulement les précédentes, qui reviennent dans le même ordre. En effet, si l'on suppose $n = m$, il vient seulement $y = \cos 2\pi = 1$, et l'on retombe sur

la première valeur, qui se reproduira toutes les fois qu'on prendra pour m un multiple de n. Faisant ensuite $m = n + 1$, il vient l'arc

$$\frac{(2n+2)\pi}{n} = 2\pi + \frac{2\pi}{n},$$

dont le cosinus et le sinus sont les mêmes que ceux de l'arc $\frac{2\pi}{n}$ (*Trig.* 22), ce qui ramène à la deuxième valeur, et ainsi des autres.

2°. Le tableau ci-dessus semble ne présenter qu'une seule valeur réelle, la première; mais on en trouve une seconde lorsque n est pair, parce qu'on passe alors par $m = \frac{n}{2}$, qui donne $y = \cos\pi + \sqrt{-1}\sin\pi = -1$.

3°. Les valeurs imaginaires du même tableau se groupent deux à deux, savoir, la dernière avec la première, l'avant-dernière avec la seconde, et ainsi de suite, parce que

$$\frac{(2n-2)\pi}{n} = 2\pi - \frac{2\pi}{n}, \quad \frac{(2n-4)\pi}{n} = 2\pi - \frac{4\pi}{n}, \text{ etc.}$$

et qu'en général

$$\cos(2\pi - a) = \cos a, \quad \sin(2\pi - a) = -\sin a \quad (Trig.\ 8).$$

Ainsi, quand n est un nombre impair [illegible] pair, toutes les racines imaginaires de [illegible] jusqu'à $m = n - 1$, se réunissent en $\frac{n-1}{2}$ couples de la forme

$$y = \cos\frac{2m\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2m\pi}{n},$$

où il suffit d'étendre les valeurs de m jusqu'à..... $\frac{n-1}{2}$.

Quand n est un nombre pair, il se forme seulement $\frac{n-2}{2}$ couples, parce que la racine qui répond à $\frac{n}{2}$, et qui est réelle, occupe le milieu de celles qui sont imaginaires.

On arrive à des conséquences semblables pour l'équation $y^n+1=0$, où

$$y=\cos\frac{(2m+1)\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{(2m+1)\pi}{n},$$

formule dans laquelle

$m=0$, donne $y=\cos\frac{\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{n}$;

$m=1$, $y=\cos\frac{3\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{3\pi}{n}$;

.....

$m=n-2$, $y=\cos\frac{(2n-3)\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{(2n-3)\pi}{n}$;

$m=n-1$, $y=\cos\frac{(2n-1)\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{(2n-1)\pi}{n}$.

Au-delà de ce terme, on ne retrouve plus que les mêmes valeurs, comme dans le cas précédent, et par la même raison. Il ne peut y en avoir une réelle que si n est impaire, et alors elle répond à

$$m=\frac{n-1}{2} \text{ qui donne } y=\cos\pi+\sqrt{-1}\sin\pi=-1.$$

Comme elle occupe le milieu du tableau, les racines imaginaires qui en sont également éloignées, se réunissent en $\frac{n-1}{2}$ couples de la forme

$$y=\cos\frac{(2m+1)\pi}{n}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{(2m+1)\pi}{n},$$

où il suffit de pousser les valeurs de m jusqu'à $m = \frac{n-1}{2}$. Il faut aller jusqu'à $m = \frac{n}{2}$ quand n est paire, parce qu'il n'y a plus que des racines imaginaires.

Si l'on trouvait quelque difficulté à comprendre ces énoncés, on les éclaircirait sur-le-champ, en donnant à n des valeurs particulières.

190. Il est facile de déduire de ce qui précède, les facteurs réels des quantités $y^n \mp 1$.

D'abord la formule

$$y = \cos\frac{2m\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{2m\pi}{n}$$

donne pour facteur du premier degré de la quantité $y^n - 1$, les deux expressions imaginaires

$$\left(y - \cos\frac{2m\pi}{n}\right) - \sqrt{-1}\,\sin\frac{2m\pi}{n},$$

$$\left(y - \cos\frac{2m\pi}{n}\right) + \sqrt{-1}\,\sin$$

et en les multipliant, on obtient l'

$$y^2 - 2y\cos\frac{2m\pi}{n} +$$

qui comprend tous les facteurs r

On trouve de même que les f de la quantité $y^n + 1$, sont

$$y^2 - 2y\cos\frac{(2m+1)\pi}{n} + 1.$$

Il faut observer que ces formules comprennent aussi les facteurs réels du premier degré, mais ils s'y présentent comme doubles ; car si l'on fait $m = 0$ dans la première, elle devient

$$y^2 - 2y + 1 = (y-1)^2;$$

et si n était paire, en prenant $m=\frac{n}{2}$, on trouverait encore

$$y^2+2y+1=(y+1)^2,$$

résultat que donne aussi la seconde formule lorsque n est impaire, et qu'on y fait $m=\frac{n-1}{2}$.

191. Les fonctions de la forme $x^{2n}-2px^n+q$ peuvent être traitées comme celles qui ne renferment que deux termes. En les résolvant à la manière des équations du second degré, on en tirera les facteurs

$$x^n-(p\pm\sqrt{p^2-q}),$$

qui seront réels, tant que p^2 surpassera q, et auxquels on donnera la forme

$$x^n\mp a^n,$$

en prenant successivement pour a^n les valeurs de

$$p+\sqrt{p^2-q}\,;\quad p-\sqrt{p^2-q}\,,$$

abstraction faite de leurs signes : ce cas rentre donc dans les précédens.

Lorsqu'on aura $p^2<q$, on fera $p=\alpha^n$, $q=\beta^{2n}$, $x=\beta y$, et il viendra

$$\beta^{2n}y^{2n}-2\alpha^n\beta^n y^n+\beta^{2n}=\beta^{2n}\left(y^{2n}-\frac{2\alpha^n}{\beta^n}y^n+1\right);$$

mais la condition $p^2<q$ ou $\alpha^{2n}<\beta^{2n}$ donnant $\alpha^n<\beta^n$, la quantité $\frac{\alpha^n}{\beta^n}$ sera une fraction, et pourra par conséquent être prise pour un cosinus. Soit donc δ l'arc correspondant; la fonction proposée deviendra

$$\beta^{2n}(y^{2n}-2y^n\cos\delta+1),$$

et il ne s'agira plus que de résoudre l'équation

$$y^{2n}-2y^n\cos\delta+1=0.$$

1 en tire d'abord

$$y^n = \cos\delta \pm \sqrt{-1}\,\sin\delta;$$

puis prenant

$$y = \cos z \pm \sqrt{-1}\,\sin z,$$

il vient (187)

$$y^n = \cos nz \pm \sqrt{-1}\,\sin nz,$$

et en comparant avec l'autre valeur de y^n, on obtient

$$\cos nz = \cos\delta, \qquad \sin nz = \sin\delta.$$

On satisfait en général à ces relations, en supposant $nz = 2m\pi + \delta$, m étant un nombre entier quelconque, puisque

$$\cos(2m\pi + \delta) = \cos\delta, \qquad \sin(2m\pi + \delta) = \sin\delta:$$

on aura donc

$$z = \frac{2m\pi+\delta}{n}, \quad y = \cos\frac{2m\pi+\delta}{n} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{2m\pi+\delta}{n};$$

et les facteurs du premier degré de la fonction

$$y^{2n} - 2y^n\cos\delta + 1,$$

seront par conséquent compris dans la formule

$$y = \left\{\cos\frac{2m\pi+\delta}{n} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{2m\pi+\delta}{n}\right\}.$$

Si l'on avait $x^{2n} + 2px^n + q = 0$, on ferait encore $\frac{\alpha^n}{\beta^n} = \cos\delta$; mais on prendrait

$$y^{2n} - 2y\cos(\pi - \delta) + 1,$$

puisque $\cos(\pi - \delta) = -\cos\delta$; il viendrait ensuite

$$\cos nz = \cos(\pi - \delta), \quad \sin nz = \sin(\pi - \delta),$$

et par conséquent

$$nx = 2mx + \pi - \delta = (2m+1)\pi - \delta \ (*).$$

De l'intégration des différentielles binomes.

192. Ces différentielles sont représentées par la formule

$$x^{m-1}\mathrm{d}x\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}},$$

dont on ne diminue point la généralité, en supposant que m et n soient des nombres entiers.

Si l'on avait, par exemple, $x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x(a+bx^{\frac{1}{3}})^{\frac{p}{q}}$, on ferait $x=z^6$, d'où il résulterait $6z^7\mathrm{d}z(a+bz^2)^{\frac{p}{q}}$. On peut aussi regarder n comme essentiellement positive, parce que, dans le cas où l'on aurait $x^{m-1}\mathrm{d}x(a+bx^{-n})^{\frac{p}{q}}$, on supposerait $x=\frac{1}{z}$, et il viendrait $-z^{-m-1}\mathrm{d}z(a+bz^n)^{\frac{p}{q}}$.

La formule $x^{m-1}\mathrm{d}x\,(ax^r+bx^n)^{\frac{p}{q}}$, revient encore à la précédente, en divisant par x^r, sous la parenthèse; car on obtient

$$x^{m-1}\mathrm{d}x[x^r(a+bx^{n-r})]^{\frac{p}{q}} = x^{m+\frac{pr}{q}-1}\mathrm{d}x\,(a+bx^{n-r})^{\frac{p}{q}}.$$

Pour chercher dans quels cas $x^{m-1}\mathrm{d}x(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ peut devenir rationnelle, on fait $a+bx^n=z^q$, en sorte que

(*) Les formules des nos 190 et 191 contiennent implicitement les théorèmes de *Cotes* et de *Moivre*, et remplacent avec avantage ces théorèmes, qui ne sont plus maintenant qu'un objet de pure curiosité; je n'ai pas cru par cette raison devoir les insérer ici : on les trouve dans le Traité in-4°, t. I, page 125.

$(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=z^p$; puis on trouve

$$x^n=\frac{z^q-a}{b},\quad x^m=\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}},\quad x^{m-1}dx=\frac{q}{nb}z^{q-1}\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1}dz,$$

et la différentielle proposée devenant par là

$$\frac{q}{nb}z^{p+q-1}dz\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1}$$

on voit alors qu'elle sera rationnelle toutes les fois que $\frac{m}{n}$ sera un nombre entier.

L'expression $x^8dx(a+bx^3)^{\frac{p}{q}}$ satisfait à cette condition, puisque $m=9$, $n=3$, $\frac{m}{n}=3$, et se transforme en

$$\frac{q}{3b}z^{p+q-1}dz\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^3.$$

La différentielle $x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ est susceptible d'une autre forme, en rendant négatif l'exposant de x dans la parenthèse, ou en divisant par x^n la quantité $a+bx^n$; il vient ainsi

$$x^{m-1}dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=x^{m+\frac{np}{q}-1}dx(ax^{-n}+b)^{\frac{p}{q}}.$$

Cela fait, si l'on change n en $-n$, a en b, b en a, m en $m+\frac{np}{q}$ dans la transformée en z, obtenue plus haut, on en déduira l'expression

$$-\frac{q}{na}z^{p+q-1}dz\left(\frac{z^q-b}{a}\right)^{-\frac{m}{n}-\frac{p}{q}-1}$$

qui sera rationnelle si $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ est un nombre entier.

Cela revient à faire immédiatement

$$ax^{-n} + b = z^q, \quad \text{d'où} \quad a + bx^n = x^n z^q,$$

transformation employée par Euler.

C'est à ce cas que se rapporte la différentielle

$$x^4 dx (a + bx^3)^{\frac{1}{3}},$$

pour laquelle

$$\frac{m}{n} = \frac{5}{3}, \quad \frac{p}{q} = \frac{1}{3}, \quad \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{6}{3} = 2.$$

193. Puisqu'il n'est pas possible d'intégrer en général la formule $\int x^{m-1} dx (a + bx^n)^{\frac{p}{q}}$, l'idée qui se présente d'abord est de chercher à la réduire aux cas les plus simples qu'elle peut renfermer.

On y parvient assez facilement, au moyen de l'*intégration par parties*, procédé fécond qui sert à ramener une intégrale à une autre. Il se tire de l'intégration des deux membres de l'équation

$$d.uv = ud\nu + \nu du \quad (11),$$

qui conduit à

$$uv = \int ud\nu + \int \nu du, \quad \text{d'où} \quad \int ud\nu = uv - \int \nu du.$$

On voit par là que si, dans la différentielle Xdx, la fonction X peut se décomposer en deux facteurs P et Q, et que l'on sache intégrer la différentielle Qdx, en nommant ν son intégrale, et faisant $u = P$, on aura

$$\int PQdx = P\nu - \int \nu dP,$$

ce qui ramène la difficulté à intégrer $\int \nu dP$.

194. Pour abréger un peu les résultats, dans l'application de ce qui précède à la formule $x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$, j'écrirai p au lieu de $\frac{p}{q}$, et il faudra supposer que p est un nombre fractionnaire quelconque : on aura alors la formule

$$x^{m-1}dx\,(a+bx^n)^p.$$

Parmi les diverses manières de décomposer cette différentielle en facteurs, je choisis celle qui tend à diminuer l'exposant de x hors de la parenthèse, et qui s'opère en écrivant ainsi,

$$\int x^{m-n}.x^{n-1}dx(a+bx^n)^p,$$

la formule proposée. Par ce moyen, le facteur..... $x^{n-1}dx(a+bx^n)^p$ est intégrable, quel que soit p (170) : en représentant donc ce facteur par $d\nu$, on a

$$\nu=\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{(p+1)nb},\quad\text{et}\quad u=x^{m-n},$$

d'où il résulte

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p=\frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{(p+1)nb}-\frac{m-n}{(p+1)nb}\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^{p+1};$$

or

$$\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^{p+1}=\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^p(a+bx^n)=a\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^p+b\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p;$$

mettant cette dernière valeur dans l'équation précédente, et rassemblant les termes affectés de l'intégrale $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p$, il vient

$$\left(1+\frac{m-n}{(p+1)n}\right)\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p=\frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}-a(m-n)\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^p}{(p+1)nb};$$

d'où l'on tire $(A)\ldots\ldots\ldots\ldots \int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p =$

$$\frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} - a(m-n)\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^p}{b(pn+m)}.$$

Il est aisé de voir que puisqu'on peut ramener, par cette formule, l'intégration de $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p$ à celle de $\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^p$, on ramènera aussi cette dernière à celle de $\int x^{m-2n-1}dx(a+bx^n)^p$, en écrivant $m-n$ à la place de m dans l'équation (A); puis changeant encore m en $m-2n$ dans cette même équation, elle fera connaître $\int x^{m-2n-1}dx(a+bx^n)^p$, au moyen de $\int x^{m-3n-1}dx(a+bx^n)^p$, et ainsi de suite.

En général, un nombre r de réductions conduit à $\int x^{m-rn-1}dx(a+bx^n)^p$, et la dernière formule est

$$\int x^{m-(r-1)n-1}dx(a+bx^n)^p =$$

$$\frac{x^{m-rn}(a+bx^n)^{p+1} - a(m-rn)\int x^{m-rn-1}dx(a+bx^n)^p}{b[pn+m-(r-1)n]}.$$

Il est évident, par cette formule, que si m est un multiple de n, l'intégration de la différentielle $x^{m-1}dx(a+bx^n)^p$ s'effectuera algébriquement, puisqu'alors l'anéantissement du coefficient $m-rn$ fera disparaître la dernière intégrale $\int x^{m-rn-1}dx(a+bx^n)^p$. Ce résultat s'accorde avec celui du n.° 192.

195. On peut obtenir aussi une réduction par laquelle l'exposant de la parenthèse soit diminué de l'unité; pour cela, il suffit d'observer que

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p = \int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p-1}(a+bx^n)$$
$$= a\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p-1} + b\int x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{p-1},$$

et que la formule (A), en y changeant m en $m+n$, et p en $p-1$, donne

$$\int x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{p-1} = \frac{x^m(a+bx^n)^p - am\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p-1}}{b(pn+m)}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation précédente, on aura (B) . . . . . $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p = \frac{x^m(a+bx^n)^p + pna\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p-1}}{pn+m}$.

Avec cette formule, on ôtera successivement du nombre p toutes les unités qu'il peut contenir, simplification qui, jointe à celle que procure la formule (A), fera dépendre l'intégrale

$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p$ de $\int x^{m-rn-1}dx(a+bx^n)^{p-r}$,

rn étant le plus grand multiple de n contenu dans $m-1$, et s le plus grand nombre entier contenu dans p.

L'intégrale $\int x^7dx(a+bx^3)^{\frac{5}{2}}$, par exemple, sera ramenée successivement, par la formule (A), à

$$\int x^4dx(a+bx^3)^{\frac{5}{2}}, \quad \int xdx(a+bx^3)^{\frac{5}{2}};$$

puis la formule (B) fera dépendre $\int xdx(a+bx^3)^{\frac{5}{2}}$ de

$\int xdx(a+bx^3)^{\frac{3}{2}}$, et celle-ci de $\int xdx(a+bx^3)^{\frac{1}{2}}$.

196. Il est évident que si m et p étaient négatifs, les formules (A) et (B) ne rempliraient pas le but pour lequel elles ont été construites : elles augmenteraient alors les exposans de x hors de la parenthèse, et celui de la parenthèse; mais en les renversant, on en trouve qui s'appliquent aux cas dont il s'agit.

On tire de (A),

$$\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^p = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} - b(m+np)\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p}{a(m-n)};$$

et mettant $-m+n$ au lieu de m, il vient (C)

$$\int x^{-m-1}dx(a+bx^n)^p = \frac{x^{-m}(a+bx^n)^{p+1}+b(m-n-np)\int x^{-m+n-1}dx(a+bx^n)^p}{am},$$

formule qui diminue les exposans hors de la parenthèse.

Pour renverser la formule (B), on prend

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p-1} = \frac{x^m(a+bx^n)^p-(m+np)\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p}{pna};$$

puis on écrit $-p+1$ au lieu de p, et il vient (D)

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{-p} = \frac{x^m(a+bx^n)^{-p+1}-(m+n-np)\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{-p+1}}{(p-1)na},$$

formule qui atteint le but proposé.

Les formules (A), (B), (C), (D), deviennent illusoires, lorsque leur dénominateur s'évanouit. Cela arrive pour la formule (A), par exemple, quand $m=-np$: mais dans tous les cas de cette espèce, la différentielle proposée peut se ramener à un monome, ou bien à une fraction rationnelle (*).

197. Soit $\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{1-x^2}}$, m étant un nombre entier positif; la formule (A), en y faisant $a=1$, $b=-1$, $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$, donne

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-2}\sqrt{1-x^2}}{m-1}+\frac{m-2}{m-1}\int \frac{x^{m-3}dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

(*) *Voyez* le Traité in-4°, t. II, page 41.

et mettant m au lieu de $m-1$, il vient

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m}+\frac{m-1}{m}\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Si l'on donne successivement à m différentes valeurs, en commençant par les nombres impairs, on aura

$$\int\frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}+const.,$$

$$\int\frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{2}{3}\int\frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int\frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{5}x^4\sqrt{1-x^2}+\frac{4}{5}\int\frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int\frac{x^7 dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{7}x^6\sqrt{1-x^2}+\frac{6}{7}\int\frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

etc.

On tirera de là

$$\int\frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}+const.,$$

$$\int\frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1.2}{1.3}\right)\sqrt{1-x^2}+const.,$$

$$\int\frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\left(\frac{1}{5}x^4+\frac{1.4}{3.5}x^2+\frac{1.2.4}{1.3.5}\right)\sqrt{1-x^2}+const.,$$

$$\int\frac{x^7 dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\left(\frac{1}{7}x^6+\frac{1.6}{5.7}x^4+\frac{1.4.6}{3.5.7}x^2+\frac{1.2.4.6}{1.3.5.7}\right)\sqrt{1-x^2}+const.,$$

etc.;

la loi de ces valeurs est évidente.

Passant aux valeurs paires de m, et supposant $m=2$, $m=4$, $m=6$, etc., on trouve

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{4} x^3 \sqrt{1-x^2} + \frac{3}{4} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{6} x^5 \sqrt{1-x^2} + \frac{5}{6} \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

etc.

Dans ce cas, toutes les intégrales proposées dépendront de

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}(\sin = x) + const. \quad (36),$$

et en représentant par A l'arc indiqué, on aura

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = A + const.,$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} A + const.,$$

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{4} x^3 + \frac{1.3}{2.4} x\right) \sqrt{1-x^2} + \frac{1.3}{2.4} A + const.,$$

$$\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{6} x^5 + \frac{1.5}{4.6} x^3 + \frac{1.3.5}{2.4.6} x\right) \sqrt{1-x^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6} A + const.,$$

etc.

198. Je vais chercher maintenant les formules qui répondent aux cas où m est négative. On a alors, par la formule (C) (196),

$$\int \frac{x^{-m-1} dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{-m} \sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m} \int \frac{x^{-m+1} dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

et en écrivant $-m$, au lieu de $-m-1$, il vient

$$\int \frac{dx}{x^m \sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(m-1) x^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dx}{x^{m-2} \sqrt{1-x^2}},$$

On ne peut pas supposer $m=1$, puisque cette valeur rend le dénominateur nul; il faut donc chercher *à priori* l'intégrale de $\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$. On la trouvera facilement d'après ce qui a été dit n° 192; on fera $1-x^2=z^2$, d'où il résultera

$$x=\sqrt{1-z^2}, \quad dx=\frac{-zdz}{\sqrt{1-z^2}},$$

et par conséquent

$$\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=\frac{-dz}{1-z^2},$$

équation dont le second membre a pour intégrale

$$-\tfrac{1}{2}l(1+z)+\tfrac{1}{2}l(1-z)=-\tfrac{1}{2}l\left(\frac{1+z}{1-z}\right);$$

remettant au lieu de z sa valeur, on aura

$$-\tfrac{1}{2}l\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right);$$

multipliant par $1+\sqrt{1-x^2}$, les deux termes de la fraction comprise sous le signe l, on obtiendra

$$-\tfrac{1}{2}l\left[\frac{(1+\sqrt{1-x^2})^2}{x^2}\right]=-\tfrac{1}{2}l\left[\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^2\right]$$
$$=-l\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right);$$

on aura donc enfin

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=-l\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)+const.$$

Maintenant, si l'on suppose d'abord $m=3$, $m=5$, etc., il viendra

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}},$$
$$\int\frac{dx}{x^5\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{4x^4}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}},$$
$$\int\frac{dx}{x^7\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{6x^6}+\frac{5}{6}\int\frac{dx}{x^5\sqrt{1-x^2}},$$

etc.

Faisant ensuite $m=2$, $m=4$, $m=6$, etc., on trouvera

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+const.,$$
$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{3x^3}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}},$$
$$\int\frac{dx}{x^6\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{5x^5}+\frac{4}{5}\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}},$$

etc.

De ces deux suites d'équations, on tirera, comme dans le n° précédent, une classe de formules intégrées par logarithmes, et une autre classe qui sera algébrique.

199. La différentielle $x^{m-1}dx(ax^r+bx^n)^p$, se ramenant à la forme $x^{m+pr-1}dx(a+bx^{n-r})^p$ (192), est susceptible des mêmes réductions que celle-ci. J'en donnerai pour exemple l'expression $\frac{x^q dx}{\sqrt{2cx-x^2}}$ qui se présente dans la Mécanique. On a d'abord

$$\int\frac{x^q dx}{\sqrt{2cx-x^2}}=\int x^q dx(2cx-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=\int x^{q-\frac{1}{2}}dx(2c-x)^{-\frac{1}{2}};$$

la formule (*A*) (194), en y faisant

$m=q+\frac{1}{2}$, $n=1$, $p=-\frac{1}{2}$, $a=2c$, $b=-1$,

donne

$$\int x^{q-\frac{1}{2}}dx(2c-x)^{-\frac{1}{2}}=$$
$$-\frac{x^{q-\frac{1}{2}}(2c-x)^{\frac{1}{2}}}{q}+\frac{2c(q-\frac{1}{2})}{q}\int x^{q-\frac{3}{2}}dx(2c-x)^{-\frac{1}{2}};$$

et si l'on observe que

$$x^{q-\frac{1}{2}}=x^{q-1}x^{\frac{1}{2}},\quad x^{q-\frac{3}{2}}=x^{q-1}x^{-\frac{1}{2}},$$

puis qu'on fasse rentrer les puissances fractionnaires de x sous les parenthèses, qu'on changera ensuite en radicaux, on aura la formule

$$\int\frac{x^q dx}{\sqrt{2cx-x^2}}=$$
$$-\frac{x^{q-1}\sqrt{2cx-x^2}}{q}+\frac{(2q-1)c}{q}\int\frac{x^q dx}{\sqrt{2cx-x^2}}.$$

200. Les trois exemples précédens se rapportent aux formules (*A*) et (*C*); on tire des résultats non moins utiles de la formule (*D*) (196), puisqu'elle sert à intégrer la différentielle

$$\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^m}=dz(\beta^2+z^2)^{-m},$$

qui a été mise de côté dans les fractions rationnelles (180); car si l'on fait

$$x=z,\quad a=\beta^2,\quad b=1,\quad m=1,\quad n=2,\quad p=m,$$

la formule (*D*) devient

$$\int dz(\beta^2+z^2)^{-m}=$$
$$\frac{z(\beta^2+z^2)^{-m+1}+(2m-3)\int dz(\beta^2+z^2)^{-m+1}}{(2m-2)\beta^2},$$

d'où il résulte

$$\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^m} = \left\{ \frac{1}{(2m-2)\beta^2} \cdot \frac{z}{(z^2+\beta^2)^{m-1}} \right\} + \frac{2m-3}{(2m-2)\beta^2} \int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{m-1}}.$$

La réduction indiquée dans cette formule s'arrête à $\int \frac{dz}{z^2+\beta^2}$, car si l'on faisait $m=1$, le diviseur $2m-2$ devenant nul, le second membre serait infini. Il est aisé de voir que cette circonstance est du même genre que celle du n° 168, puisque si l'on pouvait passer de $m=1$, à $m=0$, on tomberait sur l'intégrale $\int dz = z$, et l'on aurait algébriquement l'intégrale $\int \frac{dz}{z^2+\beta^2}$, qui est nécessairement transcendante (180).

De l'intégration par les séries.

201. L'intégrale $\int X dx$ s'obtient facilement lorsqu'on a développé la fonction X en série, parce qu'on n'a plus à intégrer que des monomes, auxquels s'applique immédiatement la règle du n° 167. En effet, soit

$$X = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + Dx^{m+3n} + \text{etc.};$$

si l'on multiplie les deux membres de cette équation par dx, et qu'on intègre séparément chaque terme du second, on trouvera

$$\int X dx = \frac{Ax^{m+1}}{m+1} + \frac{Bx^{m+n+1}}{m+n+1} + \frac{Cx^{m+2n+1}}{m+2n+1} + \text{etc.} + const.$$

Lorsqu'on rencontrera dans le développement de X un terme de la forme $\frac{A}{x}$, il en résultera dans l'intégrale, le terme $A lx$ (168).

202. La fonction la plus simple qu'on puisse réduire

en série, est $\frac{1}{a+x}$, ayant pour développement

$$\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}-\frac{x^3}{a^4}+\text{etc.},$$

d'où

$$\int\frac{dx}{a+x}=\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\frac{x^4}{4a^4}+\text{etc.}+const.;$$

mais on sait d'ailleurs que $\int\frac{dx}{a+x}=l(a+x)+const.$: on aura donc

$$l(a+x)=\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\frac{x^4}{4a^4}+\text{etc.}+const.$$

Pour trouver ce qu'exprime la constante, il n'y a qu'à faire $x=0$; il vient, dans cette supposition, $la=const.$, et par conséquent

$$l(a+x)-la=l\left(1+\frac{x}{a}\right)=\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\frac{x^4}{4a^4}+\text{etc.},$$

résultat conforme à celui du n° 29.

Soit la différentielle $\frac{adx}{a^2+x^2}$, qui, pouvant se mettre sous la forme $\frac{\frac{dx}{a}}{1+\frac{x^2}{a^2}}$, appartient à l'arc dont la tangente $=\frac{x}{a}$ (36): en réduisant $\frac{a}{a^2+x^2}$ en série, on obtiendra

$$\frac{a}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}-\frac{x^2}{a^3}+\frac{x^4}{a^5}-\frac{x^6}{a^7}+\text{etc.};$$

et l'intégration donnera ensuite

$$\int \frac{a\,dx}{a^2+x^2} = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{a}\right) + const. =$$
$$\frac{x}{a} - \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} - \frac{x^7}{7a^7} + \text{etc.} + const.$$

Si l'on veut tirer de cette équation la valeur du plus petit des arcs dont la tangente est $\frac{x}{a}$, il faudra supprimer la constante arbitraire, puisque l'arc cherché est nul, lorsque $x = 0$, et l'on aura

$$\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{a}\right) = \frac{x}{a} - \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} - \frac{x^7}{7a^7} + \text{etc.},$$

résultat conforme à celui du n° 38.

En opérant de même sur $\frac{x^m dx}{a^n + x^n}$, on trouve

$$\int \frac{x^m dx}{a^n + x^n} = \frac{x^{m+1}}{(m+1)a^n} - \frac{x^{m+n+1}}{(m+n+1)a^{2n}}$$
$$+ \frac{x^{m+2n+1}}{(m+2n+1)a^{3n}} - \text{etc.} + const.$$

203. Le but de l'intégration par les séries étant de se procurer des valeurs approchées des intégrales qu'on ne peut obtenir rigoureusement, il est important d'avoir plusieurs séries pour exprimer la même intégrale, afin de choisir celle que rend convergente la valeur particulière qu'on se propose de donner à x. Les séries qui procèdent suivant les puissances positives de x dont les exposans vont en croissant, ou *les séries ascendantes*, ne convergent, en général, que dans le cas où la variable x demeure très petite; tandis que celles qui procèdent par des puissances négatives de x, ou les *séries descendantes*, convergent d'autant plus que cette variable est plus grande.

Pour parvenir à une série de cette espèce, dans l'exemple ci-dessus, il faudrait changer l'ordre des termes du binôme $a^n + x^n$, ou mettre x à la place de a dans le développement de $\frac{1}{a^n+x^n}$; on aurait

$$\frac{1}{x^n+a^n} = \frac{1}{x^n} - \frac{a^n}{x^{2n}} + \frac{a^{2n}}{x^{3n}} - \frac{a^{3n}}{x^{4n}} + \text{etc.},$$

et, après avoir multiplié par $x^m dx$ et intégré, il viendrait

$$\int \frac{x^m dx}{x^n+a^n} = -\frac{1}{(n-m-1)x^{n-m-1}} + \frac{a^n}{(2n-m-1)x^{2n-m-1}} - \frac{a^{2n}}{(3n-m-1)x^{3n-m-1}} \pm \text{etc.} + \textit{const.}$$

Cette série serait illusoire, si quelqu'un de ses dénominateurs, compris dans la forme $in-m-1$, s'évanouissait, ce qui arriverait si $m+1$ était un multiple de n; dans ce cas, la différentielle développée contiendrait un terme de la forme $a^{(i-1)n}\frac{dx}{x}$, dont l'intégrale serait $a^{(i-1)n}lx$.

Si l'on fait, dans le résultat ci-dessus, $m=0$, $n=2$ et $a=1$, il devient

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \text{etc.} + \textit{const.};$$

mais quoique l'expression $\frac{dx}{1+x^2}$ soit la différentielle de l'arc dont la tangente est x, il n'en faut pas conclure que la série précédente soit le développement de cet arc, puisqu'elle donne l'infini lorsque $x=0$. La considération de la constante arbitraire lèvera cette difficulté si l'on fait attention que pour connaître la

vraie valeur d'une série, il faut toujours partir du cas où elle est convergente. Or la série

$$-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\text{etc.}$$

l'est d'autant plus, que x est plus grand, et elle s'évanouit lorsque x est infini : à cette limite, l'équation

$$\text{arc}\,(\text{tang}=x)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\text{etc.}+const.,$$

se change en arc de $1^q=\frac{\pi}{2}=const.$, et substituant cette valeur de la constante, on obtient

$$\text{arc}\,(\text{tang}=x)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\text{etc.}$$

On pourrait intégrer aussi la fonction rationnelle $\frac{U\,dx}{V}$ (172), en développant en série l'expression $\frac{U}{V}$; mais ce moyen ne conduirait qu'à des résultats fort compliqués et rarement convergens; d'ailleurs ces calculs sont à peu près inutiles, puisqu'on sait ramener cette différentielle aux logarithmes et aux arcs de cercles, dont on obtient les valeurs par les tables trigonométriques.

204. La formule $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ est facile à intégrer par le développement de la quantité $(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ en série, et il vient pour résultat

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=a^q\left\{\frac{x^m}{m}+\frac{pb}{qa}\frac{x^{m+n}}{m+n}\right.$$
$$\left.+\frac{p(p-q)b^2}{1.2q^2a^2}\frac{x^{m+2n}}{m+2n}+\frac{p(p-q)(p-2q)b^3}{1.2.3q^3a^3}\frac{x^{m+3n}}{m+3n}+\text{etc.}\right\}$$
$$+const.$$

Si l'on voulait obtenir une série descendante par rapport à x, il faudrait donner à la différentielle proposée la forme $x^{m+\frac{pn}{q}-1}dx\,(b+ax^{-n})^{\frac{p}{q}}$, et après avoir développé $(b+ax^{-n})^{\frac{p}{q}}$, multiplié le résultat par $x^{m+\frac{pn}{q}-1}dx$ et intégré, on aurait

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = b^{\frac{p}{q}}\left\{\frac{qx^{m+\frac{pn}{q}}}{mq+np}\right.$$
$$\left.+\frac{pa}{qb}\frac{qx^{m+\frac{(p-q)n}{q}}}{mq+(p-q)n}+\frac{p(p-q)a^2}{1.2q^2b^2}\cdot\frac{qx^{m+\frac{(p-2q)n}{q}}}{mq+(p-2q)n}+\text{etc.}\right\}$$
$$+\textit{const.}$$

Tant que les quantités a et b seront positives toutes deux, ou que q sera un nombre impair, on pourra se servir indifféremment de cette série ou de la précédente; mais lorsque q sera pair, la première formule deviendra imaginaire par le facteur $a^{\frac{p}{q}}$, si a^p est négatif, et la même chose arrivera à la seconde, si b^p est négatif.

205. Soit $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, expression qui est la différentielle de l'arc dont le sinus $=x$ (36); on aura

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^8+\text{etc.},$$

et de là

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7}+\text{etc.}+\textit{const.}$$

En supprimant la constante, la série s'anéantira, lors-

que $x=0$; elle donnera par conséquent la valeur du plus petit des arcs dont le sinus $=x$, comme dans le n° 38.

Voici encore quelques résultats faciles à obtenir, d'après ce qui précède, mais qu'il est bon de connaître.

1°. $\dfrac{dx}{\sqrt{x-xx}}=\dfrac{dx}{\sqrt{x}.\sqrt{1-x}}$; faisant $\sqrt{x}=u$, on a $\dfrac{2du}{\sqrt{1-u^2}}$; mais par la série précédente, il vient

$$\int\frac{2du}{\sqrt{1-u^2}}=2\left(u+\frac{1}{2}\frac{u^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{u^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{u^7}{7}+\text{etc.}\right)+const.;$$

donc

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x-xx}}=2\left(1+\frac{1}{2}\frac{x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^2}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^3}{7}+\text{etc.}\right)\sqrt{x}+const.$$

2°. $dx\sqrt{2ax-x^2}=(2a)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx\left(1-\dfrac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}$;

or

$$\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\frac{x}{2a}-\frac{1.1}{2.4}\frac{x^2}{4a^2}-\frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{x^3}{8a^3}-\text{etc.};$$

donc

$$\int dx\sqrt{2ax-x^2}=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5.2a}-\frac{1.1}{2.4}\frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7.4a^2}\right.$$

$$\left.-\frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{2x^{\frac{9}{2}}}{9.8a^3}-\text{etc.}\right)\sqrt{2a}+const.,$$

ou

$$\int dx\sqrt{2ax-x^2}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\frac{x}{5.2a}-\frac{1.1}{2.4}\frac{x^2}{7.4a^2}\right.$$

$$\left.-\frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{x^3}{9.8a^3}-\text{etc.}\right)2x\sqrt{2ax}+const.$$

3°. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ donne, après la réduction de $\sqrt{1+x^2}$ en série, et l'intégration,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \text{etc.} + const.$$

4°. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = lx - \frac{1}{2.2x^2} - \frac{1.3}{2.4.4x^4} - \frac{1.3.5}{2.4.6.6x^6} - \text{etc.} + const.$$

Cette série, qui renferme la transcendante lx, est d'autant plus convergente que x est plus grande; on peut en obtenir une autre entièrement algébrique, et d'autant plus convergente que x diffère moins de l'unité. Pour cela, il faut faire $x = 1 + u$, ce qui donne

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{du}{\sqrt{2u+u^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int u^{-\frac{1}{2}} du \left(1 + \frac{u}{2}\right)^{-\frac{1}{2}};$$

développant $\left(1+\frac{u}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, multipliant chaque terme par $u^{-\frac{1}{2}}du$, et intégrant, on trouve

$$\int \frac{du}{\sqrt{2u+u^2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2u^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3.2} + \frac{1.3}{2.4}\frac{2u^{\frac{5}{2}}}{5.4} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{2u^{\frac{7}{2}}}{7.8} + \text{etc.}\right) + const.$$

$$= \left(1 - \frac{1.u}{2.3.2} + \frac{1.3.u^2}{2.4.5.4} - \frac{1.3.5.u^3}{2.4.6.7.8} + \text{etc.}\right)\sqrt{2u} + const.;$$

et puisque $u = x - 1$, les termes de cette série sont d'autant plus petits que $x - 1$ est peu considérable.

206. L'utilité de la réduction des différentielles en

série, étant seulement de les transformer dans une suite de termes dont chacun soit intégrable en particulier, il n'est pas toujours nécessaire que les termes de ces séries soient des monomes.

Si l'on a, par exemple,

$$\frac{dx\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}},$$

et que e soit une quantité fort petite, le développement de $\sqrt{1-e^2x^2}$ donne une série très convergente, parce que dans la différentielle proposée x^2 est toujours <1, à cause du radical $\sqrt{1-x^2}$; on trouve

$$\sqrt{1-e^2x^2}=1-\frac{1}{2}e^2x^2-\frac{1.1}{2.4}e^4x^4-\frac{1.1.3}{2.4.6}e^6x^6-\text{etc.},$$

et il vient à intégrer la suite

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\left(1-\frac{1}{2}e^2x^2-\frac{1.1}{2.4}e^4x^4-\frac{1.1.3}{2.4.6}e^6x^6-\text{etc.}\right),$$

dont chaque terme rentre dans la formule $\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$, traitée au n° 197. En substituant au lieu de

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad \int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad \int\frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad \text{etc.},$$

les expressions données dans le n° cité, il en résultera

$$\int\frac{dx\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}=A$$
$$+\frac{1}{2}e^2\left\{\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}A\right\}$$
$$+\frac{1.1}{2.4}e^4\left\{\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1.3}{2.4}x\right)\sqrt{1-x^2}-\frac{1.3}{2.4}A\right\}$$
$$+\frac{1.1.3}{2.4.6}e^6\left\{\left(\frac{1}{6}x^5+\frac{1.5}{4.6}x^3+\frac{1.3.5}{2.4.6}x\right)\sqrt{1-x^2}-\frac{1.3.5}{2.4.6}A\right\}$$
$$+\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\textit{const.}$$

On traiterait d'une manière analogue la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(a+x)}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a+x}},$$

en réduisant en série la quantité

$$\frac{1}{\sqrt{a+x}} = (a+x)^{-\frac{1}{2}};$$

et quant à la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{(2cx-x^2)(b-x)}},$$

qui se rencontre dans la Mécanique, le développement de

$$(b-x)^{-\frac{1}{2}} = b^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{b}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$b^{-\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{1}{2}\frac{x}{b}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^2}{b^2}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^3}{b^3}+\text{etc.}\right\},$$

ramènerait à l'intégration de

$$\int \frac{x^q dx}{\sqrt{2cx-x^2}} \quad (199).$$

De l'intégration des fonctions logarithmiques et exponentielles.

207. Soit d'abord la différentielle $Pdx(lx)^n$, P étant une fonction algébrique de x; l'intégration par parties fournit le moyen de la simplifier en diminuant l'exposant de lx.

En effet, si dans l'expression générale $\int z^n P dx$, on peut intégrer le facteur Pdx, et qu'on pose en conséquence

$$Pdx = dv, \quad u = z^n \quad \text{et} \quad dz = z'dx,$$

la formule $\int u dv = uv - \int v du$ (193) donnera

$$\int z^n P dx = z^n v - n\int z^{n-1} v z' dx \quad (1),$$

résultat où la différentiation a diminué d'une unité l'exposant de z, si toutefois cet exposant est positif.

Le contraire aura lieu s'il est négatif; alors il faudra changer la manière d'opérer, et faire tomber l'intégration sur le facteur z^n, ce qui se peut en observant que l'équation

$$dz = z'dx \text{ donnant } dx = \frac{dz}{z'}, \text{ on a } \int \frac{P dx}{z^n} = \int \frac{P}{z'}\frac{dz}{z^n} = -\frac{P}{(n-1)z'z^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{1}{z^{n-1}} d\frac{P}{z'} \quad (2).$$

208. Pour la différentielle $x^m dx(lx)^n$, on pose

$$x^m dx = dv, \quad \text{d'où} \quad v = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

et l'équation (1) conduit à

$$\int x^m dx(lx)^n = \frac{x^{m+1}(lx)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m dx(lx)^{n-1}.$$

Si dans cette dernière on change successivement n en $n-1$, en $n-2$, etc., on trouvera

$$\int x^m dx(lx)^{n-1} = \frac{x^{m+1}(lx)^{n-1}}{m+1} - \frac{n-1}{m+1}\int x^m dx(lx)^{n-2},$$

$$\int x^m dx(lx)^{n-2} = \frac{x^{m+1}(lx)^{n-2}}{m+1} - \frac{n-2}{m+1}\int x^m dx(lx)^{n-3},$$

etc.

En poursuivant ces réductions, on ôtera de l'exposant n, s'il est fractionnaire, toutes les unités qu'il contient; et l'on peut aussi par leur secours construire la formule générale

$$\int x^m dx(lx)^n = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left\{(lx)^n - \frac{n}{m+1}(lx)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{(m+1)^2}(lx)^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{(m+1)^3}(lx)^{n-3} + \text{etc.}\right\} + const.,$$

qui se terminera toutes les fois que n sera un nombre entier positif.

En prenant $n=1$ et $n=2$, on trouve

$$\int x^m \mathrm{d}x \mathrm{l}x = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left\{\mathrm{l}x - \frac{1}{m+1}\right\} + const.,$$

$$\int x^m \mathrm{d}x (\mathrm{l}x)^2 = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left\{(\mathrm{l}x)^2 - \frac{2}{m+1}\mathrm{l}x + \frac{1.2}{(m+1)^2}\right\} + const.$$

Lorsque $m=-1$, la formule ci-dessus cesse d'être applicable; mais en faisant $\mathrm{l}x = u$, on a

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x}(\mathrm{l}x)^n = \int u^n \mathrm{d}u = \frac{u^{n+1}}{n+1} + const.$$

$$= \frac{1}{n+1}(\mathrm{l}x)^{n+1} + const.;$$

et la même transformation rendrait algébrique la différentielle $\frac{\mathrm{d}x}{x}U$, dans laquelle U désignerait une fonction algébrique de $\mathrm{l}x$.

Lorsque n est négatif ou fractionnaire, la série se prolonge à l'infini; en faisant $n=-\frac{1}{2}$, par exemple, il vient

$$\int \frac{x^m \mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{l}x}} =$$

$$\frac{x^{m+1}}{m+1}\left\{\frac{1}{(\mathrm{l}x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2(m+1)(\mathrm{l}x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1.3}{4(m+1)^2(\mathrm{l}x)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1.3.5}{8(m+1)^3(\mathrm{l}x)^{\frac{7}{2}}} + \text{etc.}\right\} + const.$$

209. Pour diminuer l'exposant de $\mathrm{l}x$, lorsqu'il est négatif, il faut employer la formule (2) du n° 207, avec laquelle on trouve

$$\int\frac{x^m\mathrm{d}x}{(\mathrm{l}x)^n}=-\frac{x^{m+1}}{(n-1)(\mathrm{l}x)^{n-1}}+\frac{m+1}{n-1}\int\frac{x^m\mathrm{d}x}{(\mathrm{l}x)^{n-1}};$$

et répétant cette réduction, en changeant n en $n-1$, en $n-2$, etc., on obtiendra

$$\left.\begin{aligned}\int\frac{x^m\mathrm{d}x}{(\mathrm{l}x)^n}=&-\frac{x^{m+1}}{(n-1)(\mathrm{l}x)^{n-1}}-\frac{(m+1)x^{m+1}}{(n-1)(n-2)(\mathrm{l}x)^{n-2}}\\&-\frac{(m+1)^2x^{m+1}}{(n-1)(n-2)(n-3)(\mathrm{l}x)^{n-3}}\cdots\cdots\\\cdots\cdots&+\frac{(m+1)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots1}\int\frac{x^m\mathrm{d}x}{\mathrm{l}x}\end{aligned}\right\},$$

en supposant que n soit un nombre entier.

Quand $m=-1$, la formule précédente conduit à

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x(\mathrm{l}x)^n}=-\frac{1}{(n-1)(\mathrm{l}x)^{n-1}}+const.,$$

résultat qui devient illusoire lorsque $n=1$; mais la différentielle $\frac{\mathrm{d}x}{x\mathrm{l}x}$ qui répond à ce cas, s'intègre immédiatement, en faisant $\mathrm{l}x=u$, puisqu'elle se transforme en $\frac{\mathrm{d}u}{u}$, et l'on a pour son intégrale $\mathrm{l}(\mathrm{l}x)+const.$

210. L'intégrale $\int\frac{x^m\mathrm{d}x}{\mathrm{l}x}$, de laquelle dépend.... $\int\frac{x^m\mathrm{d}x}{(\mathrm{l}x)^n}$, quand n est un nombre entier, paraît devoir constituer une transcendante à part. On la ramène à une forme plus simple, en faisant $x^{m+1}=z$; car il vient alors $x^m\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}z}{m+1}$, $\mathrm{l}x=\frac{\mathrm{l}z}{m+1}$, et par conséquent $\int\frac{x^m\mathrm{d}x}{\mathrm{l}x}=\int\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{l}z}$.

On trouvera plus bas le développement en série de

cette dernière, qui se rapporte aussi aux fonctions exponentielles, en posant $lz = u$, ce qui donne $z = e^u$, $dz = e^u du$ et $\int \frac{dz}{lz} = \int \frac{e^u du}{u}$.

211. Je vais m'occuper maintenant de l'intégration des fonctions exponentielles; je ferai d'abord remarquer que l'équation $d.a^x = a^x dx la$ (27) donne

$$a^x dx = \frac{1}{la} d.a^x, \quad \text{d'où} \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{la} + const.$$

On tire aussi de là $dx = \frac{d.a^x}{a^x la}$; par ce moyen, la différentielle $V dx$ devenant $\frac{V d.a^x}{a^x la}$, se change en $\frac{V du}{u la}$, lorsqu'on fait $a^x = u$, et est algébrique par rapport à u lorsque V est une fonction algébrique de a^x. On trouve ainsi que $\frac{a^x dx}{\sqrt{1+a^{nx}}} = \frac{du}{la\sqrt{1+u^n}}$.

212. Passons à la formule $\int a^x x^n dx$, de laquelle dépend $\int P a^x dx$, lorsque P est une fonction rationnelle et entière de x. L'équation (1) du n° 207 donne

$$\int a^x x^n dx = \frac{a^x x^n}{la} - \frac{n}{la} \int a^x x^{n-1} dx;$$

et en continuant cette réduction de $n-1$ à $n-2$, etc., on parvient, lorsque n est un nombre entier positif, à

$$\int a^x x^n dx = \frac{a^x}{la}\left\{x^n - \frac{n}{la} x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{(la)^2} x^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{(la)^3} x^{n-3} \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 1}{(la)^n}\right\} + const.$$

213. Si l'exposant n est négatif, l'application de la formule (2) du n° 207, conduit à

$$\int \frac{a^x dx}{x^n} = -\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{la}{n-1}\int \frac{a^x dx}{x^{n-1}};$$

et quand l'exposant n est entier, on obtient

$$\int \frac{a^x dx}{x^n} = -\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a^x la}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} - \frac{a^x (la)^2}{(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-3}} \cdots - \frac{a^x (la)^{n-2}}{(n-1)(n-2)\ldots 1 x} + \frac{(la)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 1}\int \frac{a^x dx}{x}.$$

On ne saurait pousser la réduction au-delà de $\int \frac{a^x dx}{x}$; car l'équation

$$\int \frac{a^x dx}{x^n} = -\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{la}{n-1}\int \frac{a^x dx}{x^{n-1}},$$

ne donne rien, lorsque $n = 1$.

On retombe encore dans cet exemple sur la transcendante $\int \frac{a^x dx}{x}$, dont j'ai déjà parlé n° 210; et si l'on pouvait obtenir son expression, on aurait en même temps l'intégrale $\int a^x x^n dx$, pour tous les cas où n est un nombre entier.

Lorsque n est un nombre fractionnaire, les deux développemens dont on vient de faire usage ne se terminent point. Si l'on avait, par exemple, $n = -\frac{1}{2}$, le premier donnerait la série

$$\int \frac{a^x dx}{\sqrt{x}} = \frac{a^x}{la\sqrt{x}}\left\{1 + \frac{1}{2xla} + \frac{1.3}{4x^2(la)^2} + \frac{1.3.5}{8x^3(la)^3} + \text{etc.}\right\} + const.;$$

et en faisant $n = \frac{1}{2}$ dans le second, on aurait

$$\int \frac{a^x \mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2a^x \sqrt{x} \left\{ \frac{1}{1} - \frac{2x\mathrm{l}a}{1.3} + \frac{4x^2(\mathrm{l}a)^2}{1.3.5} - \frac{8x^3(\mathrm{l}a)^3}{1.3.5.7} + \text{etc.} \right\} + const.$$

214. En remplaçant a^x par son développement (27) dans la fonction $\int P a^x \mathrm{d}x$, on obtiendra

$$\int P a^x \mathrm{d}x = \int P \mathrm{d}x + \frac{\mathrm{l}a}{1} \int P x \mathrm{d}x + \frac{(\mathrm{l}a)^2}{1.2} \int P x^2 \mathrm{d}x + \frac{(\mathrm{l}a)^3}{1.2.3} \int P x^3 \mathrm{d}x + \frac{(\mathrm{l}a)^4}{1.2.3.4} \int P x^4 \mathrm{d}x + \text{etc.},$$

ce qui fournira un nouveau développement de $\int P a^x \mathrm{d}x$, toutes les fois qu'on pourra obtenir les fonctions

$$\int P \mathrm{d}x, \quad \int P x \mathrm{d}x, \ldots . \int P x^n \mathrm{d}x, \text{ etc.}$$

Si $P = x^n$, il viendra

$$\int a^x x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2}\mathrm{l}a}{1(n+2)} + \frac{x^{n+3}(\mathrm{l}a)^2}{1.2(n+3)} + \frac{x^{n+4}(\mathrm{l}a)^3}{1.2.3(n+4)} + \text{etc.} + const.,$$

où il faudra mettre $\mathrm{l}x$ au lieu de $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, lorsque n sera un entier négatif égal à $-i$.

L'application de ce moyen à l'intégrale $\int \frac{a^x \mathrm{d}x}{x}$, donne le développement

$$\int \frac{a^x \mathrm{d}x}{x} = \mathrm{l}x + \frac{x\mathrm{l}a}{1.2} + \frac{x^2(\mathrm{l}a)^2}{1.2.2} + \frac{x^3(\mathrm{l}a)^3}{1.2.3.3} + \frac{x^4(\mathrm{l}a)^4}{1.2.3.4.4} + \text{etc.} + const.,$$

que la supposition de $a^x = z$, d'où il résulte $x = \frac{\mathrm{l}z}{\mathrm{l}a}$ et $\mathrm{l}x = \mathrm{l}\mathrm{l}z - \mathrm{l}\mathrm{l}a$, transforme en

$$\int\frac{dz}{lz}=llz+\frac{lz}{1}+\frac{1}{2}\frac{(lz)^2}{1.2}+\frac{1}{3}\frac{(lz)^3}{1.2.3}+\frac{1}{4}\frac{(lz)^4}{1.2.3.4}+\text{etc.}+const.$$

215. Il y a encore un autre moyen d'intégrer une fonction exponentielle, telle par exemple que $\frac{e^x x dx}{(1+x)^2}$; c'est de chercher à la rapporter à la différentielle de la fonction $e^x P$, qui est $e^x(Pdx+dP)$, et dans laquelle P représente une fonction algébrique de x. C'est principalement la sagacité et l'habitude du calcul qui peuvent guider dans ce procédé. L'exemple proposé étant fort simple, il suffit de faire $1+x=z$: on a alors

$$\frac{e^x x dx}{(1+x)^2}=\frac{e^{z-1}(z-1)\,dz}{z^2}=\frac{1}{e}\left\{e^z\left(\frac{1}{z}dz-\frac{dz}{z^2}\right)\right\};$$

et avec un peu d'attention, on voit bien que $-\frac{dz}{z^2}$ étant la différentielle de $\frac{1}{z}$, il faut prendre $P=\frac{1}{z}$, d'où il résulte l'intégrale $\frac{e^z}{ez}+const.$ Remettant au lieu de z sa valeur, on trouve $\int\frac{e^x x dx}{(1+x)^2}=\frac{e^x}{1+x}+const.$

De l'intégration des fonctions circulaires.

216. Au moyen de l'équation (1) du n° 207, et en observant que

$$\text{d.arc}(\sin=x)=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\quad(36),$$

on trouvera que

$$\int x^n dx \operatorname{arc}(\sin = x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arc}(\sin = x) - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

et $\int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1-x^2}}$ a été traitée dans les nos 197 et 198.

Cet exemple suffit pour montrer que $\int P z dx$, z désignant un arc de cercle et x l'une quelconque des lignes trigonométriques correspondantes à cet arc, pourra être ramenée à l'intégrale d'une différentielle algébrique, toutes les fois que $\int P dx$ sera une fonction algébrique de cette variable, puisque les différentielles de l'arc sont aussi de pareilles fonctions (36).

En supposant toujours que x soit le sinus de l'arc z, on obtient par l'équation (1),

$$\int z^n dx = xz^n - n \int z^{n-1} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int z^{n-1} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -z^{n-1} \sqrt{1-x^2} + (n-1) \int z^{n-2} dx,$$

et ainsi de suite, d'où l'on conclut

$$\int z^n dx = xz^n + nz^{n-1} \sqrt{1-x^2} - n(n-1) z^{n-2} x - n(n-1)(n-2) z^{n-3} \sqrt{1-x^2} + \text{etc.},$$

série qui s'arrête lorsque n est un nombre entier positif.

Si l'on avait $P dx = dz$, l'intégrale $\int P z^n dx$ se changerait en $\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + const.$; et si l'on substituait à z^n une fonction algébrique quelconque de z, l'intégrale considérée par rapport à z rentrerait dans quelqu'une des formules traitées précédemment.

217. Les fonctions qu'on rencontre le plus souvent ne contiennent pas l'arc, mais seulement sa différentielle, et pour les intégrer il faut se rappeler que, par les nos 33

et 34,

$$d.\sin nz = ndz\cos nz, \text{ d'où } \int dz\cos nz = \frac{1}{n}\sin nz + const.$$

$$d.\cos nz = -ndz\sin nz, \quad \int dz\sin nz = -\frac{1}{n}\cos nz + const.$$

$$d.\operatorname{tang} nz = \frac{ndz}{(\cos nz)^2}, \quad \int \frac{dz}{(\cos nz)^2} = \frac{1}{n}\operatorname{tang} nz + const.$$

$$d.\cot nz = -\frac{ndz}{(\sin nz)^2}, \quad \int \frac{dz}{(\sin nz)^2} = -\frac{1}{n}\cot nz + const.$$

$$d.\sec nz = \frac{ndz\sin nz}{(\cos nz)^2}, \quad \int \frac{dz\sin nz}{(\cos nz)^2} = \frac{1}{n}\sec nz + const.$$

$$= \frac{1}{n\cos nz} + const.$$

$$d.\operatorname{cosec} nz = -\frac{ndz\cos nz}{(\sin nz)^2}, \quad \int \frac{dz\cos nz}{(\sin nz)^2} = -\frac{1}{n}\operatorname{cosec} nz + const.$$

$$= -\frac{1}{n\sin nz} + const.$$

218. De ces intégrations résulte d'abord celle de toutes les fonctions rationnelles et entières de sinus et de cosinus, parce que, au moyen des expressions de

$$\sin a\cos b, \quad \cos a\sin b, \quad \sin a\sin b, \quad \cos a\cos b,$$

rapportées dans le tableau des formules trigonométriques (*Trig.* 29), on peut les changer en simples sinus et cosinus.

Soit pour exemple

$$dx\sin(mx+n)\cos(px+q);$$

si l'on fait d'abord

$$a = mx+n, \quad b = px+q,$$

on trouve

$$\sin(mx+n)\cos(px+q) =$$

$$\tfrac{1}{2}\sin[(m+p)x+n+q] + \tfrac{1}{2}\sin[(m-p)x+n-q];$$

et posant

$(m+p)x+n+q=z$, $(m-p)x+n-q=z'$,

d'où

$$dx=\frac{dz}{m+p}, \quad dx=\frac{dz'}{m-p},$$

on n'aura plus à intégrer que la différentielle

$$\frac{1}{2(m+p)}dz\sin z+\frac{1}{2(m-p)}dz'\sin z',$$

qui donnera

$$-\frac{1}{2(m+p)}\cos z-\frac{1}{2(m-p)}\cos z'+const.$$

En remettant pour z et z' leurs valeurs, il viendra

$$-\frac{\cos[(m+p)x+n+q]}{2(m+p)}-\frac{\cos[(m-p)x+n-q]}{2(m-p)}+const$$

Il n'y a pas plus de difficulté pour les sinus et cosinus élevés à des puissances entières et positives, parce que les formules trigonométriques citées convertissent ces puissances en sinus et cosinus d'arcs multiples.

C'est ainsi que la formule

$$\sin a^2=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos 2a,$$

changeant

$$[\sin(mx+n)]^2 \quad \text{en} \quad \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos 2(mx+n),$$

conduit à l'intégration de

$$dx[\sin(mx+n)]^2;$$

car si l'on fait

$$2(mx+n)=z, \quad \text{d'où} \quad dx=\frac{dz}{2m},$$

on obtiendra la différentielle

$$\frac{dz}{2m}\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos z\right),$$

dont l'intégrale

$$\frac{z-\sin z}{4m}+const.=\frac{2(mx+n)-\sin 2(mx+n)}{4m}+const.$$

219. On s'élèverait aisément des expressions de $\sin a^2$ et de $\cos a^2$, à celles de $\sin a^3$ et de $\cos a^3$, et ainsi de proche en proche; mais celles du n° 187 conduisent à des formules qui comprennent tous ces cas particuliers.

En effet, on a d'abord, par cet article,

$$\cos z^n=\frac{(e^{z\sqrt{-1}}+e^{-z\sqrt{-1}})^n}{2^n}, \text{ ou } 2^n\cos z^n=(e^{z\sqrt{-1}}+e^{-z\sqrt{-1}})^n;$$

et si l'on développe le second membre de cette équation, en considérant l'exposant n comme un nombre entier, il viendra

$$2^n\cos z^n=$$

$$e^{nz\sqrt{-1}}+\frac{n}{1}e^{(n-2)z\sqrt{-1}}+\frac{n(n-1)}{1.2}e^{(n-4)z\sqrt{-1}}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}e^{(n-6)z\sqrt{-1}}\ldots+\frac{n}{1}e^{-(n-2)z\sqrt{-1}}+e^{-nz\sqrt{-1}};$$

mais lorsqu'on change z en mz, l'équation

$$e^{\pm z\sqrt{-1}}=\cos z\pm\sqrt{-1}\sin z,$$

donnant

$$e^{\pm mz\sqrt{-1}}=\cos mz\pm\sqrt{-1}\sin mz,$$

fournit le moyen d'exprimer en sinus et cosinus tous les termes du développement ci-dessus, qui peut ensuite s'écrire ainsi :

$$\cos nz+\frac{n}{1}\cos(n-2)z+\frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)z$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos(n-6)z\ldots+\frac{n}{1}\cos-(n-2)z+\cos-nz$$

$$+\sqrt{-1}\left\{\sin nz+\frac{n}{1}\sin(n-2)z+\frac{n(n-1)}{1.2}\sin(n-4)z\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\sin(n-6)z\ldots+\frac{n}{1}\sin-(n-2)z+\sin-nz\right\},$$

et dans lequel les termes affectés de $\sqrt{-1}$ se détruisent comme on va le voir.

1°. Si n est impaire, le nombre de ces termes est pair, et tous ceux qui sont à égale distance des extrêmes ont le même coefficient, mais ils sont de signes contraires, parce que

$$\sin -mz = -\sin mz \quad (Trig.\ 26),$$

quelle que soit m; la première moitié est donc détruite par la seconde, et il ne reste que la partie réelle du développement. Si l'on éprouvait quelque difficulté à concevoir ce qui précède, il suffirait pour la lever, de faire le calcul en assignant à n une valeur particulière, comme 3 ou 5.

Dans cette opération, on verra sans peine que la partie réelle qui forme la valeur de $2^n \cos z^n$, lorsque le nombre n est impair, peut être réduite à la moitié de ses termes, en observant que

$$\cos -mz = \cos mz \quad (Trig.\ 26),$$

d'où il suit que les termes placés à égale distance des extrêmes sont égaux; on peut donc se borner aux termes qui composent la première moitié de la formule, pourvu qu'on les double. De cette manière, on trouve

$$2^n \cos z^n =$$
$$2\cos nz + \frac{2n}{1}\cos(n-2)z + \frac{2n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)z + \text{etc.},$$

ou, en divisant les deux membres par 2,

$$2^{n-1}\cos z^n =$$
$$\cos nz + \frac{n}{1}\cos(n-2)z + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)z + \text{etc.},$$

en s'arrêtant au dernier arc positif, qui est..... $[n-(n-1)]\,z = z$.

2°. Quand l'exposant n est pair, chaque partie du développement a un nombre impair de termes; mais dans la partie imaginaire, celui du milieu étant

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\left(n-\frac{n}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\frac{n}{2}}\sin(n-n)z,$$

s'évanouit : cette partie est donc encore nulle.

Quant au terme du milieu de la partie réelle, comme il est affecté de

$$\cos(n-n)z = \cos 0 = 1,$$

il se réduit à son coefficient, le même que ci-dessus; et à cause qu'il est unique dans la formule, il faut en prendre la moitié, si l'on veut le soumettre au facteur commun 2, supprimé dans le cas précédent, en sorte qu'on peut encore se servir de la même formule que dans ce cas, pouvu qu'on ait soin de ne prendre que la moitié du coefficient du cosinus de l'arc nul qui se présente alors.

Avec cette attention, il sera facile de former les valeurs de la table ci-dessous :

$$\cos z = \cos z,$$
$$2\cos z^2 = \cos 2z + 1,$$
$$4\cos z^3 = \cos 3z + 3\cos z,$$
$$8\cos z^4 = \cos 4z + 4\cos 2z + 3,$$
$$16\cos z^5 = \cos 5z + 5\cos 3z + 10\cos z,$$
$$32\cos z^6 = \cos 6z + 6\cos 4z + 15\cos 2z + 10,$$
$$64\cos z^7 = \cos 7z + 7\cos 5z + 21\cos 3z + 35\cos z,$$
etc.

220. L'expression du sinus (187) donne l'équation

$$\sin z^n = \frac{(e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}})^n}{2^n(\sqrt{-1})^n},$$

et par conséquent

$$2^n(\sqrt{-1})^n \sin z^n = (e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}})^n =$$

$$e^{nz\sqrt{-1}} - \frac{n}{1} e^{(n-2)z\sqrt{-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2} e^{(n-4)z\sqrt{-1}}$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} e^{(n-6)z\sqrt{-1}} \ldots \pm \frac{n}{1} e^{-(n-2)z\sqrt{-1}} \mp e^{-nz\sqrt{-1}},$$

où les termes du dernier membre sont alternativement positifs et négatifs. Lorsqu'on remplace les exponentielles par leurs valeurs en sinus et cosinus (n° précéd.), il vient

$$2^n(\sqrt{-1})^n \sin z^n =$$

$$\cos nz - \frac{n}{1} \cos(n-2)z + \frac{n(n-1)}{1.2} \cos(n-4)z$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cos(n-6)z \ldots \pm \frac{n}{1} \cos -(n-2)z \mp \cos -nz$$

$$+ \sqrt{-1}\left\{ \sin nz - \frac{n}{1} \sin(n-2)z + \frac{n(n-1)}{1.2} \sin(n-4)z \right.$$

$$\left. - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \sin(n-6)z \ldots \pm \frac{n}{1} \sin -(n-2)z \mp \sin -nz \right\},$$

où il faut encore distinguer deux cas.

1°. Lorsque n est impaire, le nombre des termes de chaque partie du développement étant pair, et ceux de la partie réelle ayant, quand ils sont à égale distance des extrêmes, le même coefficient avec des signes contraires, se détruisent, puisque $\cos -mz = \cos mz$. Cette partie réelle est donc nulle. Il n'en est pas de même de la partie imaginaire; les termes placés à égale distance des extrêmes s'ajoutent, parce que ceux de la dernière moitié changent de signe à cause de

$$\sin -mz = -\sin mz.$$

Dans ce cas, l'équation ci-dessus étant ainsi réduite à son premier membre et à la partie imaginaire du second, devient divisible par $\sqrt{-1}$, et les quotiens

$$2^n(\sqrt{-1})^{n-1}\sin z^n =$$

$$\sin nz - \frac{n}{1}\sin(n-2)z + \frac{n(n-1)}{1.2}\sin(n-4)z$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\sin(n-6)z \ldots \pm \frac{n}{1}\sin -(n-2)z \mp \sin -nz,$$

sont tous deux réels, puisque, $n-1$ étant un nombre pair,

$$(\sqrt{-1})^{n-1} = \mp 1,$$

selon que $n-1$ est divisible seulement par 2 ou par 4.

Ici, comme dans le numéro précédent, les termes placés à égale distance des extrêmes, ayant la même valeur, on peut encore se borner à doubler ceux de la première moitié, en s'arrêtant au dernier des arcs positifs.

2°. Quand n est paire, les termes placés à égale distance des extrêmes ayant le même signe, c'est la partie imaginaire qui s'anéantit ainsi que dans le n° précédent; la partie réelle subsiste comme dans cet article, avec un terme du milieu : observant donc alors que.... $(\sqrt{-1})^n = \mp 1$, et supprimant un facteur 2 dans chaque membre, on peut poser

$$\mp 2^{n-1}\sin z^n =$$

$$\cos nz - \frac{n}{1}\cos(n-2)z + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)z - \text{etc.},$$

pourvu qu'on ait soin de s'arrêter au terme où l'arc est nul, et de ne prendre que la moitié du coefficient.

Par cette formule, et en changeant tous les signes lorsque celui du premier membre est —, on trouvera sans peine les valeurs contenues dans la table suivante :

$$\sin z = \sin z,$$
$$2\sin z^2 = -\cos 2z + 1,$$
$$4\sin z^3 = -\sin 3z + 3\sin z,$$
$$8\sin z^4 = \cos 4z - 4\cos 2z + 3,$$
$$16\sin z^5 = \sin 5z - 5\sin 3z + 10\sin z,$$
$$32\sin z^6 = -\cos 6z + 6\cos 4z - 15\cos 2z + 10,$$
$$64\sin z^7 = -\sin 7z + 7\sin 5z - 21\sin 3z + 35\sin z,$$
etc. (*).

(*) Dans les formules ci-dessus, je me suis borné à considérer l'exposant n comme entier, ce cas étant le seul nécessaire pour le plus grand nombre des applications : on était, à l'égard des autres, dans une erreur que M. Poisson a relevée le premier; mais il restait encore sur ce sujet quelques difficultés à éclaircir. (*Voyez* le IIIe vol. du Traité in-4°, pag. 605 et 616, puis le *Bulletin des sciences mathématiques, physiques et chimiques*, publié par M. de Férussac, t. IV, p. 216, 338, l'extrait d'un Mémoire de M. Poinsot; p. 140, 344, des Remarques de M. Poisson; t. V, p. 4, celles de M. Pagani; p. 250, celle de M. Ohm; enfin les *Annales de Mathématiques*, publiées par M. Gergonne, t. XVI, p. 254.)

Comme ce n'est que par rapport à leur usage dans l'intégration que j'ai placé ici ces mêmes formules, je n'ai pas cru devoir parler, dans le texte, de celles qui servent à exprimer, par les puissances du sinus et du cosinus de l'arc simple, le sinus et le cosinus d'un arc multiple quelconque; néanmoins ces dernières formules étant remarquables, je vais en indiquer ici la construction.

On a, par le n° 187,

$$\cos nz + \sqrt{-1}\sin nz = (\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n,$$
$$\cos nz - \sqrt{-1}\sin nz = (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n;$$

en prenant la somme de ces équations, on en conclut

$$\cos nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2};$$

et si l'on retranche la deuxième de la première, il vient

221. Maintenant, soit à intégrer la différentielle $\int dz \cos z^4$; on tirera d'abord des formules du n° 219,

$$\cos z^4 = \tfrac{1}{8}\cos 4z + \tfrac{1}{2}\cos 2z + \tfrac{3}{8},$$

et l'on aura

$$\int dz \cos z^4 = \tfrac{1}{8}\int dz \cos 4z + \tfrac{1}{2}\int dz \cos 2z + \tfrac{3}{8}\int dz$$
$$= \frac{1}{32}\sin 4z + \frac{1}{4}\sin 2z + \frac{3z}{8} + const.$$

Cet exemple montre assez comment il faudrait opérer sur tous ceux qui pourraient s'offrir.

222. Les formules

$$\sin nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2\sqrt{-1}},$$

expressions qui, quoique affectées d'imaginaires, n'en sont pas moins réelles, parce que ces signes disparaissent tous par le développement des puissances indiquées. En effet, on a

$$(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n = \cos z^n + \frac{n}{1}\sqrt{-1}\cos z^{n-1}\sin z - \frac{n(n-1)}{1.2}\cos z^{n-2}\sin z^2 - \text{etc.},$$

$$(\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n = \cos z^n - \frac{n}{1}\sqrt{-1}\cos z^{n-1}\sin z - \frac{n(n-1)}{1.2}\cos z^{n-2}\sin z^2 + \text{etc.},$$

et substituant ces séries dans les valeurs ci-dessus, on arrive à

$$\cos nz = \cos z^n - \frac{n(n-1)}{1.2}\cos z^{n-2}\sin z^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cos z^{n-4}\sin z^4 - \text{etc.},$$

$$\sin nz = \frac{n}{1}\cos z^{n-1}\sin z - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos z^{n-3}\sin z^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}\cos z^{n-5}\sin z^5 - \text{etc.}$$

$$\sin z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

$$\cos z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2}. \quad (187),$$

changeant les fonctions de sinus et de cosinus en exponentielles, ramènent l'intégration des unes à celle des autres.

On peut aussi changer la différentielle $dz \sin z^m \cos z^n$, en une autre qui soit comprise dans les différentielles binomes : il suffit de faire $\sin z = x$, d'où il résulte

$$\cos z = \sqrt{1-x^2}, \quad dz = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (36);$$

et l'on obtient ensuite

$$\int dz \sin z^m \cos z^n = \int x^m dx (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Cette dernière expression s'intègre d'abord quelle que soit m, lorsque n est paire, puisque $\frac{n-1}{2}$ est un entier. Quand n est impaire, $\frac{n-1}{2}$ revient à $\pm i - \frac{1}{2}$, i étant un entier, et l'emploi, soit de la formule (B) (195), soit de la formule (D) (196), ramène à

$$\int x^m dx (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

qui s'obtient quand m est un entier (197, 198).

Dans tous les autres cas, on réduira l'intégrale proposée à celle de la différentielle analogue la plus simple.

Il est visible qu'on peut transformer de la même manière les différentielles contenant les autres lignes trigonométriques.

223. Avant d'aller plus loin, il est à propos de re-

marquer que si l'un des exposans m, n, est impair, l'intégrale $\int dz \sin z^m \cos z^n$ se ramène sur-le-champ aux fonctions algébriques entières, en observant que

$$\int dz \sin z^{2p+1} \cos z^q = \int dz \sin z . \cos z^q (\sin z^2)^p,$$
$$\int dz \sin z^p \cos z^{2q+1} = \int dz \cos z . \sin z^p (\cos z^2)^q,$$

que

$$(\sin z^2)^p = (1 - \cos z^2)^p, \quad (\cos z^2)^q = (1 - \sin z^2)^q,$$

et que

$$dz \sin z = -d.\cos z, \quad dz \cos z = d.\sin z.$$

Par là on arrive à

$$-\int u^q du (1-u^2)^p, \quad \int u^p du (1-u^2)^q,$$

en faisant $\cos z = u$, ou $\sin z = u$; et ces intégrales s'obtiennent en développant les puissances entières de $1 - u^2$.

224. Les formules (A), (B), (C) et (D) des n.os 194, 195, 196, pourraient être facilement transformées par rapport à la différentielle $dz \sin z^m \cos z^n$ (222); mais on parvient immédiatement aux mêmes résultats, en décomposant en facteurs cette différentielle.

Si on la met d'abord sous la forme $dz \sin z \cos z^n . \sin z^{m-1}$, le premier facteur $dz \sin z \cos z^n$ pouvant, à cause que $dz \sin z = -d.\cos z$, s'intégrer, on trouve

$$\int dz \sin z^m \cos z^n = \int dz \sin z \cos z^n \sin z^{m-1} =$$
$$-\frac{1}{n+1} \cos z^{n+1} \sin z^{m-1} + \frac{m-1}{n+1} \int dz \cos z^{n+2} \sin z^{m-2};$$

et parce que $\cos z^{n+2} = \cos z^n . \cos z^2 = \cos z^n (1 - \sin z^2)$, on obtient

$$\int dz \cos z^{n+2} \sin z^{m-2} = \int dz \cos z^n \sin z^{m-2} - \int dz \cos z^n \sin z^m.$$

Substituant dans la première équation, et prenant la

valeur de $\int dz \sin z^m \cos z^n$, il en résultera (A)

$$\int dz \sin z^m \cos z^n = -\frac{\sin z^{m-1} \cos z^{n+1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int dz \sin^{m-2} z \cos z^n.$$

225. On peut construire de même la formule propre à diminuer l'exposant de $\cos z$; mais elle se déduit immédiatement de la précédente, en posant

$z = 1^q - y$, d'où $dz = -dy$, $\sin z = \cos y$, $\cos z = \sin y$.

Par ce moyen, et en y changeant tous les signes, la formule (A) devient

$$\int dy \cos y^m \sin y^n = \frac{\cos y^{m-1} \sin y^{n+1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int dy \cos y^{m-2} \sin y^n;$$

et maintenant, si l'on remplace y par z, qu'on change m en n et réciproquement, on aura la formule (B)

$$\int dz \sin z^m \cos z^n = \frac{\sin z^{m+1} \cos z^{n-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int dz \sin z^m \cos z^{n-2}.$$

226. Comme leurs analogues pour les différentielles binomes, ces formules doivent être renversées lorsque l'exposant qu'on se propose de réduire est négatif (196).

En prenant dans la formule (A) la valeur de l'intégrale du second membre, on obtient

$$\int dz \sin z^{m-2} \cos z^n = \frac{\sin z^{m-1} \cos z^{n+1}}{m-1} + \frac{m+n}{m-1} \int dz \sin z^m \cos z^n;$$

si l'on change ensuite m en $-m+2$, et qu'on passe les puissances négatives au dénominateur, il viendra la formule (C)

$$\int \frac{dz \cos z^n}{\sin z^m} = -\frac{\cos z^{n+1}}{(m-1)\sin^{m-1}} + \frac{m-n-2}{m-1} \int \frac{dz \cos z^n}{\sin z^{m-2}}.$$

En opérant de même sur la formule (B), on en déduit la formule (D)

$$\int \frac{dz \sin z^m}{\cos z^n} = \frac{\sin z^{m+1}}{(n-1)\cos z^{n-1}} + \frac{n-m-2}{m-1}\int \frac{dz \sin z^m}{\cos z^{n-2}}.$$

227. Voyons maintenant l'usage de ces quatre formules.

Si l'on applique, par exemple, à $\int dz \sin z^4 \cos z^2$, la première, elle donnera d'abord

$$\int dz \sin z^4 \cos z^2 = -\frac{\sin z^3 \cos z^3}{6} + \frac{3}{6}\int dz \sin z^2 \cos z^2 ;$$

puis

$$\int dz \sin z^2 \cos z^2 = -\frac{\sin z \cos z^3}{4} + \frac{1}{4}\int dz \cos z^2 ;$$

employant ensuite la seconde, en y faisant $m=0$, $n=2$, on trouvera

$$\int dz \cos z^2 = \frac{\sin z \cos z}{2} + \frac{1}{2}\int dz = \frac{\sin z \cos z}{2} + \frac{z}{2} ;$$

enfin, remontant de ces valeurs à celle de l'intégrale proposée, il viendra

$$\int dz \sin z^4 \cos z^2 = -\frac{1}{6}\sin z^3 \cos z^3 - \frac{3.1}{6.4}\sin z \cos z^3 + \frac{3.1.1}{6.4.2}\sin z \cos z + \frac{3.1.1}{6.4.2} z + const.$$

On voit bien, par cet exemple, comment l'emploi répété des formules (*A*) et (*B*) fait trouver..... $\int dz \sin z^m \cos z^n$, lorsque les exposans m et n sont entiers et positifs. La première conduit à $\int dz \sin z \cos z^n$, quand l'exposant m est impair; et comme..... $d.\sin z = -dz \cos z$, l'intégration qui reste à faire s'effectue tout de suite (223).

Si l'exposant m est pair, on arrive à $\int dz \cos z^n$, et la formule (*B*), en y faisant $m = 0$, mène à.....

$\int dz \cos z = \sin z$, quand n est impaire, et à $\int dz = z$, quand le contraire a lieu.

Si les exposans m et n étaient égaux, mais de signes contraires, les formules (A) et (B) ne pourraient plus servir, à cause de l'évanouissement de leur dénominateur $m+n$. Pour éviter cet inconvénient, il suffit de commencer par réduire celui des deux exposans qui est négatif.

La formule (C) appliquée d'abord à $\int \frac{dz \cos z^n}{\sin z^m}$, conduit à $\int \frac{dz \cos z^n}{\sin z}$, ou à $\int dz \cos z^n$, selon que m est impaire ou paire. La formule (B), appliquée ensuite à $\int \frac{dz \cos z^n}{\sin z}$, conduit à

$$\int \frac{dz \cos z}{\sin z} = \int \frac{d.\sin z}{\sin z} = l.\sin z + const.,$$

si n est impaire, et à $\int \frac{dz}{\sin z}$, dans le cas contraire. Ce dernier résultat n'étant pas compris dans les différentielles intégrées précédemment, doit être mis à part.

Avec les formules (D) et (A), on passe de $\int \frac{dz \sin z^m}{\cos z^n}$ à $\int \frac{dz}{\cos z}$, quand m est paire et n impaire.

Enfin, si m et n sont toutes deux négatives et impaires, la formule (C) conduit d'abord à

$$\int \frac{dz \cos z^{-n}}{\sin z} = \int \frac{dz \sin z^{-1}}{\cos z^n},$$

intégrale que la formule (D) ramène à

$$\int \frac{dz \sin z^{-1}}{\cos z} = \int \frac{dz}{\sin z \cos z},$$

nouveau résultat qu'il faut aussi traiter en particulier.

228. Je vais en conséquence m'occuper, dans cet article, de l'intégration des trois différentielles

$$\frac{dz}{\sin z}, \quad \frac{dz}{\cos z}, \quad \frac{dz}{\sin z \cos z},$$

en commençant par la dernière. Si l'on en divise les deux termes par $\cos z^2$, elle devient

$$\frac{\frac{dz}{\cos z^2}}{\frac{\sin z}{\cos z}} = \frac{d.\operatorname{tang} z}{\operatorname{tang} z} \quad (34),$$

et il en résulte

$$\int \frac{dz}{\sin z \cos z} = 1.\operatorname{tang} z + const.$$

En posant $z = 2z'$, et mettant pour $\sin 2z'$ sa valeur $2\sin z' \cos z'$ (*Trig.* 11), on obtient

$$\int \frac{dz}{\sin z} = \int \frac{dz'}{\sin z' \cos z'} = 1.\operatorname{tang} z' + const.,$$

d'après ce qu'on vient de voir : donc

$$\int \frac{dz}{\sin z} = 1.\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} z + const.$$

Changeant ensuite z en $1^r - y$, il vient

$$\int \frac{dz}{\cos z} = -\int \frac{dy}{\sin y} = -1.\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} y + const.$$
$$= -1.\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (1^r - z) + const.,$$

ce qu'on peut transformer en $1.\cot\frac{1}{2}(1^q - z) + const.$, parce que $1.\cot a = -1.\tang a$ (*Trig.* 9).

On voit donc que l'intégrale $\int dz \sin z^m \cos z^n$ s'obtient toutes les fois que les exposans m et n sont des nombres entiers, soit positifs, soit négatifs; il n'en est pas de même quand ces exposans sont fractionnaires. Il faut avoir recours aux séries, excepté dans un petit nombre de cas où l'intégration se présente d'elle-même.

Méthode générale pour obtenir les valeurs approchées des intégrales.

229. Le développement des intégrales en série ne conduit à une approximation que dans le cas où les séries qu'on obtient sont convergentes, ce qui n'arrive pas toujours; c'est pourquoi les Analystes ont cherché les moyens de parvenir à des valeurs approchées des intégrales, quelles que soient les fonctions différentielles proposées. Le théorème de Taylor mène d'une manière très simple aux formules qu'Euler a construites pour cet objet; mais avant d'y parvenir, je ferai connaître quelques dénominations relatives aux divers points de vue sous lesquels on envisage les intégrales.

La nécessité d'ajouter une constante arbitraire à une intégrale, pour lui donner toute la généralité qu'elle comporte, fait voir que ces fonctions sont doublement indéterminées, puisqu'il ne suffit pas, pour assigner leurs valeurs, d'en fixer une à la variable dont elles dépendent, mais qu'il faut encore déterminer leur constante, qui est susceptible de toutes les valeurs possibles. On détermine ordinairement cette constante, en assujettissant l'intégrale à s'évanouir pour une valeur donnée de x. On en a déjà vu plusieurs exemples

(187, 202, 203), et cela revient en général à ce qui suit.

Si $\int X dx = f(x) + C$, $f(x)$ désignant la fonction variable déduite immédiatement du procédé de l'intégration, C la constante arbitraire, et que l'intégrale doive s'évanouir pour une valeur $x = a$, on pose l'équation $f(a) + C = 0$, de laquelle on tire

$$C = -f(a) \quad \text{et} \quad \int X dx = f(x) - f(a).$$

Sous cette forme, l'intégrale $\int X dx$ n'est plus que la différence entre la valeur que prend $f(x)$ lorsque $x = a$, et celle qu'elle acquiert pour toute autre valeur de la même variable. Pour $x = b$, par exemple, il vient

$$\int X dx = f(b) - f(a).$$

Il est à propos de remarquer que ce résultat s'obtient immédiatement, sans qu'il soit besoin de déterminer la constante, et seulement en prenant la différence des résultats qui correspondent aux valeurs $x = a$ et $x = b$, lesquelles donnent $f(a) + C$ et $f(b) + C$.

La valeur $x = a$, pour laquelle l'intégrale s'évanouit en est l'origine, et l'on dit alors que *l'intégrale doit commencer lorsque* $x = a$. La valeur à laquelle on s'arrête, répondant à $x = b$, on dit en conséquence que *l'intégrale est complète lorsque* $x = b$.

Les deux valeurs $x = a$ et $x = b$ sont désignées en commun sous le nom de *limites de l'intégrale*.

Toute intégrale qu'on énonce sans fixer son origine ou sans indiquer ses limites, se nomme *intégrale indéfinie*, et doit, pour être *complète*, renfermer une *constante arbitraire*.

Lorsqu'on assigne ces limites, l'intégrale est *définie*. Si elles sont $x = a$ et $x = b$, par exemple, on dit alors que *l'intégrale* $\int X dx$ *doit être prise depuis*

$x = a$ *jusqu'à* $x = b$; *et cela s'effectue en calculant successivement ce que devient l'expression variable de l'intégrale lorsque* $x = a$, *puis lorsque* $x = b$, *et en retranchant le premier résultat du second.* Dans ce cas, il est inutile d'écrire à la suite de l'intégrale la constante arbitraire, puisqu'elle disparaîtrait par la soustraction.

Pour indiquer l'intégrale définie prise entre les limites a et b, Euler écrivait $\int X dx \left[\begin{smallmatrix} x=a \\ x=b \end{smallmatrix}\right]$, notation à laquelle M. Fourier a substitué $\int_a^b X dx$, ce qui est plus simple; et en conséquence lorsque $\int X dx = f(x)$, il en résulte

$$\int_a^b X dx = f(b) - f(a).$$

Il suit de là, que si a, b, c sont trois valeurs de x, rangées par ordre de grandeur, on aura

$$\int_a^c X dx = \int_a^b X dx + \int_b^c X dx;$$

puisque

$$f(c) - f(a) = f(b) - f(a) + f(c) - f(b);$$

c'est-à-dire qu'en prenant la somme des intégrales définies correspondantes aux intervalles consécutifs $b - a$, $c - b$, on forme celle qui répond à la somme $c - a$ de ces intervalles. Il est important de se familiariser avec ces expressions, qui reviennent souvent, et que les considérations que je vais exposer rendront encore plus significatives.

230. Le théorème de Taylor, donnant

$$y' = y + \frac{dy}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

lorsque x devient $x + h$,

ne peut déterminer la valeur que prend, dans cette circonstance, une fonction dont on ne connaît que les coefficiens différentiels, même à partir du premier ordre, puisque la valeur primitive y reste indéterminée, et représente par conséquent une constante arbitraire; mais il n'en est pas ainsi de la différence entre cette valeur et celle qui répond à $x+h$, puisque

$$y'-y=\frac{dy}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Si donc on fait $\int X dx = y$, on aura

$$\frac{dy}{dx}=X,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dX}{dx},\quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d^2X}{dx^2},\ \text{etc.},$$

les coefficiens différentiels se déduiront tous de la fonction donnée X, et il viendra

$$y'-y=X\frac{h}{1}+\frac{dX}{dx}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^2X}{dx^2}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Pour tirer de cette formule la valeur de $\int X dx$, depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$, il suffira de prendre $h=b-a$, et de remplacer x par a, dans la fonction X et ses coefficiens différentiels, que je représenterai alors par A, A', A'', etc.; on trouvera

$$\int_a^b X dx = A\frac{(b-a)}{1}+A'\frac{(b-a)^2}{1.2}+A''\frac{(b-a)^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Cette série est, en général, d'autant plus convergente, que l'intervalle $b-a$ est plus petit; mais lorsqu'il a une valeur trop considérable, on le partage en un nombre de parties assez grand pour former des intervalles suffisamment petits, et l'on calcule à part la valeur de l'intégrale relative à chacun de ces intervalles. Je suppose que la différence $b-a$ soit divisée en

n parties égales à α, et que les quantités A, A', A'', etc., se changent respectivement en A_1, A'_1, A''_1, etc., A_2, A'_2, A''_2, etc., lorsqu'on y met $a+\alpha, a+2\alpha$, etc., au lieu de a; on aura, entre a et $a+\alpha$,

$$\frac{A\alpha}{1}+\frac{A'\alpha^2}{1.2}+\frac{A''\alpha^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$

entre $a+\alpha$ et $a+2\alpha$,

$$\frac{A_1\alpha}{1}+\frac{A'_1\alpha^2}{1.2}+\frac{A''_1\alpha^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$

entre $a+2\alpha$ et $a+3\alpha$,

$$\frac{A_2\alpha}{1}+\frac{A'_2\alpha^2}{1.2}+\frac{A''_2\alpha^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$

etc.;

et la somme de toutes ces séries, dont le nombre est n, composera la valeur totale de $\int_a^b X dx$, qui sera par conséquent.... (I)

$$\int_a^b X dx = \begin{cases} \frac{\alpha}{1}\,(A+A_1+A_2\ldots\ldots+A_{n-1}) \\ +\frac{\alpha^2}{1.2}\,(A'+A'_1+A'_2\ldots\ldots+A'_{n-1}) \\ +\frac{\alpha^3}{1.2.3}\,(A''+A''_1+A''_2\ldots\ldots+A''_{n-1}) \\ +\text{etc.} \end{cases}$$

231. C'est en passant de la valeur de y correspondante à x, à la valeur de y' correspondante à $x+h$, qu'on a construit la formule précédente, qui représente la différence de ces deux valeurs; mais on peut aussi obtenir cette différence en rétrogradant de x à $x-h$, au moyen de la formule

$$y_1=y-\frac{dy}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}-\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$

dans laquelle y, répond à $x-h$, et qui donne

$$y-y_1=\frac{dy}{dx}\frac{h}{1}-\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}-\text{etc.}$$

Pour appliquer cette dernière à $\int_a^b X dx$, il faut, dans X et dans ses coefficiens différentiels, changer x en b; et supposant qu'on en tire les quantités B, B', B'', etc., on trouvera

$$\int^b X dx=\frac{B(b-a)}{1}-\frac{B'(b-a)^2}{1.2}+\frac{B''(b-a)^3}{1.2.3}-\text{etc.}$$

Lorsqu'on partage l'espace $b-a$ en n parties égales à α, on obtient par la formule ci-dessus, entre les limites $a+\alpha$ et a,

$$\frac{A_1\alpha}{1}-\frac{A'_1\alpha^2}{1.2}+\frac{A''_1\alpha^3}{1.2.3}-\text{etc.},$$

entre $a+2\alpha$ et $a+\alpha$,

$$\frac{A_2\alpha}{1}-\frac{A'_2\alpha^2}{1.2}+\frac{A''_2\alpha^3}{1.2.3}-\text{etc.},$$

entre $a+3\alpha$ et $a+2\alpha$,

$$\frac{A_3\alpha}{1}-\frac{A'_3\alpha^2}{1.2}+\frac{A''_3\alpha^3}{1.2.3}-\text{etc.},$$

etc.,

séries pareillement en nombre n, et dont la somme donne ..... (II)

$$\int_a^b X dx=\begin{cases}\frac{\alpha}{1}(A_1+A_2+A_3.....+A_n)\\ -\frac{\alpha^2}{1.2}(A'_1+A'_2+A'_3.....+A'_n)\\ +\frac{\alpha^3}{1.2.3}(A''_1+A''_2+A''_3.....+A''_n)\\ -\text{etc.}\end{cases}$$

232. Chacune de ces deux formules peut être appliquée en particulier; mais leur comparaison fait découvrir les limites de l'approximation qu'elles donnent.

Pour établir cette comparaison, il faut d'abord observer que dans une série de la forme

$$M\alpha + N\alpha^2 + P\alpha^3 + \text{etc.},$$

dont aucun des coefficiens M, N, P, etc., ne devient infini, où l'on peut supposer α aussi petit qu'on voudra, et rendre par conséquent un terme quelconque supérieur à la somme de tous ceux qui le suivent (62), l'erreur que l'on commet alors, en se bornant à un nombre limité des premiers termes, est d'un signe contraire à celui du premier des termes qu'on néglige, c'est-à-dire que le résultat péchera par défaut si ce terme est positif, et par excès s'il est négatif.

Il résulte de là, que si les valeurs de la fonction X vont en croissant de $x=a$ à $x=b$, et qu'on se borne dans chaque formule aux termes multipliés par α seulement, la première formule sera en défaut, et la seconde en excès; car si la série

$$A,\ A_1,\ A_2,\ \text{etc.},$$

est croissante, toutes les valeurs correspondantes

$$A',\ A'_1,\ A'_2,\ \text{etc.},$$

du coefficient différentiel $\frac{dX}{dx}$ seront positives (62); ainsi, les termes affectés de α^2 seront positifs dans la première formule, et négatifs dans la seconde: on aura donc

$$\int_a^b X dx > \alpha(A + A_1 + A_2 \ldots\ldots + A_{n-1})$$

et $$< \alpha(A_1 + A_2 + A_3 \ldots\ldots + A_n).$$

De plus, la différence $\alpha(A_n - A)$ de ces deux quan-

tités deviendra d'autant moindre, qu'on prendra α plus petit, ce qui s'effectue en augmentant le nombre n, sans changer A et A_n qui répondent aux limites a et b, assignées à x.

Il suit de là, que chacune des deux sommes entre lesquelles est comprise $\int X\mathrm{d}x$, approchera aussi près qu'on le voudra de la vraie valeur de cette intégrale qui, par cette raison, peut être considérée comme une somme de différentielles, puisque les produits $A\alpha$, $A_1\alpha$, etc., ne sont que les valeurs de $X\mathrm{d}x$ correspondantes à $x=a$, $=a+\alpha$, etc., et dans lesquelles α a pris la place de $\mathrm{d}x$.

Cette conclusion, qui sera bientôt vérifiée par les considérations géométriques (236), suppose, comme on voit, que les fonctions X et $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}$ ne changent pas de signe, et ne deviennent pas infinies entre les limites $x=a$, $x=b$, ce qu'on peut toujours obtenir en séparant les parties de l'intégrale dans lesquelles l'une de ces circonstances aurait lieu (*).

(*) Les formules précédentes sont souvent écrites dans la notation indiquée sur la page 323 : ayant posé $\int X\mathrm{d}x=\mathrm{f}(x)$, d'où il suit $X=\frac{\mathrm{d.f}(x)}{\mathrm{d}x}$, qu'on désigne par $\mathrm{f}'(x)$, il vient

$$A=\mathrm{f}'(a),\ A_1=\mathrm{f}'(a+\alpha),\ \ldots\ A_n=\mathrm{f}'(a+n\alpha)=\mathrm{f}'(b),$$

$$\alpha(A_n-A)=\frac{b-a}{n}\left[\mathrm{f}'(b)-\mathrm{f}'(a)\right];$$

et par conséquent $\int_a^b X\mathrm{d}x=\mathrm{f}(b)-\mathrm{f}(a)$ est la limite dont l'expression

$$\alpha\left\{\mathrm{f}'(a)+\mathrm{f}'(a+\alpha)\ldots\ldots+\mathrm{f}'\left[a+(n-1)\alpha\right]\right\}$$

s'approche de plus en plus, à mesure que le nombre n augmente et que α, qui est $\frac{b-a}{n}$, diminue.

Si l'on ne voulait qu'établir cette relation, on pourrait substituer à la série de Taylor, l'expression qui termine le n° 6.

Il est évident aussi que l'ordre des limites de $\int X dx$ serait inverse, si les valeurs de X allaient en décroissant : la première ligne de la formule (I) serait en excès, celle de la formule (H) en défaut.

233. Les mêmes remarques peuvent être étendues aux termes affectés des puissances de α supérieures à la première : il en résulte, comme ci-dessus, que quand deux lignes correspondantes dans chaque formule ont des signes contraires, la somme de celles qui les précèdent est en excès dans l'une des formules, et en défaut dans l'autre, et que, par conséquent, si l'on ignore, comme cela arrive presque toujours, la quantité de l'erreur, il sera convenable de prendre le milieu entre les deux résultats. Si l'on opère immédiatement sur les deux formules, il viendra..... (III)

$$\int_a^b X dx = \begin{cases} \frac{\alpha}{1}\left[A_1 + A_2 + A_3 \ldots + A_{n-1} + \frac{1}{2}(A + A_n)\right] \\ + \frac{\alpha^2}{1.2} \cdot \frac{1}{2}(A' - A'_n) \\ + \frac{\alpha^3}{1.2.3}\left[A''_1 + A''_2 + A''_3 \ldots + A''_{n-1} + \frac{1}{2}(A'' + A''_n)\right] \\ + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} \cdot \frac{1}{2}(A''' - A'''_n) \\ + \text{etc.} \end{cases}$$

234. Ce qu'on a vu dans n° 232 fournit encore pour les valeurs des intégrales, des limites moins resserrées qui, néanmoins, peuvent être très utiles.

Si l'on désigne par M la plus grande valeur de X, par m la plus petite, dans l'intervalle de $x=a$ à $x=b$, qu'on subtitue m au lieu de A, A_1, etc., dans la première des expressions des limites de $\int X dx$, et M dans la seconde, on obtiendra

$$\int_a^b X\mathrm{d}x > n\alpha m \quad \text{et} \quad < n\alpha M,$$

ou $$> (b-a)m \text{ et } < (b-a)M$$

puisque $n\alpha = b-a$ (230).

On voit par là qu'il existe entre m et M une valeur μ telle que

$$\int_a^b X\mathrm{d}x = (b-a)\mu \ (*).$$

S'il s'agissait d'obtenir $\int XQ\mathrm{d}x$, et qu'on sût intégrer $\int Q\mathrm{d}x$, comme entre les limites de x, on aurait

$$XQ\mathrm{d}x > mQ\mathrm{d}x, \quad XQ\mathrm{d}x < MQ\mathrm{d}x,$$

pour toutes les valeurs de x autres que m ou M, la même subordination existerait entre les intégrales, et il viendrait

$$\int XQ\mathrm{d}x > m\int Q\mathrm{d}x, \quad \int XQ\mathrm{d}x < M\int Q\mathrm{d}x,$$

où il n'y aurait plus qu'à mettre pour $\int Q\mathrm{d}x$, sa valeur entre les limites $x=a$ et $x=b$.

235. La considération des courbes conduit aussi d'une manière très simple aux principales conséquences établies dans les articles précédens.

$\int X\mathrm{d}x$ exprimant l'aire du segment d'une courbe dont l'ordonnée est X (65), si BCZ, *fig.* 40, représente cette courbe, que l'origine des abscisses soit en A, FIG. 40.

(*) La valeur de x qui donne $X=\mu$, étant intermédiaire entre a et b, peut se représenter par $a+\theta(b-a)$, θ désignant une quantité comprise entre 0 et 1; et si l'on écrit $f(x)$ au lieu de X, on aura

$$\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) = (b-a)\, f[a+\theta(b-a)],$$

expression que l'on rencontre quelquefois.

et que $X = PM$, l'expression $X\mathrm{d}x$ sera aussi bien la différentielle des segmens BMP, $DEMP$, que du segment $ACMP$ qui commence à l'origine; ainsi, l'ordonnée qui borne le segment de ce côté sera absolument indéterminée. L'ordonnée PM qui forme l'autre limite l'est pareillement, tant qu'on n'assigne aucune valeur à l'abscisse AP; mais lorsqu'on aura fixé les abscisses de la première et de la dernière ordonnée, le segment sera tout-à-fait déterminé.

Si la partie variable de l'intégrale $\int X\mathrm{d}x = \mathrm{f}(x) + C$, s'évanouit d'elle-même au point B, cette fonction exprime immédiatement les aires BCA, BED, BMP; alors si l'on veut faire partir les segmens de l'ordonnée AC, il faut retrancher de ces aires, l'espace BCA: cet espace représente la constante, déterminée pour que la quantité $\mathrm{f}(x) + C$ s'évanouisse au point A; mais en considérant à la fois les deux limites d'un segment, il est inutile de s'occuper de la constante; car, soit que l'on compte les aires à partir du point B ou du point A, sur l'axe des abscisses, le segment $DEMP$, par exemple, s'obtiendra également par la différence des segmens BMP, BED, ou par celle des segmens $ACMP$ et $ACED$.

236. L'inspection de la figure montre que l'aire du segment d'une courbe quelconque est toujours comprise entre la somme d'une suite de rectangles inscrits PR, $P'R'$, $P''R''$, etc., et celle d'une suite de rectangles circonscrits $P'S$, $P''S'$, $P'''S''$, etc., les premiers construits sur la plus petite ordonnée de chacun des trapèzes curvilignes PM', $P'M''$, $P''M'''$, etc., et les seconds, sur la plus grande; on prouve, de plus, que ces deux suites peuvent approcher l'une de l'autre aussi près qu'on voudra.

En effet, le rectangle $MRQN$ est évidemment égal à la somme des rectangles

$$MRM'S, \quad M'R'M''S', \quad M''R''M'''S'',$$

qui forment la différence entre les polygones

$$PMRM'R'M''R''P''', \quad PSM'S'M''S''M'''P''',$$

l'un inscrit et l'autre circonscrit au segment..... $PMM'M''M'''P'''$; mais ce rectangle $MRQN$ a pour hauteur la différence MN, entre les deux ordonnées extrêmes PM et $P'''M'''$, qui ne change point, tant que l'intervalle PP''' demeure le même, tandis que la base $MR=PP'$ peut être rendue aussi petite qu'on voudra, en multipliant les ordonnées intermédiaires : il peut donc lui-même devenir aussi petit qu'on voudra.

Il suit de là, que le polygone inscrit et le polygone circonscrit peuvent approcher du segment aussi près qu'on le voudra.

Cela posé, si l'on prend

$$AP=\alpha, \quad PP'=P'P''=P''P'''=\text{etc.}=\alpha,$$

on aura

$$PM=A, \quad P'M'=A_1, \quad P''M''=A_2, \quad P'''M'''=A_3, \text{ etc.},$$

la somme des rectangles inscrits sera

$$A\alpha+A_1\alpha+A_2\alpha\ldots+A_{n-1}\alpha \quad (1),$$

celle des rectangles circonscrits

$$A_1\alpha+A_2\alpha+A_3\alpha\ldots+A_n\alpha \quad (2),$$

et ces deux sommes pourront donner l'aire du segment $PMM'M''M'''P'''$, avec autant d'approximation qu'on le voudra, ce qui confirme la conclusion tirée, n° 232, du principe de la convergence des séries.

On voit encore par là comment l'intégrale $\int X dx$

peut être prise pour une somme d'élémens, puisque, représentant l'aire d'un segment de courbe, elle est la limite de la somme des rectangles

$$A\alpha, \quad A_1\alpha, \quad A_2\alpha, \quad \text{etc.},$$

qui sont les accroissemens des aires des polygones inscrit et circonscrit au segment.

Dans la figure, où les ordonnées vont toujours en croissant, les rectangles inscrits sont formés sur la première ordonnée de chaque trapèze curviligne, et les rectangles circonscrits sur la dernière; mais si elles passaient par un *maximum*, comme dans la figure 41, il n'en serait ainsi que dans la partie CM', antérieure à ce *maximum*, et le contraire aurait lieu dans la partie postérieure $M''Z$: alors la série (1), d'abord moindre que l'espace curviligne, deviendrait plus grande, et la série (2), d'abord plus grande que cet espace, deviendrait plus petite.

FIG. 41.

237. On approchera davantage de la vraie valeur du segment de la courbe proposée, en prenant, au lieu des rectangles inscrits et circonscrits, la somme des trapèzes terminés par les cordes des arcs MM', $M'M''$, $M''M'''$, etc.

Ces trapèzes ayant tous même hauteur, PP', et chaque ordonnée, excepté la première et la dernière, étant commune à deux trapèzes, leur somme sera précisément égale à la série

$$\alpha[A_1 + A_2 + A_3 \ldots + A_{n-1} + \tfrac{1}{2}(A + A_n)],$$

qui tient le milieu entre les séries (1) et (2), et qui est la première ligne de la formule (III) (233) (*)

(*) On pourrait, aux polygones rectilignes, substituer un po-

Enfin, il est évident, par la figure 42, que l'aire curviligne $PMNQ$ est $<$ que le rectangle QE et $>$ que le rectangle PF, construits, l'un sur la plus grande, et l'autre sur la plus petite des ordonnées comprises entre les limites AP et AQ de ce segment, ce qui s'accorde avec le n° 234. FIG. 42.

238. L'emploi de la formule (III) du n° 233, peut présenter quelques difficultés. Elle ne saurait servir lorsque la fonction X devient infinie; et aux environs des valeurs de x qui amènent cette circonstance, il ne suffit pas de diminuer l'intervalle ω, ou de resserrer les ordonnées, pour compenser l'effet de leur rapide accroissement; il faut encore avoir recours à des transformations convenables.

Soit, par exemple, $X = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$; il est d'abord évident que lorsque x approche de l'unité, un très petit changement dans la valeur de cette variable en produit un très grand dans celle de X; si donc on demandait l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1-\delta$, δ étant une petite quantité, il faudrait, vers la dernière limite, multiplier beaucoup les valeurs intermédiaires données à x. De plus, la même intégrale ne peut se calculer immédiatement jusqu'à $x = 1$; car alors X devient infini, sans que pourtant la valeur de $\int X dx$ le soit, puisque $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x} + const.$

---

lygone formé d'arcs de courbes d'une nature plus simple que la proposée, et s'en approchant plus que ne peuvent faire des lignes droites; c'est à cela que reviennent au fond les formules (I) et (II). *Voyez* le Traité in-4°, t. II, p. 140.

Cette difficulté tient à ce que, dans l'intégration, le facteur $(1-x)^{\frac{1}{2}}$ passe du dénominateur au numérateur; et elle aura lieu, en général, lorsque x sera de la forme $\frac{V}{(a-x)^{\frac{p}{q}}}$ et qu'on aura $p<q$. Pour la lever, on fera $a-x=z^q$, ce qui donnera

$$x=a-z^q,\quad dx=-qz^{q-1}dz \quad\text{et}\quad Xdx=-qVz^{q-p-1}dz,$$

quantité qui ne deviendra plus infinie quand $x=a$, ou $z=0$, si la fonction V reste finie dans cette circonstance; on calculera donc alors l'intégrale $\int Vz^{q-p-1}dz$, depuis $z=0$ jusqu'à $z=\delta$, δ étant une quantité assez petite, et l'on aura ainsi la partie de la valeur de $\int\frac{Vdx}{(a-x)^{\frac{p}{q}}}$ correspondante à l'intervalle compris entre $x=a$ et $x=a-\delta^q$.

On peut encore obtenir l'intégrale $\int\frac{Vdx}{(a-x)^{\frac{p}{q}}}$ depuis $x=a$ jusqu'à $x=a-\delta$, en faisant seulement $x=a-z$; parce que la petitesse de la variable z, renfermée entre les limites très étroites 0 et δ, permet de simplifier beaucoup le coefficient différentiel. Si l'on avait, par exemple, $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$, la différentielle à intégrer après la transformation indiquée, serait

$$\frac{-(a-z)^2dz}{\sqrt{4a^3z-6a^2z^2+4az^3-z^4}}=\frac{-(a^2-2az+z^2)dz}{\sqrt{z}.\sqrt{4a^3-6a^2z+4az^2-z^3}}.$$

En réduisant la fraction

$$\frac{a^2-2az+z^2}{\sqrt{4a^3-6a^2z+4az^2-z^3}}$$

en série ordonnée suivant les puissances de z, et en s'arrêtant au quarré de cette variable, on aurait enfin

$$-\int\frac{dz\sqrt{a}}{2\sqrt{z}}\left(1-\frac{5z}{4a}-\frac{5z^2}{32a^2}\right)=-\frac{1}{2}\sqrt{az}\left(2-\frac{5z}{6a}-\frac{z^2}{16a^2}\right).$$

Ce résultat qui s'évanouit lorsque $z=0$, donnera, par la substitution de δ à z, la valeur de l'intégrale cherchée, depuis $x=a$ jusqu'à $x=a-\delta$. Le reste de cette intégrale pourra se calculer par le moyen de la série du n° 233.

239. L'intégrale $\int\frac{e^{-\frac{1}{x}}dx}{x}$ ne pouvant s'obtenir par la réduction de $e^{-\frac{1}{x}}$ en série, que pour le cas où x serait très grand, je vais montrer comment Euler en a calculé la valeur depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, au moyen de la formule du n° 233.

On peut d'abord changer

$$\int\frac{e^{-\frac{1}{x}}dx}{x} \text{ en } \int x\frac{e^{-\frac{1}{x}}dx}{x^2}=e^{-\frac{1}{x}}x-\int e^{-\frac{1}{x}}dx,$$

dont la partie $e^{-\frac{1}{x}}x$ s'évanouit lorsque $x=0$, et devient e^{-1} quand $x=1$.

Il reste à trouver $\int e^{-\frac{1}{x}}dx$, pour laquelle

$$X=e^{-\frac{1}{x}},\quad \frac{dX}{dx}=e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2},\quad \frac{d^2X}{dx^2}=e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^3}\right),$$

$$\frac{d^3X}{dx^3}=e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^6}-\frac{6}{x^5}+\frac{6}{x^4}\right), \text{ etc.,}$$

expressions qui s'évanouissent quand $x = 0$, et d'où il résulte que A, A', A'', etc., sont nuls (*).

Si l'on met ensuite α, 2α, 3α, etc., à la place de x, on obtiendra les valeurs de A_1, A'_1, etc., A_2, A'_2, etc., et, depuis o jusqu'à $x = n\alpha$, on aura

$$\int e^{-\frac{1}{x}} dx =$$

$$\frac{\alpha}{1}\left[e^{-\frac{1}{\alpha}} + e^{-\frac{1}{2\alpha}} \ldots + e^{-\frac{1}{(n-1)\alpha}}\right] + \frac{1}{2}\frac{\alpha e^{-\frac{1}{n\alpha}}}{1}$$

$$- \frac{1}{2}\frac{\alpha^2 e^{-\frac{1}{n\alpha}}}{1.2}\frac{1}{n^2\alpha^2}$$

$$+ \frac{\alpha^3}{1.2.3}\left[e^{-\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{1}{\alpha^4} - \frac{2}{\alpha^3}\right) + e^{-\frac{1}{2\alpha}}\left(\frac{1}{16\alpha^4} - \frac{2}{8\alpha^3}\right) + \ldots\right.$$

$$\left. + e^{-\frac{1}{(n-1)\alpha}}\left(\frac{1}{(n-1)^4\alpha^4} - \frac{2}{(n-1)^3\alpha^3}\right)\right] + \frac{1}{2}\frac{\alpha^3 e^{-\frac{1}{n\alpha}}}{1.2.3}\left(\frac{1}{n^4\alpha^4} - \frac{2}{n^3\alpha^3}\right)$$

$$- \frac{1}{2}\frac{\alpha^4 e^{-\frac{1}{n\alpha}}}{1.2.3.4}\left(\frac{1}{n^6\alpha^6} - \frac{6}{n^5\alpha^5} + \frac{6}{n^4\alpha^4}\right)$$

$+$ etc.

(*) Ceci a besoin d'une explication. Un terme quelconque des expressions précédentes, étant représenté par $ke^{-\frac{1}{x}}x^{-m}$, devient.. $ke^{-z}z^m = ke^{-z+m\,lz}$, lorsqu'on fait $\frac{1}{x} = z$; or, à mesure que x diminue, z croît, et de plus en plus rapidement par rapport à lz (99); l'exposant $-z+m\,lz$ tend donc vers l'infini négatif, lorsque m n'est pas comparable à z. Mais le nombre m, qui dépend de celui des différentiations, n'ayant aucune limite, on peut en concevoir des valeurs telles que $m\,lz$ égale z puis le surpasse autant qu'on

Lorsqu'on veut s'arrêter à la limite $x=1$, il faut faire $\alpha=\frac{1}{n}$, et il vient alors $\int e^{-\frac{1}{x}}dx=$

$$\frac{1}{n}\left[e^{-\frac{n}{1}}+e^{-\frac{n}{2}}+e^{-\frac{n}{3}}\ldots+e^{-\frac{n}{n-1}}\right]+\frac{1}{2ne}-\frac{1}{4n^2e}$$
$$+\frac{1}{6}\left[\frac{(n-2)}{1}e^{-\frac{n}{1}}+\frac{(n-4)}{16}e^{-\frac{n}{2}}+\frac{(n-6)}{81}e^{-\frac{n}{3}}\ldots\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{n-2(n-1)}{(n-1)^4}e^{-\frac{n}{n-1}}\right]$$
$$-\frac{1}{12n^3e}-\frac{1}{48n^4e}+\text{etc.}$$

En se bornant aux termes qui sont écrits, et faisant $n=10$, on trouvera, suivant Euler, la valeur de $\int e^{-\frac{1}{x}}dx$, à un millionième d'unité près, et on l'aura avec une exactitude vingt fois plus grande encore, si l'on prend $n=20$.

240. Le théorème de Taylor donne aussi deux développemens généraux de l'intégrale $\int X dx$. En désignant par C la valeur de cette intégrale, quand $x=0$, et représentant par A, A', A'', etc., ce que deviennent alors les quantités X, $\frac{dX}{dx}$, $\frac{d^2X}{dx^2}$, etc., on aura

---

voudra, quel qu'il soit; alors l'exposant $-m+mlz$ passera du négatif au positif, et augmentera sans cesse; ainsi les coefficiens différentiels de la fonction $e^{-\frac{1}{x}}$ ne s'évanouissent pas tous, lorsque $x=0$: après avoir été nuls, ils croissent jusqu'à l'infini. Cette circonstance ne nuit pas cependant à l'application indiquée dans le texte, parce que les premiers termes de la formule (III) suffisent seuls pour donner une approximation de plus en plus grande (236).

$$\int X dx = C + A\frac{x}{1} + A'\frac{x^2}{1.2} + A''\frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc},$$

série dans laquelle C tient lieu de la constante arbitraire.

En partant de la valeur générale de $\int X dx$, que je représenterai par y, pour revenir à celle qui répond à $x = 0$, et que C désigne, il est évident qu'il faut faire $h = -x$, dans la série de Taylor, ce qui donnera

$$C = y - \frac{dy}{dx}\frac{x}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{x^2}{1.2} - \frac{d^3y}{dx^3}\frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.};$$

remettant dans cette équation, au lieu de y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., leurs valeurs, et prenant celle de $\int X dx$, on aura

$$\int X dx = C + X\frac{x}{1} - \frac{dX}{dx}\frac{x^2}{1.2} + \frac{d^2X}{dx^2}\frac{x^3}{1.2.3} - \text{etc.}:$$

la quantité C est encore ici la constante arbitraire.

L'intégration par parties conduit aussi à ce développement. En effet, si l'on décompose la différentielle $X dx$ dans les deux facteurs X et dx, qu'on intègre le second, on aura $\int X dx = Xx - \int x dX$, puis

$$\int x\, dX = \int \frac{dX}{dx} \cdot x\, dx = \frac{1}{2}x^2\frac{dX}{dx} - \frac{1}{2}\int x^2 \frac{d^2X}{dx},$$

$$\int x^2 \frac{d^2X}{dx} = \int \frac{d^2X}{dx^2} \cdot x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\frac{d^2X}{dx^2} - \frac{1}{3}\int x^3 \frac{d^3X}{dx^2},$$

$$\int x^3 \frac{d^3X}{dx^2} = \int \frac{d^3X}{dx^3} \cdot x^3 dx = \frac{1}{4}x^4\frac{d^3X}{dx^3} - \frac{1}{4}\int x^4 \frac{d^4X}{dx^3},$$

etc.;

mettant successivement pour $\int x dX$, $\int x^2 \frac{d^2X}{dx}$, etc., leurs valeurs, il en résultera

$$\int X dx = X\frac{x}{1} - \frac{dX}{dx}\frac{x^2}{1.2} + \frac{d^2X}{dx^2}\frac{x^3}{1.2.3} - \text{etc.},$$

et pour que l'expression de l'intégrale soit complète, il faudra ajouter une constante à ce développement, qui par là deviendra semblable au précédent. Cette série a été donnée pour la première fois par Jean Bernoulli, et elle porte son nom, comme celle du n° 20 porte celui de Taylor.

241. Jusqu'à présent, je n'ai considéré que le coefficient différentiel du premier ordre; mais si l'on ne connaissait que celui du second ordre, il faudrait alors deux intégrations successives pour remonter à la fonction primitive dont il tire son origine.

Soit X le coefficient différentiel du second ordre de la fonction y; on aura $\frac{d^2y}{dx^2} = X$, et en multipliant les deux membres par dx, il viendra $\frac{d^2y}{dx} = Xdx$; or $\frac{d^2y}{dx}$ est la différentielle de $\frac{dy}{dx}$, prise en regardant dx comme constant : on aura donc $\frac{dy}{dx} = \int Xdx$. Si P représente la fonction primitive de x, égale à $\int Xdx$, et C la constante arbitraire, il viendra $\frac{dy}{dx} = P + C$; multipliant ensuite les deux membres par dx, on trouvera $dy = Pdx + Cdx$, et en intégrant, on obtiendra $y = \int Pdx + Cx + C'$, C' étant une seconde constante arbitraire. Si l'on remet $\int Xdx$, au lieu de P, il en résultera $y = \int dx \int Xdx + Cx + C'$, expression où $\int dx \int Xdx$ indique deux intégrations successives.

Je passe maintenant aux différentielles du troisième ordre. Soit X le coefficient différentiel de la fonction y, relatif à cet ordre; on aura $\frac{d^3y}{dx^3} = X$, d'où

$\frac{d^3y}{dx^2} = X dx$; mais $\frac{d^3y}{dx^2} = d\frac{d^2y}{dx^2}$: donc $\frac{d^2y}{dx^2} = \int X dx + C$, ce qui donne $\frac{d^2y}{dx} = dx \int X dx + C dx$. En intégrant une seconde fois, il viendra $\frac{dy}{dx} = \int dx \int X dx + Cx + C'$, d'où l'on conclura

$$dy = dx \int dx \int X dx + Cx dx + C' dx,$$

et par une troisième intégration, on aura enfin

$$y = \int dx \int dx \int X dx + \frac{C}{2} x^2 + C'x + C''.$$

Dans cette expression, on peut d'abord changer $\frac{C}{2}$ en C, puisque la constante C est arbitraire; ensuite, il faut bien observer que chaque signe $\int$ doit être regardé comme appliqué à tous ceux qui le suivent : c'est pourquoi, en faisant abstraction des constantes arbitraires, on indique encore plus simplement les intégrations successives, par la notation que voici.

Lorsque X désigne le coefficient différentiel du second ordre, on a $d^2y = X dx^2$, et en prenant l'intégrale de chaque membre, on trouve $dy = \int X dx^2$; puis en intégrant encore une fois, il vient $y = \int\int X dx^2 = \int^2 X dx^2$. On a de même, quand X est le coefficient différentiel du troisième ordre, $d^3y = X dx^3$, puis en intégrant, $d^2y = \int X dx^3$, $dy = \int\int X dx^3$, $y = \int\int\int X dx^3 = \int^3 X dx^3$, et ainsi de suite pour les ordres supérieurs.

242. On peut ramener ces expressions à des intégrales simples, au moyen de l'intégration par parties; car, en mettant P au lieu de $\int X dx$ dans $\int^2 X dx^2 = \int dx \int X dx$, il vient

$$\int dx \int X dx = \int P dx = Px - \int x dP = x \int X dx - \int X x dx,$$

d'où

$$\int^2 X dx^2 = x \int X dx - \int X x dx.$$

Passant ensuite à $\int^3 X dx^3 = \int dx \int^2 X dx^2$, et mettant pour $\int^2 X dx^2$ la valeur précédente, on obtient

$$\int^3 X dx^3 = \int x dx \int X dx - \int dx \int X x dx;$$

observant alors que

$$\int x dx \int X dx = \tfrac{1}{2} x^2 \int X dx - \tfrac{1}{2} \int X x^2 dx,$$
$$\int dx \int X x dx = x \int X x dx - \int X x^2 dx,$$

on trouve

$$\int^3 X dx^3 = \tfrac{1}{2} (x^2 \int X dx - 2x \int X x dx + \int X x^2 dx),$$

et continuant ainsi on forme ce tableau :

$$\int X dx = \int X dx,$$

$$\int^2 X dx^2 = \frac{1}{1} [x \int X dx - \int X x dx],$$

$$\int^3 X dx^3 = \frac{1}{1.2} [x^2 \int X dx - 2x \int X x dx + \int X x^2 dx],$$

$$\int^4 X dx^4 = \frac{1}{1.2.3} [x^3 \int X dx - 3x^2 \int X x dx + 3x \int X x^2 dx - \int X x^3 dx],$$

etc.

Les coefficiens numériques de ces expressions sont les mêmes que ceux des puissances du binome $a - b$; et tandis que l'exposant de x hors du signe $\int$ diminue d'une unité à chaque terme, en allant vers la droite, son exposant sous ce signe augmente de la même quantité.

On restituera les constantes arbitraires que j'ai omises dans ces formules, en écrivant $\int X dx + C$ pour $\int X dx$, $\int X x dx + C'$ pour $\int X x dx$, $\int X x^2 dx + C''$ pour $\int X x^2 dx$, et ainsi des autres; car les constantes

C, C', C'', etc., étant affectées de diverses puissances de x, seront irréductibles entre elles.

243. Les différentielles que j'ai traitées jusqu'ici sont prises en regardant dx comme constant, parce que ce sont les seules qui ne renferment qu'un coefficient différentiel. En effet, lorsqu'on fait varier en même temps dy et dx, on a (131) $d^2y = qdx^2 + pd^2x$; si donc on se proposait la différentielle $Udx^2 + Vd^2x$, il faudrait qu'on eût $V = p$ et $U = q$, d'où il résulte $U = \frac{dV}{dx}$; et cette condition étant remplie, on n'aurait plus qu'à intégrer $\int V dx$.

Cette condition ne serait pas nécessaire, si l'on particularisait la relation qu'on suppose entre x et t; car par son moyen on chasserait x, dx et d^2x, et l'on aurait d^2y en t et dt seuls.

Application du Calcul intégral à la quadrature des Courbes et à leur rectification, à la quadrature des Surfaces courbes et à l'évaluation des volumes qu'elles comprennent.

De la quadrature des Courbes.

244. La quadrature des courbes se réduit à l'intégration de la différentielle Xdx, en nommant X la fonction de x, qui exprime l'ordonnée y de la courbe proposée (65); il ne s'agira donc ici que d'appliquer aux courbes les plus connues les méthodes données précédemment pour effectuer cette intégration.

Celles dont l'équation est la plus simple, sont les paraboles des divers ordres, dans lesquelles $y^n = px^m$;

on en tire $y = p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}}$, et par conséquent

$$\int X dx = \int p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{np^{\frac{1}{n}}}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}} + const.$$

Toutes ces courbes, comme on voit, sont *quarrables ;* c'est-à-dire qu'on a l'expression finie et algébrique de la surface du segment compris entre leur arc, l'axe des abscisses et l'ordonnée. Il est facile, par l'expression de ce segment, de calculer celle de tout autre espace contenu entre une portion de la courbe et des lignes droites formant, avec les abscisses et les ordonnées, des polygones dont la Géométrie élémentaire donne la mesure; on en verra plus bas des exemples (252—255).

Les courbes proposées passant par l'origine des abscisses, puisqu'on a en même temps $x = 0$ et $y = 0$, si l'on veut avoir leur aire, à partir de ce point, il faut supprimer la constante arbitraire, parce que l'expression $\frac{np^{\frac{1}{n}}}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$ s'anéantit d'elle-même quand on y fait $x = 0$. Pour avoir ensuite l'aire $BCMP$, *fig.* 43, comprise entre les ordonnées BC et PM, correspondantes aux abscisses $AB = a$ et $AP = x$, il suffira de retrancher de $\frac{np^{\frac{1}{n}}}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$, qui exprime l'aire $ACMP$, la quantité $\frac{np^{\frac{1}{n}}}{m+n} a^{\frac{m+n}{n}}$ égale à l'aire ACB, et l'on aura ainsi FIG. 43.

$$BCMP = \frac{np^{\frac{1}{n}}}{m+n} \left(x^{\frac{m+n}{n}} - a^{\frac{m+n}{n}} \right).$$

Quand l'exposant n est pair, l'expression $\frac{np^{\frac{1}{n}}}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ est susceptible du double signe $\pm$; et comme alors les mêmes abscisses AP appartiennent à deux branches, ACM et Acm, on a deux segmens, $ACMP$ et $AcmP$: celui qui renferme les ordonnées positives a une valeur positive, et l'autre une valeur négative.

Lorsque les exposans m et n sont impairs l'un et l'autre, la quantité $x^{\frac{m+n}{n}}$ n'a qu'un seul signe et reste toujours positive, quel que soit le signe de x; mais il est aisé de voir que dans ce cas l'une des deux branches de la courbe proposée a ses abscisses et ses ordonnées négatives en même temps: il suit donc de là que les aires correspondantes à des abscisses et à des ordonnées négatives, doivent être regardées comme positives.

Si n seule est impaire, alors la quantité $x^{\frac{m+n}{n}}$ devient négative en même temps que x; mais dans ce cas les deux branches de la courbe proposée sont du même côté de la ligne des abscisses, et les ordonnées demeurent toujours positives.

En rapprochant ces remarques, on en conclura que *l'aire d'une courbe est positive quand l'abscisse et l'ordonnée sont de même signe, et négative lorsque le contraire a lieu.*

Tous les segmens paraboliques ont un rapport constant avec le rectangle $ADMP$, formé sur l'abscisse et sur l'ordonnée; car l'expression

$$\frac{n}{m+n}p^{\frac{1}{n}}x^{\frac{m+n}{n}} = \frac{n}{m+n}x.p^{\frac{1}{n}}x^{\frac{m}{n}},$$

équivaut à $\frac{n}{m+n}xy$, en vertu de l'équation $y=p^{\frac{1}{n}}x^{\frac{m}{n}}$.

Lorsque $n=m$, la parabole devient une ligne droite, puisqu'on a $y=p^{\frac{1}{n}}x$; le segment $ACMP$ se change dans le triangle AMP, dont la valeur est, par la formule ci-dessus comme par la Géométrie élémentaire, égale à $\frac{1}{2}xy$.

En faisant $n=2$ et $m=1$, on tombe sur le cas de la parabole ordinaire, et l'on trouve $\frac{2}{3}xy$ pour la valeur du segment $ACMP$.

245. Je vais chercher maintenant la valeur du segment des courbes représentées par l'équation $x^m y^n = p$. Cette équation se tire de $y^n = px^m$, en y changeant $+m$ en $-m$; on a $y=p^{\frac{1}{n}}x^{-\frac{m}{n}}$ et

$$\int X dx = \frac{np^{\frac{1}{n}}}{n-m}x^{\frac{n-m}{n}} + const.$$

Les courbes proposées sont les hyperboles des divers ordres, rapportées à leurs asymptotes, et sont composées de plusieurs branches, telles que UMV, *fig.* 44, inscrites dans les angles que forment ces droites. FIG. 44. En comptant les segmens de l'origine des abscisses, ils renferment l'espace infini en longueur, compris entre la partie CV de la courbe et son asymptote AY, et dont l'aire est infinie ou finie, selon que m est plus grande ou moindre que n. En effet, pour avoir l'espace $BCMP$, pris depuis l'abscisse $AB=a$ jusqu'à l'abscisse $AP=b$, il faut (235) faire successivement $x=a$ et $x=b$ dans l'expression $\frac{np^{\frac{1}{n}}}{n-m}x^{\frac{n-m}{n}}$, et retrancher le premier résultat du second; on aura

donc $BCMP = \frac{np^{\frac{1}{n}}}{n-m}\left(b^{\frac{n-m}{n}} - a^{\frac{n-m}{n}}\right)$. Si maintenant on suppose $a = 0$, le point B tombera sur le point A, et l'espace $BCMP$ se changera en $YAPMV$; or la quantité $a^{\frac{n-m}{n}}$ sera infinie ou nulle, selon qu'on aura $m >$ ou $< n$: dans le premier cas,

$$YAPMV = \frac{np^{\frac{1}{n}}}{m-n}\left(\frac{1}{0} - b^{\frac{n-m}{n}}\right),$$

et dans le second

$$YAPMV = \frac{np^{\frac{1}{n}}}{n-m}\left(b^{\frac{n-m}{n}} - 0\right) = \frac{np^{\frac{1}{n}}}{n-m}b^{\frac{n-m}{n}}.$$

En laissant a d'une grandeur assignable, et faisant b infini, on aura alors l'espace $XBCU$, qui sera infini si m est moindre que n, et qui sera égal à $\frac{np^{\frac{1}{n}}}{m-n}a^{\frac{n-m}{n}}$, si m surpasse n. Il résulte de là, que quand m et n sont inégaux, des deux espaces asymptotiques, l'un est infini et l'autre fini.

La raison de cette différence se trouve dans le plus ou moins de rapidité avec laquelle la courbe s'approche de son asymptote; et puisque $y = \frac{p^{\frac{1}{n}}}{x^{\frac{m}{n}}}$ et $x = \frac{p^{\frac{1}{m}}}{y^{\frac{n}{m}}}$, il est facile de voir que quand $m > n$, y décroît beaucoup plus vite que x, que par conséquent la courbe s'ap-

proche beaucoup plus rapidement de l'axe des abscisses que de celui des ordonnées, *et vice versâ*.

En mettant y au lieu de $p^{\frac{1}{n}}x^{-\frac{m}{n}}$ dans l'expression

$$\frac{np^{\frac{1}{n}}}{n-m}x^{\frac{n-m}{n}} = \frac{n}{n-m}x.p^{\frac{1}{n}}x^{-\frac{m}{n}},$$

elle deviendra $\frac{n}{n-m}xy$, et la valeur de l'aire $YAPMV$ sera $\frac{nxy}{n-m}+const.$ Il semblerait que le terme $\frac{nxy}{n-m}$ doit s'évanouir lorsqu'on fait $x=0$; mais ce qui précède prouve la nécessité de ne rien prononcer à cet égard, avant d'avoir substitué pour y sa valeur en x.

246. Quand $n=m$, on a $xy=p^{\frac{1}{n}}$, ou $xy=p$, en changeant $p^{\frac{1}{n}}$ en p, ce qui est indifférent; la courbe dont il s'agit dans ce cas est l'hyperbole ordinaire, et équilatère si l'angle des coordonnées est droit. L'expression générale de l'aire, trouvée au n° précédent, se présente alors sous une forme infinie, quelle que soit x, et la différentielle de cette expression, étant $\frac{pdx}{x}$, a pour intégrale, $plx+const.$ Les espaces asymptotiques sont *infinis* l'un et l'autre, car lx devient tel par la supposition de $x=0$ et par celle de x infini.

Soit UMV, *fig.* 45, une des branches de l'hyperbole équilatère dont le demi-axe transverse $AC=a$, et la puissance $\overline{BC}\times\overline{AB}=\overline{AB}^2=\frac{1}{2}a^2$ (*Trig.* 164); on aura $p=\frac{1}{2}a^2$, et comptant les aires à partir de l'ordonnée BC, correspondante au sommet C, on obtiendra FIG. 45.

$BCMP = \frac{1}{2}a^2 l.AP - \frac{1}{2}a^2 l.AB = \frac{1}{2}a^2 l.\frac{AP}{AB}$. Si l'on prend AB pour l'unité, il viendra, à cause de $l.1 = 0$, $BCMP = l.AP$. On aura de même $BCM'P' = l.AP'$, $BCM''P'' = l.AP''$, etc., d'où il suit que si les abscisses AP, AP', AP'', etc., sont en progression par quotient, les aires correspondantes $BCMP$, $BCM'P'$, $BCM''P''$, etc., seront en progression par différence.

247. L'hyperbole que je viens de considérer étant équilatère, n'a donné que des logarithmes népériens; mais en variant l'angle des asymptotes et prenant toujours $AB = 1$, on peut obtenir une infinité d'autres systèmes de logarithmes. Soit UMV, *fig.* 46, une hyperbole quelconque; en menant les ordonnées PM, parallèles à l'asymptote AY, on prouvera, par des raisonnemens analogues à ceux du n° 65, que le parallélogramme $PMRP'$ est la différentielle de $BCMP$. Or, si l'on mène $P'Q$ perpendiculaire sur PM, on trouvera $P'Q = PP' . \sin P'PQ = PP' . \sin XAY$; désignant par ω l'angle des asymptotes, on aura $P'Q = dx \sin\omega$, et par conséquent $PMRP' = y\,dx \sin\omega$. Si l'on met pour y sa valeur $\frac{1}{x}$, il en résultera $\frac{dx}{x}\sin\omega$ pour la différentielle de l'aire $BCMP$; et par conséquent $BCMP = lx = l.AP$, en prenant $\sin\omega$ pour module (28). FIG. 46.

Celui des logarithmes ordinaires étant 0,4342945 (30), on a $\sin\omega = 0{,}4342945$, d'où il suit que les asymptotes de l'hyperbole dont les aires donnent les logarithmes ordinaires, font entre elles un angle de $0^d{,}28601$.

248. Considérée analytiquement, la quadrature de l'hyperbole ordinaire présente une singularité qui ne peut être passée sous silence; c'est que les espaces asymptotiques $yApm$, *fig.* 45, correspondans aux abs- FIG. 45

cisses négatives, ne sauraient être compris dans la même formule que les espaces $YAPM$ qui répondent aux abscisses positives. En effet, la fonction lx qui exprime l'aire $YAPM$ (246), non-seulement devient infinie quand $x=0$, mais passe à l'imaginaire quand x devient négatif, parce que l'équation $u=lx$, dérivant de $x=e^u$, n'admet point de valeur négative pour x.

Cette difficulté, sur laquelle je ne saurais m'arrêter ici, tient au passage de l'ordonnée y par l'infini, qui paraît rompre quelquefois le lien de la continuité entre les aires (*). Chacune de ces aires s'exprime cependant très bien en particulier ; car si l'on prend, sur le côté négatif de l'axe des abscisses, des parties $Ab=AB$, $Ap=AP$, on aura

$$bcmp=BCMP=l.\frac{AP}{AB}=l.\frac{Ap}{Ab}\ (246).$$

La même chose se conclut aussi du calcul, en observant que si l'on change x en $-x$, la différentielle de l'aire, devenant

$$\frac{-dx}{-x}=\frac{dx}{x},$$

a encore pour intégrale $lx+const.$

249. En faisant $AC=a$, $AP=x$ et $PN=y$, *fig.* 47, l'équation du cercle ANE sera $y^2=2ax-x^2$, et le segment ANP aura pour expression $\int dx\sqrt{2ax-x^2}$, qui se transforme en $-\int du(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}$, lorsqu'on fait $x=a-u$. Or, la formule (B) (195) donne FIG. 47.

$$-\int du(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}=-\tfrac{1}{4}u(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}-\tfrac{1}{2}a^2\int du(a^2-u^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=-\tfrac{1}{4}u\sqrt{a^2-u^2}+\tfrac{1}{2}a^2\int\frac{-du}{\sqrt{a^2-u^2}};$$

(*) *V.* le Traité in-4°, t. I, p. 134 ; t. II, p. 161 ; t. III, p. 613.

de plus

$$\int \frac{-du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \text{arc}\left(\cos = \frac{u}{a}\right) \quad (36);$$

en mettant cette valeur et celle de u, il vient

$$\int dx \sqrt{2ax-x^2} =$$
$$-\tfrac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-x^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \text{arc}\left(\cos = \frac{a-x}{a}\right),$$

résultat qui s'évanouit quand $x = 0$.

Il facile de reconnaître, dans la partie

$$\tfrac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-x^2},$$

l'aire du triangle PCN, et de voir que

$$\tfrac{1}{2}a^2 \text{arc}\left(\cos = \frac{a-x}{a}\right), \text{ ou } \tfrac{1}{2}AC.\text{arc } AN,$$

est celle du secteur ACN.

Quand on y fait $x = 2a$, l'expression de ANP devient $\frac{1}{2}a^2 \text{arc}\,(\cos = -1) = \frac{1}{2}a^2\pi$, π désignant la demi-circonférence du cercle dont le rayon est 1 ; et elle appartient alors au demi-cercle : on aura donc pour le cercle entier $a^2\pi = \frac{1}{2}a.2a\pi$, ainsi qu'on le prouve dans les Élémens de Géométrie.

Le développement de $\int dx\sqrt{2ax-x^2}$, trouvé dans le n° 205, donne des valeurs approchées de l'aire ANP.

Si l'équation du cercle était rapportée au centre, on obtiendrait immédiatement

$$\int dx\sqrt{a^2-x^2} = \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \text{arc}\left(\sin = \frac{x}{a}\right).$$

250. L'ordonnée de l'ellipse étant $\frac{b}{a}\sqrt{2ax-x^2}$, le

segment elliptique AMP sera égal à $\frac{b}{a}\int dx\sqrt{2ax - x^2}$; et comme il est nul en même temps que le segment circulaire ANP, on aura $ANP : AMP :: a : b$; car il est facile de conclure du n° 236, que quand deux différentielles sont dans un rapport constant, ce rapport est aussi celui des intégrales, si ces intégrales sont nulles en même temps.

D'après ce qui précède, l'aire du cercle décrit sur le grand axe d'une ellipse, pris pour diamètre, étant à l'aire de cette courbe comme le grand axe est au petit, celle-ci est équivalente au cercle décrit sur un rayon moyen proportionnel entre les moitiés de ces axes. En effet, par le rapport ci-dessus, l'aire de l'ellipse est $\pi a^2 \times \frac{b}{a}$ ou πab, et cette dernière quantité représente évidemment l'aire du cercle dont le rayon serait $\sqrt{ab}$.

251. L'hyperbole rapportée à son axe transverse a pour équation $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$, et donne

$$AQR = \frac{b}{a}\int dx\sqrt{2ax + x^2}.$$

Cette intégrale peut s'obtenir par les logarithmes (183) ou se développer en série; mais au lieu de m'arrêter à calculer ces résultats, je m'occuperai des secteurs elliptiques et des secteurs hyperboliques, dont les expressions différentielles se présentent souvent.

252. Soit $ABab$, une ellipse dont le demi-grand axe $AC = a$, le demi-petit axe $BC = b$; en faisant $CP = x$ il vient

$$PM = y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Il est évident que le secteur

$$ACM = CMP + AMP,$$

et que

$$\mathrm{d}.ACM = \mathrm{d}.CMP + \mathrm{d}.AMP,$$

$$CMP = \frac{1}{2} CP \times PM = \frac{1}{2}\frac{bx}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

$$\mathrm{d}.CMP = \frac{1}{2}\frac{b}{a}\left(\mathrm{d}x\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right),$$

$$\mathrm{d}.AMP = -\frac{b}{a}\mathrm{d}x\sqrt{a^2 - x^2}.$$

La dernière de ces différentielles est affectée du signe —, parce que l'aire AMP décroît lorsque x augmente ; et elles donnent

$$\mathrm{d}.ACM = -\frac{1}{2}\frac{b}{a}\frac{a^2\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Si l'on fait $\frac{a}{b} = 1$, le secteur elliptique ACM se changera dans le secteur ACN, appartenant au cercle $AEae$ décrit sur le grand axe Aa comme diamètre; on aura donc

$$\mathrm{d}.ACN = -\frac{1}{2}\frac{a^2\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{2}a \times -\frac{a\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

mais $-\frac{a\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ étant la différentielle de l'arc AN, il en résulte, ainsi que de la Géométrie élémentaire,

$$ACN = \frac{1}{2}a \times AN = \frac{1}{2}AC \times AN;$$

et puisque les secteurs ACN et ACM ont leur origine

commune au point A, on en conclura (250) que le secteur elliptique

$$ACM = \frac{b}{a} ACN = \frac{1}{2} BC \times AN.$$

253. Dans l'hyperbole XAx, décrite sur les mêmes axes que l'ellipse $ABab$, et dont l'équation est

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

le secteur $ACR = CQR - AQR$, ce qui donne

$$\mathrm{d}.ACR = \mathrm{d}.CQR - \mathrm{d}.AQR;$$

et comme

$$CQR = \frac{1}{2} CQ \times QR = \frac{1}{2}\frac{bx}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

$$\mathrm{d}.AQR = \frac{b}{a}\mathrm{d}x\sqrt{x^2 - a^2},$$

on aura

$$\mathrm{d}.ACR = \frac{1}{2}\frac{b}{a}\frac{a^2\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}};$$

d'où l'on voit que la différentielle du secteur hyperbolique est, aux signes près, la même que celle du secteur elliptique.

254. Le secteur hyperbolique ACM, *fig.* 46, est égal à l'espace asymptotique $BCMP$; car FIG. 46.

$$ACM = BCMP + ABC - AMP,$$

et

$$ABC = \frac{AB \times BC \times \sin B}{2} = \frac{AP \times PM \times \sin B}{2} = AMP.$$

255. Ce qui précède suffit pour faire voir com-

ment le calcul intégral s'applique à la quadrature des courbes; cependant je ne puis quitter ce sujet sans donner quelques-uns des résultats intéressans auxquels les Géomètres sont parvenus, par rapport aux courbes transcendantes.

Dans la Logarithmique, dont l'équation est $y = lx$, on a $\int y dx = \int dx lx = xlx - x + const.$ (207). La partie variable de cette expression devient nulle lorsque $x = 0$; car en faisant $x = \frac{1}{m}$, elle prend la forme $-\frac{lm}{m} - \frac{1}{m}$, sous laquelle elle est nulle quand m est infinie (99): il est donc inutile, d'après cela, d'y ajouter une constante, lorsqu'on veut avoir les segmens à partir du point A, *fig.* 48.

FIG. 48.

En y faisant $x = AE = 1$, elle donne l'expression de l'espace asymptotique $cAEx$, qui est fini et égal à -1.

Si l'on prend les ordonnées à la place des abscisses, on aura $\int x dy = \int dx = x$, pour l'espace $cOMx$, appuyé sur l'axe des ordonnées AC, et dont l'expression est algébrique; je n'y ai point ajouté de constante, parce qu'elle s'évanouit en même temps que x. L'espace $cAEx$, qui répond à $x = AE = 1$, a, par cette formule, la même valeur que par la précédente, abstraction faite du signe.

J'ai supposé le module égal à l'unité; s'il était désigné par M, on aurait

$$\int dx lx = xlx - \int M dx = xlx - Mx \text{ et } \int x dy = Mx.$$

256. En discutant la courbe dont l'équation est

$$y = \frac{a^x}{x},$$

on trouvera sans peine la forme indiquée dans la figure 49. L'axe CC' des y est asymptote des branches

FIG. 49.

HF, $R'F'$, et AB', côté négatif de l'axe des x, l'est de la branche $M'K'$.

La quadrature de cette courbe dépend de l'intégrale $\int\frac{a^x\mathrm{d}x}{x}$ dont le développement en série, obtenu dans le n° 214, semble ne pouvoir convenir à la partie de l'aire correspondante aux abscisses négatives, à cause de son premier terme lx qui devient imaginaire; cependant, si l'on appliquait à cette recherche le procédé du n° 233, on obtiendrait des résultats réels. Cette difficulté, du même genre que celle qui a été indiquée dans le n° 248, se lève en changeant le signe de x avant l'intégration; car

$$\int\frac{a^{-x}\times-\mathrm{d}x}{-x}=\int\frac{a^{-x}\mathrm{d}x}{x}=$$

$$lx-\frac{x\,l\,a}{1.1}+\frac{x^2(l\,a)^2}{1.2.2}-\frac{x^3(l\,a)^3}{1.2.3.3}+\text{etc.}+const.$$

comme si l'on avait changé x en $-x$ dans les seuls termes algébriques du développement cité.

Pour savoir ce que sont les trois espaces asymptotiques de la courbe proposée, il faut chercher les valeurs que prend l'intégrale $\int\frac{a^x\mathrm{d}x}{x}$ entre les limites

$$x=0 \text{ et } x=n,\ x=0 \text{ et } x=-n,$$
$$x=-n \text{ et } x=-\text{infini},$$

n désignant une quantité finie quelconque. Dans le premier et dans le second cas, on trouve un résultat infini, puisqu'en faisant $x=0$, soit dans la série du n° 214, soit dans celle qui vient d'être rapportée, elles se réduisent à $l.0$; mais on ne saurait rien prononcer sur le troisième cas, parce que les termes du dévelop-

pement de $\int \frac{a^{-x}dx}{x}$ étant alternativement de signes contraires, il se peut que la différence entre la partie positive et la partie négative demeure finie, quoique chacune de ces parties soit infinie; et c'est ce qui arrive en effet, comme l'a prouvé Mascheroni, en déterminant la constante arbitraire, de manière que l'intégrale s'évanouisse lorsqu'on y suppose x infini; en sorte que l'espace asymptotique $B'P'M'K'$, compris entre les limites $x=-n$ et $x=-$ infini, est d'une grandeur finie (*).

La transformée $\int \frac{dz}{lz}$ (214), obtenue en faisant $a^x=z$, présente les mêmes circonstances à cause du terme llz qui commence son développement, et qui devient imaginaire quand lz est négatif.

257. L'équation de la cycloïde étant

$$dx=\frac{ydy}{\sqrt{2ay-y^2}} \quad (114),$$

il vient

$$\int ydx=\int \frac{y^2dy}{\sqrt{2ay-y^2}},$$

expression qu'il serait facile d'intégrer par les arcs de cercle, au moyen de la formule du n° 199; mais on peut arriver à un résultat plus simple en prenant la différentielle du segment $ACQM$, *fig.* 50, dont l'ordonnée $QM=AC-PM=2a-y$. FIG. 50.

Posant, en conséquence, $2a-y=z$, on aura

$$d.ACQM=zdx,$$

et l'on obtiendra

(*) *Voyez* le Traité in-4°, t. III, p. 513.

$$zdx = \frac{(2a-y)ydy}{\sqrt{2ay-y^2}} = dy\sqrt{2ay-y^2};$$

donc

$$ACQM = \int dy\sqrt{2ay-y^2} + const.$$

Or cette intégrale, exprimant l'aire d'un segment du cercle dont le diamètre est $2a$, et l'abscisse y (249), représente le segment Imn, qui s'évanouit quand $y=0$, ainsi que le segment $ACQM$: donc $ACQM = Imn$. Au point K, où $y=2a$, le segment ACK devient égal au demi-cercle $ImKI$. Enfin il est visible que l'espace $KMQ = ACK - ACQM = Kmn$.

Le rectangle AK ayant pour hauteur IK et pour base $AI = ImK$, sera quadruple du demi-cercle $ImKI$; retranchant de ce rectangle l'espace $ACK = ImKI$, il restera $AMKI = 3$ fois $ImKI$. Il suit de là, que l'espace $AKLA$, compris entre une branche de la cycloïde et son axe, est triple du cercle générateur.

258. Il me reste à parler des spirales; je vais m'occuper d'abord de celles que représente l'équation $u = at^n$ (117), dans laquelle t est égal à l'arc ON, *fig.* 51, et $u = AM$. Les coordonnées étant polaires, la différentielle de l'aire sera $\frac{u^2dt}{2}$ (120); mettant pour u sa valeur, et intégrant, il viendra $\frac{a^2t^{2n+1}}{4n+2} + const.$; et quand n est positive, on doit négliger la constante lorsque l'on compte les aires en partant de la ligne AO sur laquelle $t=0$: alors l'aire $ACM = \frac{a^2t^{2n+1}}{4n+2}$. Après une révolution du rayon vecteur, on aura l'espace..... $ACMB = \frac{a^2(2\pi)^{2n+1}}{4n+2}$, π étant la demi-circonférence du cercle ON. FIG. 51.

Dans la spirale d'Archimède (117), $a=\frac{1}{2\pi}$, $n=1$ et $ACM=\frac{t^3}{24\pi^2}$, résultat qui, lorsqu'on y fait $t=2\pi$, donne $ACMB=\frac{\pi}{3}$, c'est-à-dire le tiers du cercle QN, puisqu'il s'agit d'unités quarrées, et que l'aire de ce cercle est $\pi(1)^2$.

Dans la seconde révolution, le rayon vecteur AN repasse sur l'aire tracée dans la première, et ainsi de suite à chaque révolution, en sorte que ces aires s'ajoutent les unes aux autres, et que pour donner seulement celle qui est terminée par la m^e révolution, l'intégrale..... $\int\frac{u^2dt}{2}$, doit être prise entre les limites $t=(m-1)2\pi$ et $t=m.2\pi$.

Pour la spirale d'Archimède, on trouve ainsi.... $\frac{m^3-(m-1)^3}{3}\pi$.

Si l'on calcule l'aire terminée par la révolution suivante, c'est-à-dire la $(m+1)^e$, et qu'on en retranche celle qui la précède, on aura pour l'espace compris entre deux révolutions, ou *spires*,

$$\frac{(m+1)^3-2m^3+(m-1)^3}{3}\pi=2m\pi,$$

ce qui revient à 2π quand $n=1$, et montré que l'espace compris entre la m^e et la $(m+1)^e$ spires, est égal à m fois celui qui est renfermé entre la première et la seconde, ainsi que l'a trouvé Archimède.

Dans la spirale hyperbolique, où $n=-1$, on a

$$\int\frac{u^2dt}{2}=-\frac{a^2}{2t}+const.$$

et l'aire comprise entre les deux rayons vecteurs correspondans à $t=b$ et à $t=c$, sera

$$\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right),$$

expression qui devient infinie quand $t=0$, à cause de l'espace compris entre l'axe AB, *fig.* 31, et la branche infinie MK (p. 173). FIG. 31.

Dans la spirale logarithmique enfin, $t=lu$ (128),

$$dt=\frac{du}{u},\quad \int\frac{u^2dt}{2}=\int\frac{udu}{2}=\frac{u^2}{4}+const.$$

259. La différentielle de l'arc d'une courbe rapportée à des coordonnées perpendiculaires entre elles, est exprimée par $\sqrt{dx^2+dy^2}$ (64); en y substituant, au lieu de dy^2, sa valeur tirée de l'équation différentielle de la courbe proposée, elle prendra la forme Xdx, et son intégrale donnera la longueur de l'arc de cette courbe. Demander la longueur de l'arc d'une courbe, c'est demander sa *rectification*, parce que la solution de ce problème, lorsqu'elle s'obtient exactement, met en état d'assigner une ligne droite qui soit égale à l'arc dont il s'agit.

260. Je prends pour premier exemple les paraboles des divers degrés, représentées par l'équation $y=px^n$, n étant un nombre quelconque entier ou fractionnaire; il vient

$$dy=npx^{n-1}dx,\quad \sqrt{dx^2+dy^2}=dx\sqrt{1+n^2p^2x^{2n-2}};$$

l'arc parabolique sera donc exprimé par

$$\int(1+n^2p^2x^{2n-2})^{\frac{1}{2}}dx.$$

Cette intégrale s'obtiendra sous une forme finie et algé-

brique, lorsque l'exposant $2n-2$ sera égal à l'unité ou s'y trouvera contenu un nombre exact de fois (192).

Soit d'abord $2n-2=1$, il en résultera $n=\frac{3}{2}$, et

$$\int(1+n^2p^2x^{2n-2})^{\frac{1}{2}}dx=\frac{8}{27p^2}\left(1+\frac{9}{4}p^2x\right)^{\frac{3}{2}}+const.,$$

la courbe proposée sera donnée par l'équation $y=px^{\frac{3}{2}}$, ou $y^2=p^2x^3$, et sera par conséquent la même que la parabole du troisième degré qui est la développée de la parabole ordinaire (81). Si l'on compte les arcs à partir du point où $x=0$, on aura

$$\frac{8}{27p^2}\left[\left(1+\frac{9}{4}p^2x\right)^{\frac{3}{2}}-1\right].$$

En faisant $\frac{1}{2n-2}=i$, i désignant un nombre entier, on trouvera $n=\frac{2i+1}{2i}$, et l'équation $y^{2i}=p^{2i}x^{2i+1}$ fournira une infinité de paraboles rectifiables : à l'égard des autres, on ne peut obtenir leurs arcs que par approximation.

Pour la parabole ordinaire, dans laquelle $n=2$, on a $\int dx(1+4p^2x^2)^{\frac{1}{2}}$; par la formule (B) du n° 195, on trouve

$$\int dx(1+4p^2x^2)^{\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{2}x(1+4p^2x^2)^{\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1+4p^2x^2}};$$

et comme

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+4p^2x^2}}=\frac{1}{2p}l(2px+\sqrt{1+4p^2x^2})+const.\ (184),$$

il en résultera

$$\int dx(1+4p^2x^2)^{\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{2}x(1+4p^2x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4p}l(2px+\sqrt{1+4p^2x^2})+const.$$

Telle est la valeur d'un arc quelconque de la parabole ordinaire; on peut y supprimer la constante, en faisant commencer l'intégrale lorsque $x=0$.

L'arc des hyperboles données par l'équation $y=px^{-n}$, a pour expression $\int x^{-n-1}dx(x^{2n+2}+n^2p^2)^{\frac{1}{2}}$, et ne peut s'obtenir que par approximation.

261. La différentielle de l'arc de cercle est $-\frac{adx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, lorsqu'on part de l'équation $y^2=a^2-x^2$ (64), et $\frac{adx}{\sqrt{2ax-x^2}}$, quand on emploie l'équation..... $y^2=2ax-x^2$; sous l'une et l'autre de ces formes, son intégrale ne peut s'obtenir que par approximation, et j'en ai déjà donné plusieurs développemens (205).

262. Je passe à l'ellipse, et je prends pour équation de cette courbe $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$; la différentielle de son arc sera $\frac{dx\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}}{a\sqrt{a^2-x^2}}$: en faisant pour plus de simplicité le grand axe $a=1$, et le quarré de l'excentricité $a^2-b^2=1-b^2=e^2$, l'arc deviendra.... $\int\frac{dx\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$. Déjà, dans le n° 206, j'ai rapporté une série qui donne la valeur approchée de cette intégrale, lorsque e est très petit, et qui conviendra aux ellipses peu aplaties.

En supposant $x=1$ dans cette série, et mettant $\frac{\pi}{2}$ à la place de l'arc A, qui est alors de 1°, il vient

$$\frac{1^\circ}{2}\pi\left(1-\frac{1.1}{2.2}e^2-\frac{1.1.1.3}{2.2.4\,4}e^4-\frac{1.1.1.3.3.5}{2.2.4.4.6.6}e^6-\text{etc.}\right),$$

développement très convergent lorsque e est une petite fraction.

263. La différentielle de l'arc elliptique s'exprime d'une manière très simple, au moyen de l'arc qui lui correspond dans le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre. Soit $EN = \varphi$, *fig.* 47, on aura

FIG. 47.

$$CP = x = \sin\varphi, \quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\varphi,$$

et par conséquent

$$d.BM = d\varphi\sqrt{1 - e^2\sin\varphi^2}.$$

264. L'équation de l'hyperbole étant

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2),$$

on a $\frac{dx\sqrt{(a^2+b^2)x^2-a^4}}{a\sqrt{x^2-a^2}}$ pour la différentielle de son arc; en faisant $a = 1$, $a^2 + b^2 = 1 + b^2 = e^2$, cet arc se trouve exprimé par $\int \frac{dx\sqrt{e^2x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$ et peut, dans le cas où e est très près de l'unité, se développer en série par un procédé analogue à celui du n° 206.

265. Il me reste à parler des courbes transcendantes. L'équation de la cycloïde étant

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{2ay-y^2}} \quad (114),$$

on en tire

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dy\sqrt{2a}}{\sqrt{2a-y}},$$

différentielle dont l'intégrale est

$$= -2\sqrt{2a(2a-y)} + const.$$

Il est évident que $\sqrt{2a(2a-y)}$ est l'expression de la corde mK, *fig.* 50, du cercle générateur; et comme la partie variable de l'intégrale s'évanouit au point K où $y=2a$, il s'ensuit qu'elle exprime l'arc MK; on a donc FIG. 50.

$$MK = 2\sqrt{2a(2a-y)} = 2mK.$$

Quand $y=0$, cet arc devient $AK=2IK$, résultat qui s'accorde avec ce qu'on a vu dans le n° 116, et d'où il suit que l'arc total AKL est quadruple du diamètre du cercle générateur (*).

266. Pour donner un exemple de l'usage de la formule $\sqrt{u^2dt^2+du^2}$, qui exprime la différentielle de l'arc d'une courbe rapportée aux coordonnées polaires, (125), je prendrai les spirales dont l'équation est $u=at^n$, et j'aurai à intégrer la différentielle

$$dt\sqrt{a^2t^{2n}+n^2a^2t^{2n-2}} = at^{n-1}dt(t^2+n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Lorsque $n=1$, on a seulement $adt(t^2+1)^{\frac{1}{2}}$, différentielle de la même forme que celle de l'arc de la parabole ordinaire (260), et d'où il suit que c'est à la rectification de cette courbe que se rapporte celle de la spirale d'Archimède.

(*) Si l'on représente par s l'arc MK, par y', la ligne..... $Kn=2a-y$, et que l'on change $2a$ en a', l'expression de MK, trouvée ci-dessus, donne l'équation

$$s=2\sqrt{a'y'}, \quad \text{ou} \quad s^2=4a'y',$$

dont on se sert dans la Mécanique.

Dans la spirale logarithmique on a $t = lu$, ce qui donne

$$\sqrt{u^2 dt^2 + du^2} = du\sqrt{2};$$

l'arc de cette courbe a donc pour expression..... $u\sqrt{2} + const.$, ou seulement $u\sqrt{2}$, en partant de l'origine des rayons vecteurs; et l'on voit que quoiqu'il se trouve, entre cette origine et un point quelconque de la courbe, une infinité de révolutions, elles ne composent cependant qu'une longueur finie, égale à la diagonale du quarré fait sur le rayon vecteur.

De la cubature des corps terminés par des surfaces courbes, de la quadrature de leurs aires, et de l'intégration des différentielles partielles.

267. Les surfaces courbes que les Géomètres ont considérées les premières, sont celles de révolution, parce que les différentielles de leurs aires et des volumes qu'elles comprennent, ont une expression plus simple que leurs analogues dans les surfaces courbes en général.

Soit u le volume du corps engendré par le segment FIG. 52 AMP, *fig.* 52, d'une courbe quelconque AZ, tournant autour de l'axe AB pris dans son plan; il est évident que ce volume, terminé par le plan circulaire décrit par l'ordonnée MP, est une fonction de l'abscisse $AP = x$. Si l'on prend une autre abscisse AP', que l'on mène une seconde ordonnée $M'P'$ et les droites MR et SM', parallèles à PP', on verra que le volume u s'accroît de celui que décrit le trapèze curviligne $PMM'P'$, en tournant autour de PP', et que ce dernier corps,

compris entre les cylindres engendrés par les rectangles MP' et $M'P$, diffère d'autant moins de l'un et de l'autre, que les points M et M' sont plus rapprochés, en sorte que la limite des rapports de ces trois corps est l'unité; on peut donc, lorsqu'il s'agit de limites, prendre le cylindre décrit par MP', pour le corps engendré par $PMM'P'$. Ce cylindre ayant pour base le cercle décrit par le rayon $PM=y$, son volume sera $\pi y^2 \times PP'$, en nommant π le rapport de la circonférence au diamètre, et l'on trouvera, par le raisonnement du n° 65, que $\frac{du}{dx}=\pi y^2$, d'où $u=\pi \int y^2 dx$. Lors donc qu'on aura l'équation de la courbe AMZ, on substituera pour y sa valeur en x, et l'intégration fera connaître le volume d'un segment quelconque du corps engendré par cette courbe.

268. Pour trouver la différentielle de l'aire du même corps, il faut observer que son accroissement, ou l'aire décrite par l'arc MOM' qui s'approche sans cesse de sa corde MM', tend à se confondre avec l'aire du tronc de cône droit décrit par cette corde; et en passant aux limites, on peut prendre l'une pour l'autre (*). Mais l'aire du tronc de cône droit décrit par MM', aura pour expression

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}(2\pi MP + 2\pi M'P')\,MM' \\ &=\pi(MP+M'P')MM'; \end{aligned}$$

et en la comparant à l'accroissement de l'abscisse PP', on obtiendra

$$\pi(MP+M'P')\,\frac{MM'}{PP'};$$

or, en passant aux limites, $M'P'$ se confond avec MP

(*) On verra aisément qu'il n'en est pas ainsi de celles des cylindres inscrit et circonscrit, engendrés par MR et SM'.

ou y, et $\frac{MM'}{PP'} = \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$ (64) : donc le coefficient différentiel de l'aire décrite par l'arc AM, est égal à

$$2\pi y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}},$$

et par conséquent $2\pi y\sqrt{dx^2+dy^2}$ est la différentielle de cette aire.

On parvient sur-le-champ à cette expression, ainsi qu'à celle du n° précédent, en regardant la courbe AMZ comme un polygone ; car alors l'élément du volume est le cylindre décrit par le rectangle MP', celui de l'aire est le tronc de cône décrit par le côté MM'.

269. J'insisterai peu sur les applications, qui n'ont par elles-mêmes aucune difficulté. Si l'on prend l'équation à l'ellipse, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$, on trouvera que le volume d'un segment du corps qu'elle engendre, en tournant autour de l'axe désigné par $2a$, est exprimé par

$$\frac{\pi b^2}{a^2}\int(2ax-x^2)dx = \frac{\pi b^2}{a^2}\left(ax^2-\frac{x^3}{3}\right) + const. \quad (267),$$

et l'intégrale étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=2a$, donne $\frac{4\pi ab^2}{3}$ pour le corps entier.

Quand $a=b$, ce corps devient une sphère, et son volume est $\frac{4\pi a^3}{3}$, ainsi qu'on le trouve par la Géométrie élémentaire.

Si l'ellipse était rapportée à son centre, ou qu'on employât l'équation $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$, le segment serait

$$\int \frac{\pi b^2}{a^2}(a^2 - x^2)dx = \frac{\pi b^2}{3a^2}(3a^2x - x^3) + const.,$$

intégrale qu'il faudrait prendre depuis $x = -a$ jusqu'à $x = a$, pour obtenir le corps entier, et qui donnerait alors le même résultat que ci-dessus.

On aurait

$$\int \frac{2\pi b dx \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}{a^2}$$

pour l'expression de l'aire. Lorsque $a > b$, cette intégrale se rapporte facilement à l'aire du segment circulaire dont l'abscisse est x et le rayon $\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$; elle est logarithmique quand $a < b$, puisque le radical prend alors la forme $\sqrt{a^4 + (b^2 - a^2)x^2}$: enfin, si l'on suppose $a = b$, on a seulement

$$\int 2\pi a dx = 2\pi ax + const.,$$

intégrale qui donne, en la prenant depuis $x = -a$ jusqu'à $x = a$, $4\pi a^2$ pour l'aire totale de la sphère.

270. Je considère maintenant les surfaces courbes en général, en les rapportant à trois plans perpendiculaires entre eux, au moyen des trois coordonnées $AP = x$, $PM' = y$, $M'M = z$, *fig.* 53. FIG. 53.

Le segment $APGMM'QHD$, ayant sa base $APM'Q$ sur le plan des xy, et terminé par les deux plans $PM'MG$, $QM'MH$, respectivement parallèles à ceux des yz et des xz, et par la surface courbe proposée, est nécessairement une fonction des deux variables indépendantes x et y; il peut s'étendre successivement dans le sens de chacune, ou varier par rapport à toutes deux simultanément. En effet, si l'on suppose que, y demeurant constant,

x se change en $AP+Pp$, ce segment s'accroîtra de la tranche $PGMM'm'mgp$, et de la tranche $QHMM'n'nhq$, si l'on fait varier y seul de Qq; enfin si x et y deviennent simultanément $AP+Pp$, $AQ+Qq$, le même segment, ayant alors pour limites les plans $pN'Ng$, $qN'Nh$, différera de son état primitif par les deux tranches déjà énoncées, et par l'espèce de prisme tronqué $M'm'N'n'nMmN$, qui n'est autre que l'accroissement de la première tranche, lorsqu'on y fait varier y seul, ou celui de la seconde quand, dans cette dernière, on fait varier x seul.

Si l'on représente par u la fonction de x et de y qui exprime le volume du segment $APGMM'QHD$, il est évident que dans l'expression du changement total de cette fonction (41), les termes où x a varié seul donneront l'expression de la première tranche, ceux où y a varié seul, celle de la deuxième tranche, et que les autres appartiendront au prisme tronqué $M'N$; on aura donc

$$M'N=\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}hk+\tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}h^2k+\tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2}hk^2+\text{etc.};$$

divisant les deux membres de cette équation par hk, et passant aux limites relatives à l'anéantissement de h et de k, celle du second membre sera $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$. Or le prisme tronqué $M'N$ tend sans cesse vers le parallélépipède formé sur la base $M'm'N'n'$ et l'ordonnée $M'M$; et peut en approcher aussi près qu'on voudra; mais si, en prenant l'un pour l'autre, puisqu'il s'agit de limites, on substitue $\overline{M'm'}\times\overline{M'n'}\times\overline{M'M}$, au prisme $M'N$, qu'on fasse $M'm'$ ou $Pp=h$, $M'n'$ ou $Qq=k$, le rapport $\frac{M'N}{hk}$

se réduit à $M'M=z$: il résulte donc de là que $\frac{d^2u}{dxdy}=z$, et que pour obtenir le segment $APGMM'QHD$, il faut, par l'intégration, remonter du coefficient différentiel $\frac{d^2u}{dxdy}$ à la fonction u.

271. Quoique le coefficient différentiel $\frac{d^2u}{dxdy}$ soit relatif à deux variables, on peut néanmoins parvenir à la fonction dont il dérive, par les méthodes données pour l'intégration des fonctions d'une seule, parce que chacune de ces variables est regardée comme constante à son tour. En effet, à cause de $\frac{d^2u}{dxdy}=\frac{d\frac{du}{dx}}{dy}$, on aura $\frac{d\frac{du}{dx}}{dy}dy=zdy$, et prenant l'intégrale de chaque membre, en ne considérant comme variable que y seul, il viendra $\frac{du}{dx}=\int zdy$, d'où l'on tirera

$$\frac{du}{dx}dx=dx\int zdy;$$

intégrant de nouveau, mais par rapport à x seulement, on trouvera $u=\int dx\int zdy$.

En ne considérant cette recherche que du côté purement analytique, il est évident que la constante qu'il faudra ajouter pour compléter la première intégrale, peut renfermer x d'une manière quelconque; que celle qu'on mettra à la suite de la seconde intégrale doit être considérée comme une fonction quelconque de y; et cela, parce que toute fonction de x seul doit dis-

paraître comme une constante lorsqu'on ne différentie que par rapport à y, et qu'il en est de même de toute fonction de y, lorsqu'on ne différentie que par rapport à x.

L'ordre des intégrations est indifférent (40) (*). En s'occupant d'abord de la variable x, on aurait eu $\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{d\frac{du}{dy}}{dx}$, et de là, on aurait tiré successivement

$$\frac{du}{dy} = \int z dx, \qquad u = \int dy \int z dx.$$

Ce résultat et le précédent s'écrivent comme il suit :

$$u = \iint z dy dx \quad \text{et} \quad u = \int\int z dx dy,$$

en faisant passer les deux différentielles sous le dernier signe $\int$, ce qui est permis, lorsqu'on observe que chaque signe n'est relatif qu'à l'une des variables en particulier.

Pour éclaircir et confirmer ce qui précède, soit $z = \frac{1}{x^2+y^2}$; il viendra

$$u = \iint \frac{dxdy}{x^2+y^2} = \int dx \int \frac{dy}{x^2+y^2} = \int dy \int \frac{dx}{x^2+y^2}.$$

La première succession d'intégrales donne

$$\int \frac{dy}{x^2+y^2} = \frac{1}{x} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{y}{x}\right) + X',$$

résultat dans lequel X' représente une fonction arbi-

(*) M. Cauchy a montré que ceci n'était plus généralement vrai, lorsqu'il s'agissait d'intégrales définies; on en trouvera des exemples dans la détermination de quelques-unes de ces intégrales, à la fin de cet ouvrage.

traire de x, ajoutée pour compléter l'intégrale; en intégrant de nouveau par rapport à x, et faisant $\int X'dx = X$, on trouve

$$\int dx \int \frac{dy}{x^2+y^2} = \int dx \left[\frac{1}{x} \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right) + X'\right]$$
$$= \int \frac{dx}{x} \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right) + X.$$

L'intégrale $\int \frac{dx}{x} \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right)$ s'obtient en série, en mettant au lieu de arc $\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right)$ son développement $\frac{y}{x} - \frac{y^3}{3x^3} + \frac{y^5}{5x^5}$ — etc. (202); et comme il faut, après cette intégration, ajouter une fonction arbitraire de y, en la désignant par Y, on aura enfin

$$\iint \frac{dxdy}{x^2+y^2} = X + Y - \frac{y}{x} + \frac{y^3}{9x^3} - \frac{y^5}{25x^5} + \frac{y^7}{49x^7} - \text{etc.}$$

En opérant dans un ordre inverse, d'après la seconde succession d'intégrales, on trouvera

$$\int \frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{1}{y} \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{y}\right) + Y',$$
$$\int dy \int \frac{dx}{x^2+y^2} = \int dy \left[\frac{1}{y} \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{y}\right) + Y'\right]$$
$$= \int \frac{dy}{y} \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{y}\right) + Y.$$

Mais si l'on observe que

$$\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{y}\right) = \frac{\pi}{2} - \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right),$$

on aura, après la dernière intégration et l'addition d'une fonction arbitraire de x,

$$\iint \frac{dx\,dy}{x^2+y^2} = \frac{\pi}{2}\,ly - \int \frac{dy}{y}\,\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right) + Y + X;$$

et comme on peut comprendre le terme $\frac{\pi}{2}\,ly$ dans la fonction arbitraire Y, ce résultat, qui se changera par là en

$$\iint \frac{dx\,dy}{x^2+y^2} = X + Y - \int \frac{dy}{y}\,\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right),$$

sera le même que le précédent, ainsi qu'on peut s'en convaincre en mettant pour $\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right)$ son développement.

272. Lorsque l'on regarde $\iint z\,dx\,dy$ comme exprimant le volume d'un corps, il faut avoir égard aux limites entre lesquelles doit être prise chaque intégrale, et qui tiennent à la nature des surfaces par lesquelles le corps proposé est terminé latéralement.

Le cas le plus simple est celui où le corps est fermé par quatre plans, parallèles deux à deux aux plans coordonnés CAD, BAD. En supposant que les premiers répondent aux abscisses $x = a$, $x = a'$, et les seconds aux abscisses $y = b$, $y = b'$, on prendra l'intégrale $\int z\,dx$, depuis $x = a$ jusqu'à $x = a'$, en y regardant d'ailleurs y comme constant; et nommant P le résultat obtenu, il restera à prendre l'intégrale $\int P\,dy$, depuis $y = b$ jusqu'à $y = b'$.

Lorsque le corps proposé est terminé latéralement par des surfaces courbes, les valeurs extrêmes de l'une des variables sont liées avec celles de l'autre, ainsi qu'on va le voir dans l'exemple suivant, où il s'agit de trouver le volume d'une sphère dont le centre est en A, et dont le rayon est égal à r.

On a $x^2+y^2+z^2=r^2$, et par conséquent

$$\iint z\,dx\,dy=\iint dx\,dy\sqrt{r^2-x^2-y^2};$$

puis, en supposant y constant et $r^2-y^2=r'^2$,

on trouve $\int z\,dx=\int dx\sqrt{r'^2-x^2}=\frac{1}{2}x\sqrt{r'^2-x^2}$

$$+\frac{1}{2}r'^2\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{x}{r'}\right)\quad(249).$$

Cela posé, l'intégrale $\int z\,dx$, exprimant l'aire de la section faite dans la sphère, parallèlement au plan des xz, et à la distance $AQ=y$, doit être prise entre les limites de cette section, qui sont d'une part le plan CAD, et de l'autre le cercle $BFEC$, suivant lequel la sphère rencontre le plan BAC. A la première, limite $x=0$, à la seconde $x=QF$; mais cette dernière est liée avec AQ, car en faisant $z=0$, on trouve $x^2+y^2=r^2$ pour l'équation du cercle $BFEC$, d'où il suit que... $QF=\sqrt{r^2-\overline{AQ}^2}=\sqrt{r^2-y^2}=r'$; et par conséquent, pour une valeur quelconque de y, les valeurs extrêmes de x sont 0 et r'.

Au moyen de ces valeurs, le résultat obtenu plus haut se réduit à $\frac{\pi}{4}r'^2$, puisque $\operatorname{arc}(\sin=1)=\frac{\pi}{2}$, et l'intégrale $\int dy\int z\,dx$ devient

$$\frac{\pi}{4}\int r'^2dy=\frac{\pi}{4}\int dy(r^2-y^2)=\frac{\pi}{4}\left(r^2y-\frac{y^3}{3}\right).$$

Cette dernière doit être prise depuis la plus petite valeur de y, que je supposerai nulle, en fermant de ce côté le corps par le plan BAD, jusqu'à la plus grande, qui, dans le cas actuel, est $AC=r$: le volume du segment $ABCD$, qui est la huitième partie de la sphère,

sera donc $\frac{\pi r^3}{6}$, et par conséquent le volume de la sphère entière sera $\frac{4\pi r^3}{3}$.

Il est à propos de remarquer qu'on peut obtenir immédiatement le volume de tout l'hémisphère supérieur au plan BAC, en prenant la première intégrale depuis $x = -\sqrt{r^2 - y^2}$ jusqu'à $x = +\sqrt{r^2 - y^2}$; car dans ce cas les valeurs extrêmes de x se terminent de part et d'autre à la circonférence du cercle $BFEC$, dont AC est le rayon, et l'on a la valeur complète de $\int z dx = \frac{\pi}{2}(r^2 - y^2)$. Prenant ensuite l'intégrale

$$\frac{\pi}{2}\int dy(r^2 - y^2) = \frac{\pi}{2}\left(r^2 y - \frac{y^3}{3}\right),$$

dans toute l'étendue de la partie de l'axe des y comprise dans le cercle $BFEC$, c'est-à-dire depuis l'extrémité de son diamètre, située derrière le plan BAD, où $y = -r$, jusqu'à l'autre extrémité C, où $y = +r$, on trouve $\frac{2\pi r^3}{3}$; et en doublant on a, comme ci-dessus, $\frac{4\pi r^3}{3}$ pour la sphère entière.

273. En considérant les différentielles comme les accroissemens infiniment petits des variables, on peut négliger la différence du prisme tronqué $M'N$, au prisme complet ayant pour hauteur $M'M$, et le regarder alors comme formé de petits parallélépipèdes ayant pour base le rectangle $M'm'N'n'$, pour hauteur dz, et étant par conséquent exprimés par $dx dy dz$. Pour obtenir la somme des parallélépipèdes contenus dans le prisme entier, il faut intégrer cette expression par rapport à

z seulement, ce qui donnera

$$\int dx dy dz = z dx dy,$$

comme on l'a trouvé ci-dessus.

On observera ensuite que la valeur complète de $dy\int z dx$ est l'expression de la somme des parallélépipèdes contenus dans la tranche $FHQqhf$, comprise entre deux plans parallèles au plan BAD des xz; mais $\int z dx$ étant l'aire de la section FHQ, il s'ensuit que la tranche infiniment mince $FHQqhf$ peut être regardée, comme égale à $\overline{FHQ} \times \overline{Qq}$, c'est-à-dire à l'aire de la courbe qui lui sert de base, multipliée par l'épaisseur Qq. On voit enfin que $\int dy \int z dx$ exprime la somme de toutes les tranches semblables comprises dans le volume cherché.

Il est évident qu'on représente toutes ces opérations, en considérant l'intégrale triple $\iiint dx dy dz$ dont chaque signe se rapporte à l'une des variables x, y et z.

274. En général, s'il faut déterminer la portion du corps proposé, terminée latéralement par le cylindre élevé perpendiculairement au plan BAC, *fig.* 54, sur la courbe donnée $E'N'G'$, on prendra l'intégrale $\int z dx$, depuis $x = AP$ jusqu'à $x = Ap$, afin que l'expression $dy\int z dx$ devienne celle de la tranche $MM'N'N nn'm'm$. Les lignes AP et Ap, respectivement égales à QM' et QN', seront données en fonction de $AQ = y$, par l'équation de la courbe $E'N'G'$ dont elles sont les abscisses; en les représentant par $F(y)$ et $f(y)$, on devra prendre $\int z dx$, depuis $x = F(y)$ jusqu'à $x = f(y)$, ce qui, comme l'on voit, introduira de nouvelles fonctions de y que z ne renfermait pas, et pourra augmenter ou diminuer la difficulté de la seconde intégration. Pour obtenir ensuite, dans celle-ci, la valeur

FIG. 54.

totale de l'espace cherché, ou la somme des tranches dont on a déjà l'expression générale, il faudra prendre $\int dy \int z dx$, depuis $y = AF$ jusqu'à $y = AH$, valeurs qui répondent aux limites E' et G' de la courbe $E'N'G'$ dans le sens des y.

Il pourrait arriver que le contour $E'N'G'$, au lieu d'être une courbe continue, fût l'assemblage de plusieurs portions de courbes différentes; l'application des principes précédens à ce cas est trop facile pour qu'il soit besoin de s'y arrêter.

275. On parvient à l'expression générale de la différentielle de l'aire d'une surface courbe, en imaginant cette surface partagée en zones, telles que $EGge$, *fig.* 53 par des plans parallèles à l'un des plans coordonnés et en concevant que chacune de ces zones soit découpée en portions quadrangulaires $MmNn$, par des plans parallèles à un autre plan coordonné. A l'inspection de la figure, on voit que l'aire $DGMH$, que je représenterai par s, s'accroît du quadrilatère curviligne $GMmg$, quand x augmente de Pp, et que ce quadrilatère s'accroît de $MmNn$, quand y vient ensuite à augmenter de Qq. Un raisonnement semblable à celui du n° 270 fera voir que la limite du rapport de $\frac{MmNn}{\overline{Pp} \times \overline{Qq}}$ est égale au coefficient différentiel $\frac{d^2 s}{dx\,dy}$. FIG. 53.

Pour parvenir à cette limite, on observe d'abord que les quatre plans

$$m'M \text{ et } N'n, \quad n'M \text{ et } N'm,$$

parallèles deux à deux aux plans des xz et des yz et qui déterminent le quadrilatère courbe $MmNn$, déter-

minent aussi, sur le plan tangent au point M, *fig.* 55, un parallélogramme $MXZY$, sur lequel toutes les lignes tirées du point M seraient tangentes aux diverses sections que feraient, dans le quadrilatère courbe, des plans menés par l'ordonnée $M'M$, et auraient avec les arcs de ces sections un rapport tendant sans cesse vers l'unité (63); on peut donc, dans la limite cherchée, substituer au quadrilatère courbe $MmNn$, le parallélogramme $MXZY$, dont l'aire est à celle de sa projection $M'm'N'n'$, comme le rayon est au cosinus de l'angle compris entre le plan tangent et celui des xy (*). Or, la normale MG et l'ordonnée $M'M$ étant respectivement perpendiculaires à ces plans, l'angle qu'ils comprennent sera égal à GMM', et aura par conséquent pour cosinus, FIG. 55.

$$\frac{M'M}{MG} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \quad (150),$$

ce qui donne

$$MXZY = M'm'N'n' \cdot \frac{MG}{M'M} = dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2};$$

on a donc

$$s = \iint dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2},$$

où il faut observer que $dy\int dx\sqrt{1+p^2+q^2}$ représente l'aire de la zone $FHhf$, *fig.* 53. FIG. 53.

276. Si l'on prend encore la sphère pour exemple, son équation $x^2+y^2+z^2=r^2$, donnera

$$p = -\frac{x}{z}, \quad q = -\frac{y}{z}, \quad \sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{r}{z},$$

(*) *Voyez* pour cette proposition le n° 60 du *Complément des Élemens de Géométrie*, et pour ce qui précède, le Traité in-4°, t. II, p. 198, *note*.

et

$$\int dx\sqrt{1+p^2+q^2}=\int\frac{r\,dx}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}};$$

posant ensuite $r^2-y^2=r'^2$, cette intégrale deviendra

$$r\int\frac{dx}{\sqrt{r'^2-x^2}}=r.\text{arc}\left(\sin=\frac{x}{r'}\right)\ (186),$$

qui, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=r'=\sqrt{r^2-y^2}$, est égale à $\frac{\pi}{2}$, et ne laisse pour la seconde intégration que

$$\frac{\pi r}{2}\int dy=\frac{\pi r}{2}y.$$

Il est aisé de voir que, comme on n'a pris le radical $\sqrt{r^2-x^2-y^2}$ qu'avec le signe $+$, on n'a dû obtenir que la portion d'aire supérieure au plan des xy, que, de plus, les limites assignées à x n'embrassent qu'une moitié de la partie supérieure de la zone perpendiculaire à l'axe des y, et qu'ainsi la zone entière serait exprimée par $2\pi ry$, c'est-à-dire par la circonférence d'un grand cercle, multipliée par la portion du diamètre compris entre les plans qui terminent cette zone, résultat conforme à ce qu'on a vu dans la Géométrie élémentaire. Quant aux limites de y, il est évident qu'il faut prendre $-r$ et $+r$, lorsqu'on veut obtenir l'aire totale de la sphère.

277. L'application de l'Analyse à la Mécanique conduit souvent à des intégrales triples de la forme..... $\iiint V dx dy dz$, dans lesquelles la fonction V peut renfermer les trois variables x, y, z, considérées comme indépendantes les unes des autres, en sorte que chaque signe d'intégration ne tombe que sur une

d'elles en particulier (273). Il est aisé de voir que ces intégrales proviennent de la détermination d'une fonction u dépendante de trois variables x, y, z, et dont on ne connaît que le coefficient différentiel $\frac{d^3u}{dxdydz}$, donné par l'équation $\frac{d^3u}{dxdydz}=V$; car on tire de là, en opérant comme dans le n° 271, 1°. en regardant x et y comme constans,

$$\frac{d^3u}{dxdydz}dz=d\frac{d^2u}{dxdy}=Vdz,\quad \frac{d^2u}{dxdy}=\int Vdz+T'',$$

T'' étant une fonction arbitraire de x et de y; 2°. en regardant x et z comme constans,

$$\frac{d^2u}{dxdy}dy=d\frac{du}{dx}=dy\int Vdz+T''dy,\quad \frac{du}{dx}=\int dy\int Vdz+T'+S',$$

T' désignant la fonction arbitraire de x et de y, résultante de $\int T''dy$, et S' une fonction arbitraire de x et de z; 3°. enfin, en regardant y et z comme constans,

$$\frac{du}{dx}dx=dx\int dy\int Vdz+T'dx+S'dx,$$
$$u=\int dx\int dy\int Vdz+T+S+R,$$

T et S représentant des fonctions arbitraires résultantes de $\int T'dx$ et de $\int S'dx$, et R étant une fonction arbitraire de y et de z : l'intégrale complète renferme donc trois fonctions arbitraires, savoir, une de x et de y, une de x et de z, et une de y et de z. En réunissant les différentielles sous le dernier signe d'intégration, $\int dx\int dy\int Vdz$ devient $\iiint Vdxdydz$, et a, sous cette dernière forme, la même signification que sous la précédente.

Cet exemple suffit pour montrer comment on reviendra du coefficient différentiel d'un ordre quel-

conque d'une fonction de plusieurs variables, à cette fonction elle-même. Les fonctions arbitraires introduites ici n'ont rapport, comme dans le n° 272, qu'au cas où les intégrales sont prises entre des limites pour lesquelles les variables x, y et z sont indépendantes les unes des autres; mais le plus souvent, l'intégrale relative à z doit être prise depuis..... $z=F(x,y)$ jusqu'à $z=f(x,y)$, F et f étant des fonctions données, l'intégrale relative à y, depuis $y=F_1(x)$ jusqu'à $y=f_1(x)$, et enfin l'intégrale relative à x, depuis $x=a$ jusqu'à $x=a'$.

De l'intégration des différentielles totales contenant plusieurs variables indépendantes.

278. Les fonctions contenant plusieurs variables indépendantes, ont deux sortes de différentielles, savoir, des différentielles partielles et des différentielles totales (46); on a déjà vu dans les n°s 271, 277, comment on pouvait remonter d'une différentielle partielle exprimée par les variables indépendantes, à la fonction primitive, et que ce problème est toujours possible, puisqu'il se rapporte immédiatement à l'intégration d'une différentielle à une seule variable. Il n'en est plus de même quand on prend au hasard une expression de la forme $M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y$, pour la différentielle totale d'une fonction de trois variables, parce que l'équation $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$ (40) établit, entre les quantités M et N, une relation sans laquelle elles ne peuvent dériver d'une même fonction primitive.

En effet, si l'on pose

$$\mathrm{d}u=M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y,$$

il en résulte

$$\frac{du}{dx}=M,\quad \frac{du}{dy}=N,\quad \frac{d^2u}{dydx}=\frac{dM}{dy},\quad \frac{d^2u}{dxdy}=\frac{dN}{dx},$$

et par conséquent

$$\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dx}.$$

Il faudra donc que toute expression $Mdx+Ndy$, quand elle sera la différentielle totale d'une fonction des variables x et y, rende identique l'équation ci-dessus; et alors, pour remonter à son intégrale u, on aura $M=\frac{du}{dx}$, $N=\frac{du}{dy}$, d'où l'on déduira la valeur des différentielles partielles.

En prenant celle de la différentielle relative à x, par exemple, il viendra $\frac{du}{dx}dx=Mdx$, et par conséquent $u=\int Mdx+Y$. On ajoute dans ce cas, comme dans celui du n° 271, une fonction arbitraire de y, puisque l'intégration n'a eu lieu que par rapport à la variable x; mais ici, cette fonction se détermine parce que la valeur de u doit satisfaire encore à l'équation $N=\frac{du}{dy}$.

L'équation $u=\int Mdx+Y$ donne

$$\frac{du}{dy}=\frac{d\int Mdx}{dy}+\frac{dY}{dy},$$

représentant $\int Mdx$ par v, on aura

$$\frac{du}{dy}=\frac{dv}{dy}+\frac{dY}{dy}=N,$$

d'où l'on tirera

$$\frac{dY}{dy} = N - \frac{d\nu}{dy},$$

et en intégrant,

$$Y = \int \left(N - \frac{d\nu}{dy}\right) dy;$$

on trouvera donc

$$u = \int M dx + \int \left(N - \frac{d\nu}{dy}\right) dy :$$

telle est l'intégrale de la fonction proposée.

Ce résultat fait voir que la fonction $N - \frac{d\nu}{dy}$ ne doit renfermer que la seule variable y, sans quoi il ne serait pas vrai, comme on l'a supposé, que $M dx$ et $N dy$ fussent les différentielles partielles d'une même fonction u. Il suit de là, que la fonction $N - \frac{d\nu}{dy}$, ne contenant pas x, ne doit pas varier par rapport à cette quantité, et qu'ainsi

$$\frac{dN}{dx} - \frac{d^2\nu}{dx dy} = 0 ;$$

mais on a

$$\frac{d^2\nu}{dx dy} = \frac{d^2\nu}{dy dx} = \frac{d\frac{d\nu}{dx}}{dy}, \text{ et } \frac{d\nu}{dx} = M :$$

il vient donc

$$\frac{d^2\nu}{dx dy} = \frac{dM}{dy} \text{ ou } \frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy} = 0.$$

Cette condition, trouvée plus haut, est par conséquent la seule nécessaire pour assurer l'intégrabilité de la différentielle $M dx + N dy$; et quand elle n'est pas remplie,

l'expression proposée, ne pouvant résulter de la différentiation d'une fonction primitive à deux variables, ne saurait être une *différentielle exacte*.

279. La fonction $\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$ étant écrite ainsi

$$\frac{y}{x^2+y^2}dx-\frac{x}{x^2+y^2}dy,$$

donne successivement

$$M=\frac{y}{x^2+y^2},\quad N=-\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{dM}{dy}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{dN}{dx},$$

$$\int Mdx=\int\frac{ydx}{x^2+y^2}=\int\frac{\frac{dx}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}}$$

$$=\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{x}{y}\right)=v,$$

d'où $$u=\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{x}{y}\right)+Y.$$

Différentiant et faisant tout varier, on trouvera

$$du=\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}+dY;$$

comparant avec la fonction proposée, on aura

$$dY=0,\text{ d'où }Y=const.,$$

et par conséquent

$$\int\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{x}{y}\right)+const.\ (*).$$

(*) Je me suis arrêté sur cette intégration, parce qu'elle sert de base à une démonstration très élégante du principe de la composition des forces, donnée par M. Laplace, dans sa *Mécanique céleste*.

Soit encore la fonction

$$\frac{dx}{x}+\frac{y^2dx}{x^3}-\frac{ydy}{x^2}+\frac{(ydx-xdy)\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}+\frac{dy}{2y};$$

en la comparant avec la formule $Mdx+Ndy$, on a

$$M=\frac{1}{x}+\frac{y^2+y\sqrt{x^2+y^2}}{x^3},\quad N=\frac{-y-\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}+\frac{1}{2y},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{dM}{dy}=\frac{2y+\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}+\frac{y^2}{x^3\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{dN}{dx}=\frac{2y+2\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}-\frac{x}{x^2\sqrt{x^2+y^2}};$$

ces valeurs étant réduites, donnent

$$\frac{dM}{dy}=\frac{2y}{x^3}+\frac{x^2+2y^2}{x^3\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{dN}{dx},$$

et par conséquent la fonction proposée peut s'intégrer immédiatement. On obtient d'abord

$$\int Mdx=lx-\frac{y^2}{2x^2}+y\int\frac{dx}{x^3}\sqrt{x^2+y^2};$$

mais l'intégration par parties donne

$$\int\frac{dx}{x^3}\sqrt{x^2+y^2}=\int\sqrt{x^2+y^2}\cdot\frac{dx}{x^3}=$$

$$-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2}+\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+y^2}},$$

et faisant $\sqrt{x^2+y^2}=x+z$, on trouve, en opérant comme dans le n° 198,

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+y^2}}=l\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x};$$

donc $\int M\mathrm{d}x = \mathrm{l}x - \frac{y^2}{2x^2} - \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2}$

$$+\tfrac{1}{2}\mathrm{l}\left(-y+\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

On a ensuite

$$N - \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2} + \frac{}{2x^2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{2y} = \frac{1}{2y};$$

d'où il résulte $Y = \frac{1}{2}\mathrm{l}y + const.$, et enfin

$$u = \mathrm{l}x - \frac{y^2}{2x^2} - \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2}$$

$$+\tfrac{1}{2}\mathrm{l}\left(\frac{-y^2+y\sqrt{x^2+y^2}}{x}\right) + const.$$

280. Les différentielles contenant un nombre quelconque de variables, s'intègrent par une extension de la méthode précédente, qu'il suffira d'appliquer aux fonctions de trois variables. Soit

$$M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}z$$

une différentielle de ce genre, M, N, P, désignant des fonctions de x, y et z; en y supposant alternativement $\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}x$ nuls, c'est-à-dire en regardant tour à tour z, y et x comme constans, on doit successivement obtenir trois différentielles exactes entre deux variables, savoir,

$$M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y, \quad M\mathrm{d}x + P\mathrm{d}z, \quad N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}z,$$

desquelles il résultera nécessairement

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} \quad (278).$$

Lorsque ces équations de condition sont vérifiées, la différentielle proposée est exacte, et peut s'intégrer en commençant par opérer sur l'une quelconque des différentielles à deux variables qu'on en a déduites. Si, par exemple, on a fait à la première, $M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y$, l'application du procédé du n° 278, et que le résultat soit représenté par v, on aura

$$\int(M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y+P\mathrm{d}z)=v+Z,$$

Z étant une fonction de z seul, et provenant des termes de la fonction primitive cherchée, qui ne contiennent pas x et y. Cela posé, si l'on différentie l'équation ci-dessus, en y faisant tout varier, il viendra

$$M=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x},\quad N=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y},\quad P=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}+\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}z}.$$

La dernière de ces équations donne

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}z}=P-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z},$$

d'où

$$Z=\int\left(P-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\right)\mathrm{d}z+const.,$$

pourvu que $P-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}$ ne contienne ni x, ni y: on doit donc avoir

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}-\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}=0,$$

ce qui revient à

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}-\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}z}=0,$$

en intervertissant l'ordre des deux différentiations indi-

quées sur v, et mettant pour $\frac{dv}{dx}$ et $\frac{dv}{dy}$ leurs valeurs M et N. Les deux conditions que je viens de trouver, jointes à

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$$

que suppose l'intégration de la différentielle..... $Mdx + Ndy$, étant les mêmes que celles qui se sont présentées au commencement de l'article, font voir que ces dernières sont suffisantes pour constater l'intégrabilité d'une fonction différentielle quelconque à trois variables; et lorsque ces conditions ne sont pas satisfaites, la proposée ne peut dériver d'aucune fonction primitive renfermant le même nombre de variables indépendantes.

En général, il est visible qu'une différentielle exacte comprenant n variables, doit présenter $\frac{n(n-1)}{2}$ différentielles exactes à deux variables, ce qui fournit un pareil nombre d'équations de condition; et de là on peut s'élever aux conditions que doivent remplir les différentielles des ordres supérieurs: mais elles s'offriront presque d'elles-mêmes, dans le *Calcul des variations*, qui entre dans le plan de cet ouvrage, c'est pourquoi je ne m'y arrêterai pas ici (*).

281. Le procédé suivi pour obtenir, dans le n° 278, l'expression de $\frac{dv}{dy}$, équivalente à $\frac{d\int M dx}{dy}$, conduit à une formule très utile, qui apprend à différentier sous le signe $\int$, par rapport à une autre variable que celle à laquelle il se rapporte.

(*) *Voyez* d'ailleurs le Traité in-4°, t. II, p. 232.

En effet, l'équation

$$\frac{d^2\nu}{dxdy} = \frac{dM}{dy},$$

revenant à

$$\frac{d\frac{d\nu}{dy}}{dx} = \frac{dM}{dy}, \text{ donne } \frac{d\frac{d\nu}{dy}}{dx}dx = \frac{dM}{dy}dx,$$

et chacun des membres de cette dernière étant intégré par rapport à x, il vient

$$\frac{d\nu}{dy} = \int \frac{dM}{dy}dx \text{ ou } \frac{d\int M dx}{dy} = \int \frac{dM}{dy}dx,$$

en remettant pour ν sa valeur $\int M dx$ (*).

(*) Leibnitz, à qui ce théorème est dû, l'appelait *differentiatio de curvâ in curvam*, parce que dans la question qu'il se proposait de résoudre, il passait d'une courbe à une autre de même espèce, en faisant varier une constante.

On y parvient aussi en cherchant immédiatement la différentielle de $\int M dx$, par rapport à y; car il est évident que pour obtenir cette différentielle, il faut substituer $y + dy$ à y dans la fonction $\int M dx$, qui devient alors

$$\int\left(M + \frac{dM}{dy}dy + \text{etc.}\right)dx = \int M dx + \int \frac{dM}{dy}dxdy + \text{etc.}$$

$$= \int M dx + dy \int \frac{dM}{dy}dx + \text{etc.}$$

puisque le signe $\int$ n'est relatif qu'à la variable x; on aura donc

$$\frac{d\int M dx}{dy} = \int \frac{dM}{dy}dx.$$

De l'intégration des équations différentielles à deux variables.

De la séparation des variables dans les équations différentielles du premier ordre.

282. Dans ce qui précède, j'ai supposé que les coefficiens différentiels de la fonction cherchée, étaient exprimés immédiatement par le moyen de la variable indépendante; mais le plus souvent on n'a qu'une équation différentielle qui renferme aussi cette fonction. Pour le premier ordre, l'équation différentielle, lorsqu'elle est du premier degré par rapport à dx et à dy, a nécessairement la forme $Mdx + Ndy = 0$, et elle exprime, ainsi qu'on l'a fait voir n° 48, une relation entre la variable x, la fonction y et son coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$.

Le moyen qui s'est offert le premier aux Analystes, pour découvrir l'équation primitive dont celle-ci tire son origine, a été de chercher à séparer les variables, c'est-à-dire à ramener l'équation $Mdx + Ndy = 0$ à la forme $Xdx + Ydy = 0$, X étant une fonction de x seul, et Y une fonction de y seul. En effet, lorsqu'on est parvenu à ce point, les termes Xdx et Ydy s'intègrent par les méthodes enseignées précédemment, et l'on a $\int Xdx + \int Ydy = C$, C désignant une constante arbitraire.

Pour donner un exemple des cas où l'équation différentielle se présente immédiatement sous la forme ci-dessus, soit $x^m dx + y^n dy = 0$; on trouvera sur-le-champ $\frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{y^{n+1}}{n+1} = C$.

Si l'équation proposée était $ydx - xdy = 0$, la séparation serait facile à effectuer, car l'on voit qu'en divisant par xy, on trouverait $\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0$; prenant séparément l'intégrale de chaque terme de cette dernière, on aurait $lx - ly = C$, ou $l\frac{x}{y} = C$, et puisque l'on peut regarder la constante arbitraire comme un logarithme, on en conclurait $l\frac{x}{y} = lc$. En passant aux nombres, il viendrait $\frac{x}{y} = c$, ou $x = cy$.

Après cet exemple, on reconnaît sans peine que la séparation des variables s'effectuera de la même manière dans les équations $Ydx - Xdy = 0$, $XY_1 dx - YX_1 dy = 0$; car la première donne

$$\frac{dx}{X} - \frac{dy}{Y} = 0,$$

et la seconde

$$\frac{Xdx}{X_1} - \frac{Ydy}{Y_1} = 0.$$

En général, si, lorsqu'on prend la valeur de $\frac{dy}{dx}$ dans l'équation proposée, on trouve $\frac{dy}{dx} = XY$, il est facile d'en tirer

$$Xdx - \frac{dy}{Y} = 0,$$

et par conséquent

$$\int Xdx - \int \frac{dy}{Y} = C.$$

283. Il y a encore un cas étendu où l'on sé-

pare facilement les variables; c'est lorsque M et N sont des fonctions homogènes de x et de y. On s'appuie pour cela sur ce que, *si, dans une fonction algébrique des quantités* x, y, z, *etc., où la somme des exposans de chacune de ces lettres est la même pour tous les termes, et égale à* m, *on substitue* Px *à* y, Qx *à* z, *etc., le résultat sera divisible par* x^m. En effet, un terme quelconque de cette fonction étant de la forme $Ax^n y^p z^q$ etc., deviendra par la substitution indiquée, $AP^pQ^q \ldots\ldots x^{n+p+q+\text{etc.}}$; mais par l'hypothèse on a dans tous les termes... $n+p+q+\text{etc.}\ldots = m$: donc x^m sera facteur commun. Il suit de là, que si la fonction proposée était égalée à zéro, ou bien qu'elle fût une fraction ayant pour numérateur et pour dénominateur deux polynomes homogènes du même degré, la quantité x disparaîtrait entièrement du résultat.

D'après ce qui précède, il suffit de faire $y = xz$, pour séparer les variables dans l'équation $M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y = 0$. En effet, les fonctions M et N prennent la forme Zx^m, Z_1x^m, Z et Z_1 ne renfermant que la nouvelle variable z; divisant alors par x^m, et mettant pour dy sa valeur, $z\mathrm{d}x + x\mathrm{d}z$, il vient $Z\mathrm{d}x + Z_1(z\mathrm{d}x + x\mathrm{d}z) = 0$, résultat qu'on peut changer en

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{Z_1\mathrm{d}z}{Z + zZ_1} = 0,$$

et d'où l'on tire

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int \frac{Z_1\mathrm{d}z}{Z + zZ_1} = C.$$

J'appliquerai d'abord cette transformation à l'équation

$$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = ny\mathrm{d}x$$

qui devient

$$(x-ny)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=0,$$

en passant tous les termes dans un membre; j'aurai $Z=1-nz$, $Z_1=z$ et $\int\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int\frac{z\mathrm{d}z}{1-nz+z^2}=C$, ou $\mathrm{l}x+\int\frac{z\mathrm{d}z}{1-nz+z^2}=C$. L'intégrale $\int\frac{z\mathrm{d}z}{1-nz+z^2}$ peut se simplifier en observant que

$$\frac{z\mathrm{d}z}{1-nz+z^2}=\frac{1}{2}\frac{2z\mathrm{d}z-n\mathrm{d}z}{1-nz+z^2}+\frac{1}{2}\frac{n\mathrm{d}z}{1-nz+z^2};$$

car il vient alors

$$\mathrm{l}x+\frac{1}{2}\mathrm{l}(1-nz+z^2)+\frac{1}{2}\int\frac{n\mathrm{d}z}{1-nz+z^2}=C.$$

L'intégrale qui reste à obtenir dépendra des logarithmes si $\frac{n}{2}>1$, des arcs de cercle si $\frac{n}{2}<1$, et sera algébrique si $\frac{n}{2}=1$. Je ne rapporterai que le résultat relatif à ce dernier cas: $\int\frac{n\mathrm{d}z}{1-nz+z^2}$ devient alors

$$\int\frac{2\mathrm{d}z}{(1-z)^2}=\frac{2}{1-z},\quad \mathrm{l}(1-nz+z^2)=\mathrm{l}(1-z)^2,$$

et l'on a par conséquent $\mathrm{l}x+\mathrm{l}(1-z)+\frac{1}{1-z}=C$, ou $\mathrm{l}(x-y)+\frac{x}{x-y}=$ [illegible] restant pour z sa valeur $\frac{y}{x}$.

Le terme $\frac{x}{x-y}$ [illegible] en un logarithme, en observant que, par la définition des logarithmes

népériens, une quantité quelconque u est le logarithme du nombre e^u; et d'après cette remarque, on écrira l'équation précédente sous la forme

$$l(x-y)+le^{\frac{x}{x-y}}=lc,$$

dont on déduit successivement

$$l.(x-y)e^{\frac{x}{x-y}}=lc, \quad \text{et} \quad (x-y)e^{\frac{x}{x-y}}=c.$$

Il est à propos de faire attention à cette manière de passer des logarithmes aux nombres, parce qu'on l'emploie souvent.

Soit encore à intégrer l'équation

$$xdy-ydx=dx\sqrt{x^2+y^2}.$$

En faisant $y=xz$, et divisant par x tous ses termes, réunis dans un seul membre, on trouvera

$$dx\sqrt{1+z^2}-xdz=0,$$

ce qui donnera

$$\frac{dx}{x}-\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=0.$$

On obtiendra ensuite, par l'intégration de chaque terme en particulier,

$$lx-l(z+\sqrt{1+z^2})=lc \quad \text{ou} \quad \frac{x}{z+\sqrt{1+z^2}}=c;$$

et remettant pour z, sa valeur $\frac{y}{x}$, il viendra

$$\frac{x^2}{y+\sqrt{x^2+y^2}}=c, \quad \text{ou} \quad -y+\sqrt{x^2+y^2}=c,$$

en multipliant les deux termes du premier membre

par $y - \sqrt{x^2+y^2}$: faisant disparaître le radical, on aura enfin $x^2 = c^2 + 2cy$.

284. L'équation

$$(a + mx + ny)\mathrm{d}x + (b + px + qy)\mathrm{d}y = 0,$$

peut facilement être rendue homogène. En substituant $t + \alpha$ à la place de x, et $u + \beta$ à celle de y, on a $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = \mathrm{d}u$,

$$(a + m\alpha + n\beta + mt + nu)\mathrm{d}t + (b + p\alpha + q\beta + pt + qu)\mathrm{d}u = 0;$$

on fait disparaître les termes constans, en posant les équations $a + m\alpha + n\beta = 0$, $b + p\alpha + q\beta = 0$, au moyen desquelles on détermine les quantités α et β, et il reste alors l'équation différentielle

$$(mt + nu)\mathrm{d}t + (pt + qu)\mathrm{d}u = 0,$$

homogène par rapport aux nouvelles variables u et t.

La transformation précédente est la même que celle dont on se sert pour changer l'origine des coordonnées sur un plan (*Trig.* 122) : elle ne donne aucun résultat quand $mq - np = 0$, cas dans lequel les valeurs de α et de β deviennent infinies; mais alors on a $q = \frac{np}{m}$, d'où

$$px + q\frac{n}{m}y = \frac{p}{m}(mx + ny),$$

et l'équation proposée devient

$$a\mathrm{d}x + b\mathrm{d}y + \left(\frac{p}{m}(mx + ny)\mathrm{d}x + \frac{p}{m}\mathrm{d}y\right) = 0,$$

il suffit de faire $mx + ny = z$ pour y séparer les variables.

En substituant cette valeur, ainsi que celle de dy, qui en résulte, et [illegible] on trouve

$$dx + \frac{(bm + pz)dz}{amn - bm^2 + (mn - pm)z} = 0,$$

équation dont l'intégrale renfermera des logarithmes, excepté lorsque $mn - pm = 0$, d'où il résulte

$$x + \frac{2bmz + pz^2}{2(amn - bm^2)} = C.$$

La substitution de z, au lieu de $mx + ny$, a changé l'équation proposée en une autre où l'une des variables n'entre que par sa différentielle; et il est facile de voir que, quelle que soit l'équation sur laquelle on ait produit cet effet, on pourra lui donner la forme.... $dx + Zdz = 0$, Z étant une fonction de z seul, et qu'on en tirera $x + \int Zdz = C$.

285. La séparation des variables s'opère d'une manière très simple sur l'équation $dy + Pydx = Qdx$, dans laquelle P et Q désignent des fonctions quelconques de x. En y substituant Xz et $zdX + Xdz$, au lieu de y et de dy, elle devient

$$zdX + Xdz + PXzdx = Qdx;$$

la quantité X étant considérée comme une fonction indéterminée de x, il est permis d'en disposer pour partager l'équation précédente en deux autres où les variables puissent se séparer: or, il est facile de voir que cette condition sera remplie si l'on fait $Xdz + PXzdx = 0$, ce qui donne $zdX = Qdx$. En divisant la première de ces équations par X, elle se réduit à $dz + Pzdx = 0$; on en tire $\frac{dz}{z} + Pdx = 0$, $lz + \int Pdx = lc$, et en passant aux nombres, $z = ce^{-\int Pdx}$. Prenant ensuite la valeur de dX dans la seconde équation, après y avoir substitué celle de z que l'on vient de trouver, on aura

$$dX = \frac{1}{c} e^{\int P dx} Q dx, \quad X = \frac{1}{c} \int e^{\int P dx} Q dx + C,$$

et par conséquent

$$y = e^{-\int P dx} \left(\int e^{\int P dx} Q dx + C \right),$$

puisqu'on peut changer en C le produit arbitraire Cc, ce qui montre qu'on aurait pu faire $c = 1$.

L'équation $dy + Py dx = Q dx$, remarquable parce que la variable y et sa différentielle ne s'y trouvent qu'au premier degré, s'appelle, à cause de cette circonstance, *équation linéaire* du premier ordre, dénomination que j'ai cru devoir changer dans celle d'*équation du premier degré et du premier ordre* (*).

286. Les premiers Analystes qui se sont occupés du Calcul intégral, classaient les équations différentielles par le nombre de leurs termes. Dans celles qui n'en ont que deux, et dont la forme est par conséquent $\beta u^g z^h dz = \alpha u^e z^f du$, les variables se séparent sur-le-champ, puisqu'on en tire $\beta z^{h-f} dz = \alpha u^{e-g} du$; mais il n'en est pas de même des équations à trois termes, comprises dans la formule

$$\gamma u^i z^k dz + \beta u^g z^h du = \alpha u^e z^f du.$$

On peut lui donner une forme plus simple en divisant tous ses termes [illegible] elle deviendra

$$z^{k-f} dz + [illegible] = \frac{\alpha}{\gamma} u^{e-i} du;$$

(*) Le mot *linéaire* [illegible] est relatif à la Géométrie, et en l'appliquant aux [illegible] eu en vue la ligne droite, dans l'équation de laquelle [illegible] et l'abscisse ne se trouvent qu'au premier degré : on [illegible] regarder comme linéaires des équations telles que $dy + Py dx = Q dx$, qui appartiennent le plus souvent à des courbes [illegible] ées.

supposant ensuite

$$z^{k-f}dz = \frac{dy}{k-f+1}, \quad u^{g-i}du = \frac{dx}{g-i+1},$$

on aura

$$z^{k-f+1} = y, \quad u^{g-i+1} = x,$$

d'où

$$dy + \frac{(k-f+1)\beta}{(g-i+1)\gamma} y^{\frac{k-f}{k-f+1}} dx = \frac{(k-f+1)\alpha}{(g-i+1)\gamma} x^{\frac{e-g}{g-i+1}} dx;$$

et, en faisant pour abréger,

$$\frac{(k-f+1)\beta}{(g-i+1)\gamma} = b, \quad \frac{(k-f+1)\alpha}{(g-i+1)\gamma} = a,$$

$$\frac{h-f}{k-f+1} = n, \quad \frac{e-g}{g-i+1} = m,$$

il en résultera l'équation $dy + by^n dx = ax^m dx$.

287. Le cas le plus simple, après celui qui rentre dans l'équation du premier degré, est celui où $n=2$; on tombe alors sur l'équation $dy + by^2 dx = ax^m dx$, traitée pour la première fois par Riccati, géomètre italien dont elle a conservé le nom.

Les variables se séparent immédiatement dans cette équation, quand $m=0$; elle devient $dy+by^2dx=adx$, et donne

$$dx = \frac{dy}{a-by^2} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left[\frac{dy}{\sqrt{a}+y\sqrt{b}} + \frac{dy}{\sqrt{a}-y\sqrt{b}}\right].$$

On trouve, en intégrant,

$$x = \frac{1}{2\sqrt{ab}} l\left(\frac{\sqrt{a}+y\sqrt{b}}{\sqrt{a}-y\sqrt{b}}\right) + C.$$

Pour chercher à rendre la même équation homogène, on fait $x = z^k$; elle se change en

$$kz^{k-1}dz + bz^{2k}dx = ax^m dx,$$

et prendra la forme demandée, si $k-1=2k=m$, ce qui donne $k=-1$, et suppose qu'on ait $m=-2$; il vient alors

$$-\frac{dz}{z^2} + \frac{bdx}{z^2} = \frac{adx}{x^2}.$$

Je ne m'arrêterai point à l'intégration de cette dernière équation; mais je passerai à une transformation plus générale, celle qui résulte de $y=Ax^p + x^q z$. On trouve dans cette hypothèse

$$dy = (pAx^{p-1} + qx^{q-1}z)dx + x^q dz,$$
$$y^2 dx = (A^2 x^{2p} + 2Ax^{p+q}z + x^{2q}z^2)dx,$$

et par conséquent

$$x^q dz + (qx^{q-1} + 2bAx^{p+q} + bx^{2q}z)zdx$$
$$+ (pAx^{p-1} + bA^2 x^{2p})dx = ax^m dx.$$

Cette équation se réduira elle-même à trois termes, si l'on a les suivantes :

$$p-1=2p,\quad pA+bA^2=0,\quad q-1=p+q,\quad q+2bA=0.$$

La première et la troisième s'accordent à donner $p=-1$; on tire de la seconde et de la quatrième $A=\frac{1}{b}$, $q=-2$, valeurs qui conduisent à $y=\frac{1}{bx}+\frac{z}{x^2}$,

$$x^{2-2}dz + bx^{-2}z^2 dx = ax^m dx,$$

ou

$$dz + bz^2 = ax^{m+2}dx.$$

Ce moyen réduira l'équation proposée à l'homogénéité, si $m=-2$, et il montre de plus qu'on pourra séparer

les variables si $m = -4$, puisqu'on aura dans ce cas

$$dz + (bz^2 - a)\frac{dx}{x^2} = 0, \text{ ou } \frac{dz}{bz^2 - a} + \frac{dx}{x^2} = 0.$$

Si dans l'équation $dz + bz^2\frac{dx}{x^2} = ax^{m+2}dx$, on fait $z = \frac{1}{y'}$, il viendra

$$-dy' + b\frac{dx}{x^2} = ay'^2x^{m+2}dx, \text{ ou } dy' + ay'^2x^{m+2}dx = b\frac{dx}{x^2};$$

posant ensuite $x^{m+2}dx = \frac{dx'}{m+3}$, on trouvera

$$x^{m+3} = x', \quad dx = \frac{1}{m+3}x^{-\frac{m+2}{m+3}}dx',$$

$$dy' + \frac{a}{m+3}y'^2dx' = \frac{b}{m+3}x^{-\frac{m+4}{m+3}}dx';$$

puis, faisant pour abréger

$$\frac{a}{m+3} = b', \quad \frac{b}{m+3} = a' \text{ et } -\frac{m+4}{m+3} = m',$$

on tombera sur l'équation

$$dy' + b'y'^2dx' = a'x'^{m'}dx',$$

semblable à la proposée, et par conséquent susceptible des mêmes transformations : la séparation des variables y' et x' sera donc possible, après la substitution de $y' = \frac{1}{b'x'} + \frac{z'}{x'^2}$, si $m' = -4$.

Si cette condition n'avait pas lieu, on ferait encore dans la transformée en z',

$$z' = \frac{1}{y}\,; \quad x'^{m'+3} = x'',$$

$$\frac{1}{m'+3} = b'', \quad \frac{b'}{m'+3} = a'', \quad -\frac{m'+4}{m'+3} = m'';$$

ces expressions, pareilles aux précédentes, conduiraient nécessairement à l'équation

$$dy'' + b''y''^2 dx'' = a''x''^{m''}dx'',$$

encore semblable à la proposée, et susceptible de la séparation des variables, quand $m'' = -4$.

En poursuivant de cette manière, on parviendrait à une équation séparable, si dans la suite des exposans

$$m,\ m' = -\frac{m+4}{m+3},\ m'' = -\frac{m'+4}{m'+3},$$

$$m''' = -\frac{m''+4}{m''+3},\ \text{etc.},$$

il s'en trouvait un égal à -4. En supposant successivement que ce soit m, m', m'', m''', etc., on obtient, pour m, les nombres $-\frac{4}{1}$, $-\frac{8}{3}$, $-\frac{12}{5}$, $-\frac{16}{7}$, etc., compris dans la formule

$$m = -\frac{4i}{2i-1},$$

i désignant un nombre entier positif quelconque. Cette formule donne aussi la valeur $m = 0$, remarquée dans le n° précédent : la valeur $m = -2$ répond à i infini (*).

(*) On arrive directement à la forme générale de m, en rapportant à cette quantité les valeurs de m', m'', etc.; car en mettant la valeur de m' dans celle de m'', puis le résultat dans la valeur de m''' et ainsi de suite, on trouve

$$m' = -\frac{m+4}{m+3},\ m'' = -\frac{3m+8}{2m+5},\ m''' = -\frac{5m+12}{3m+7},\ \text{etc.},$$

Ces cas ne renferment pas encore tous ceux que l'on sait déduire des transformations précédentes. Pour en trouver une nouvelle série, il suffit de commencer par faire dans la proposée $y = \frac{1}{y'}$, ce qui donnera

$$dy' + ay'^2 x^m dx = b dx;$$

et posant

$$x^{m+1} = x', \quad \frac{a}{m+1} = b', \quad \frac{b}{m+1} = a', \quad -\frac{m}{m+1} = m',$$

il en résultera

$$dy' + b' y'^2 dx' = a' x'^{m'} dx',$$

Cette nouvelle équation, étant semblable à la proposée, est aussi susceptible des mêmes opérations; c'est-

---

et de là on conclut que

$$m^{(i)} = -\frac{(2i-1)m+4i}{im+2i+1}.$$

Cette valeur se vérifie par la relation

$$m^{(i+1)} = -\frac{m^{(i)}+4}{m^{(i)}+3} = -\frac{[2(i+1)-1]m+4(i+1)}{(i+1)m+2(i+1)+1},$$

qui fait voir que la loi ayant lieu pour un nombre quelconque i, aura lieu pour le suivant $i+1$.

L'équation proposée étant intégrable quand l'exposant de x dans le second membre est nul, si l'on fait $m^{(i)} = 0$, on trouvera

$$m = -\frac{4i}{2i-1}.$$

Si l'on fait $m^{(i)} = -4$, on obtiendra

$$m = -\frac{4i+4}{2i+1} = -\frac{4(i+1)}{2(i+1)-1},$$

ce qui indique une transformée de plus que dans le cas précédent, et revient à poser $m^{(i+1)} = 0$.

à-dire qu'en y faisant

$$y' = \frac{1}{b'x'} + \frac{z'}{x'^2},$$

et continuant comme on l'a indiqué pour les premiers cas, on parviendrait à une transformée séparable, si le nombre m' était quelqu'un de ceux que comprend la formule $-\frac{4i}{2i-1}$, et par conséquent, si l'on avait

$$-\frac{m}{m+1} = -\frac{4i}{2i-1}.$$

On tire de là

$$m = -\frac{4i}{2i+1};$$

et donnant à i les valeurs 1, 2, 3, etc., il vient la suite des nombres

$$-\frac{4}{3},\ -\frac{8}{5},\ -\frac{12}{7},\ -\frac{16}{9},\ \text{etc.}$$

Il suit donc de tout ce qui précède, que l'équation de Riccati est séparable, quand l'exposant m est de la forme $\frac{-4i}{2i+1}$, comprenant 0 et -2.

On pourrait multiplier davantage les exemples; mais toutes ces équations particulières, d'une forme bizarre le plus souvent, ne se rencontrant jamais dans les applications, n'offrent aucun intérêt : je passerai donc à une autre méthode, due à Euler.

Recherche du facteur propre à rendre intégrable une équation différentielle du premier ordre.

288. Il faut se rappeler qu'une équation différentielle n'est pas toujours le produit immédiat de la différen-

tiation d'une équation à deux variables, mais qu'elle résulte en général de l'élimination d'une constante arbitraire, entre l'équation primitive dont elle tire son origine, et la différentielle immédiate de cette équation (53).

L'élimination s'effectue sur-le-champ, lorsque l'équation primitive est sous la forme $u = c$, u désignant une fonction quelconque de x et de y; car, en différentiant, on a $du = 0$. Si la fonction du n'a aucun facteur par lequel elle ait pu être divisée, elle conservera la forme de différentielle exacte à deux variables, et pourra par conséquent s'intégrer par le procédé du n° 278.

289. Lorsque l'équation primitive n'est pas sous la forme $u = c$, ou que la différentielle $du = 0$ renferme des facteurs qui disparaissent, l'équation du premier ordre qui en résulte n'est plus immédiatement intégrable. Si l'on avait, par exemple, $u = y - cx = 0$, on trouverait $du = dy - c dx = 0$, et éliminant c, il viendrait $x dy - y dx = 0$, équation qui ne satisfait pas à la condition d'intégrabilité, puisqu'elle donne

$$M = -y, \quad N = x, \quad \frac{dM}{dy} = -1, \quad \frac{dN}{dx} = 1.$$

Mais si l'on dégage la constante c, on aura $\frac{y}{x} = c$, et en différentiant, $\frac{x dy - y dx}{x^2} = 0$; sous cette forme

$$M = -\frac{y}{x^2}, \quad N = \frac{1}{x}, \quad \frac{dM}{dy} = -\frac{1}{x^2} = \frac{dN}{dx};$$

on voit donc que l'intégrabilité de l'équation $x dy - y dx = 0$ tient à la restitution du facteur $\frac{1}{x^2}$ qui a

disparu avec la différentiation et l'élimination de la constante arbitraire.

En général, toute équation différentielle à deux variables, et dans laquelle les différentielles ne passent pas le premier degré, est susceptible de devenir une différentielle exacte, par le moyen d'un facteur, si elle répond à une équation primitive. En effet, soient

$$M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y = 0 \quad \text{et} \quad u = c,$$

l'équation différentielle proposée et son équation primitive; la première doit donner pour $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, la même valeur que

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y = 0,$$

différentielle immédiate de la seconde : il faut donc qu'on ait

$$-\frac{M}{N} = -\frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}}, \text{ d'où } \frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}}{N} = \frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{M};$$

et nommant z ces derniers quotiens, on en conclura

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = Mz, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = Nz, \quad \mathrm{d}u = Mz\mathrm{d}x + Nz\mathrm{d}y.$$

On déterminerait ainsi le facteur z, si l'intégrale de l'équation proposée était connue, puisqu'il suffirait de résoudre cette intégrale par rapport à la constante arbitraire, afin de lui donner la forme $u = c$; et comme on verra bientôt que toutes les équations différentielles à deux variables admettent nécessairement une intégrale complète, au moins sous la forme d'une série, il s'ensuit qu'il existe, au moins sous cette forme, un

facteur propre à rendre différentielle exacte l'une quelconque de ces équations.

290. Quand l'intégrale n'est pas connue, on n'a pour déterminer le facteur z, que la condition

$$\frac{\mathrm{d}.Mz}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}.Nz}{\mathrm{d}x},$$

à laquelle doit satisfaire $Mz\mathrm{d}x + Nz\mathrm{d}y = \mathrm{d}u$, comme différentielle exacte; et en développant cette condition, on trouve

$$M\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} + z\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y} = N\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + z\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x},$$

ou $$M\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} - N\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y} - \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}\right)z = 0 \ldots (A).$$

Si l'on pouvait, en général, tirer de l'équation (A) une valeur de z, l'intégration des équations différentielles quelconques du premier ordre s'effectuerait par le procédé du n° 278; mais cette équation est presque toujours plus difficile à traiter que la proposée, puisque la fonction z qu'elle renferme, dépendant de deux variables, a deux coefficiens différentiels, et qu'elle est par conséquent de l'espèce de celles dont la formation a été indiquée n° 140. Je ne saurais, pour le moment, entreprendre sa résolution, qui, comme on le verra dans la suite, ramène au point d'où l'on est parti; mais je vais montrer encore quelques-unes des propriétés du facteur z.

Il est à remarquer que lorsqu'on connaît une valeur de z, on en déduit une infinité d'autres, en observant que si l'on multiplie les deux membres de l'équation $zM\mathrm{d}x + zN\mathrm{d}y = \mathrm{d}u$, par une fonction quelconque de u, que je désignerai par $\varphi(u)$, les deux membres du

résultat

$$z\varphi(u)M\mathrm{d}x + z\varphi(u)N\mathrm{d}y = \varphi(u)\mathrm{d}u,$$

seront aussi des différentielles exactes; ainsi z étant un facteur propre à rendre intégrable l'équation... $M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y = 0$, le produit $z\varphi(u)$ jouira de la même propriété.

Il suit de là, que si l'on parvenait à découvrir deux facteurs distincts, propres à rendre intégrable l'équation différentielle proposée, on aurait sur-le-champ son intégrale; car l'un de ces facteurs étant pris pour z, l'autre serait de la forme $z\varphi(u)$, et en posant $\frac{z\varphi(u)}{z} = c$, on aurait $\varphi(u) = c$, ce qui revient à... $u = const.$

291. Il y a des cas où le facteur z ne doit renfermer que l'une des variables x ou y, et alors il est aisé d'en obtenir l'expression au moyen de l'équation (A). Supposant en effet dans cette équation, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = 0$, elle deviendra

$$-N\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + z\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y} - \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}\right) = 0,$$

et l'on en tirera

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{1}{N}\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y} - \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x,$$

équation qui aura lieu si la quantité

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y} - \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}\right)$$

se réduit à une fonction de x. En représentant cette fonction par X, et en intégrant, on trouvera

$$lz = \int X dx, \quad \text{ou} \quad z = e^{\int X dx}.$$

Cette formule s'applique à l'équation

$$dy + Py dx = Q dx,$$

puisqu'il vient

$$M = Py - Q, \quad N = 1, \quad \frac{1}{N}\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = P,$$

et par conséquent $z = e^{\int P dx}$. Multipliant ensuite l'équation $dy + Py dx - Q dx = 0$ par $e^{\int P dx}$, on trouve $e^{\int P dx} dy + (Py - Q)\, e^{\int P dx} dx = 0$; intégrant le terme $e^{\int P dx} dy$, par rapport à y, on obtient..... $u = y e^{\int P dx} + X$, X étant une fonction de x, déterminée par l'équation

$$\frac{d.\, y e^{\int P dx}}{dx} + \frac{dX}{dx} = (Py - Q) e^{\int P dx},$$

de laquelle on tire

$$\frac{dX}{dx} = -e^{\int P dx} Q, \quad X = -\int e^{\int P dx} Q dx,$$

et par conséquent

$$y e^{\int P dx} - \int e^{\int P dx} Q dx = C,$$

ou, comme dans le n° 285,

$$y = e^{-\int P dx}\left(\int e^{\int P dx} Q dx + C\right).$$

Je ne m'arrêterai point au cas où le facteur z ne devrait renfermer que la variable y ; on voit aisément que son expression serait alors $z = e^{\int Y dy}$, en faisant

$$Y = \frac{1}{M}\left(\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}\right),$$

et que ce cas n'aurait lieu qu'autant que Y serait absolument indépendant de x.

292. Il existe, entre une fonction homogène et ses coefficiens différentiels, des relations particulières qui facilitent beaucoup l'intégration.

Si V désigne une fonction homogène de x, y, etc., et qu'on y substitue tx, ty, etc., au lieu de x, y, etc., elle prendra nécessairement la forme $t^m V$, m étant la somme des exposans des variables dans chaque terme (283). Supposant ensuite que $t = 1 + g$, on aura $(1+g)^m V$ au lieu de V; dans la même hypothèse x, y, etc., se changeront respectivement en

$$x + gx, \quad y + gy, \text{ etc.},$$

et mettant gx pour h, gy pour k, dans la formule du n° 41, on parviendra à cette équation

$$\left.\begin{aligned} &V + \frac{dV}{dx}gx + \frac{dV}{dy}gy + \text{etc.} \\ &+ \frac{1}{2}\left\{\frac{d^2V}{dx^2}g^2x^2 + 2\frac{d^2V}{dxdy}g^2xy + \frac{d^2V}{dy^2}g^2y^2 + \text{etc.}\right\} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}\right\} = (1+g)^m V.$$

En développant le second membre, et comparant ensemble les termes affectés de la même puissance de l'indéterminée g, on aura

$$\frac{dV}{dx}x + \frac{dV}{dy}y + \text{etc.} = mV,$$

$$\frac{d^2V}{dx^2}x^2 + 2\frac{d^2V}{dxdy}xy + \frac{d^2V}{dy^2}y^2 + \text{etc.} = m(m-1)V,$$

etc.

293. Au moyen de ces relations, le facteur z se détermine assez facilement dans les équations diffé-

rentielles homogènes. Voici comment M. Poisson y est parvenu, par un procédé plus exact que celui dont Euler avait fait d'abord usage.

Si $Mdx + Ndy = 0$ est une équation homogène, et que la somme des exposans de x et de y dans M et dans N, soit égale à m, en supposant que z soit aussi une fonction homogène du degré n, et faisant.... $Mzdx + Nzdy = du$, il résulte des théorèmes du numéro précédent que

$$\frac{d(Mz)}{dx}x + \frac{d(Mz)}{dy}y = (m+n)Mz;$$

mais il faut, pour que la différentielle proposée soit exacte, que

$$\frac{d(Mz)}{dy} = \frac{d(Nz)}{dx},$$

équation qui fournit le moyen de chasser $\frac{d(Mz)}{dy}$ de la précédente, qu'elle change en

$$\frac{d(Mz)}{dx}x + \frac{d(Nz)}{dx}y = (m+n)Mz.$$

Cela posé, il est visible que

$$\frac{d(Mzx)}{dx} = \frac{d(Mz)}{dx}x + Mz, \quad \frac{d(Nzy)}{dx} = \frac{d(Nz)}{dx}y;$$

l'équation trouvée plus haut peut donc s'écrire ainsi :

$$\frac{d(Mzx)}{dx} + \frac{d(Nzy)}{dx} = (m+n+1)Mz;$$

or, l'exposant n étant indéterminé, si l'on fait

$$m + n + 1 = 0,$$

il en résultera

$$\frac{\mathrm{d}(Mzx)}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}(Nzy)}{\mathrm{d}x}=0,$$

d'où $Mzx+Nzy=c$ et $z=\frac{c}{Mx+Ny}$;

il est d'ailleurs évident qu'on peut faire $c=1$, ainsi $\frac{1}{Mx+Ny}$ sera un des facteurs propres à rendre intégrable l'équation $M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y=0$ (*).

Des équations du premier ordre, dans lesquelles les différentielles passent le premier degré.

294. Par la génération des équations différentielles, dont j'ai donné plusieurs exemples, n° 53, on voit qu'il peut s'en présenter dans lesquelles les différentielles passent le premier degré. La formule générale de ces équations est

$$\mathrm{d}y^n+P\mathrm{d}y^{n-1}\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y^{n-2}\mathrm{d}x^2\ldots+T\mathrm{d}y\mathrm{d}x^{n-1}+U\mathrm{d}x^n=0;$$

si on la divise par la plus haute puissance de $\mathrm{d}x$, elle deviendra

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^n+P\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^{n-1}+Q\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^{n-2}\ldots+T\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+U=0;$$

en la résolvant par rapport au coefficient différentiel $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, et désignant par p, p', p'', etc., ses racines,

(*) On a supposé ici que le facteur z était une fonction homogène, mais on justifie cette hypothèse, en montrant que la différentielle $\frac{M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y}{Mx+Ny}$ est exacte toutes les fois que M et N sont des fonctions homogènes. (*Voyez* le Traité in-4°, t. II, page 266.) On trouve, à la page suivante du même volume, la détermination *à posteriori* du facteur z, d'après la séparation des variables.

on aura

$$\frac{dy}{dx}-p=0,\quad \frac{dy}{dx}-p'=0,\quad \frac{dy}{dx}-p''=0,\ \text{etc.},$$

résultats qui pourront tous se traiter par les méthodes précédentes, puisque les différentielles ne s'y trouvent qu'au premier degré. L'intégrale de chacun d'eux sera aussi l'intégrale de l'équation proposée, qui sera encore satisfaite par les valeurs tirées de l'équation formée du produit de toutes ces intégrales.

En effet, la proposée étant équivalente à

$$\left(\frac{dy}{dx}-p\right)\left(\frac{dy}{dx}-p'\right)\left(\frac{dy}{dx}-p''\right)\ldots=0,$$

sera vérifiée par toutes les équations qui annuleront un de ces facteurs. De plus, si l'on considère qu'une équation primitive de la forme

$$MNP\ldots=0,$$

n'a lieu que par l'anéantissement successif de chacun de ses facteurs, on en conclura que la différentielle immédiate de son premier membre, savoir,

$$dM.NP\ldots.+dN.MP\ldots+\text{etc.}=0,$$

se réduit toujours à un seul terme; car si l'on prend, par exemple, $M=0$, il ne restera que $dM.NP\ldots=0$, ou seulement $dM=0$: l'équation $MNP\ldots=0$ vérifiera donc l'équation différentielle à laquelle satisferait l'équation $M=0$.

Les deux exemples suivans, quoique très simples, éclairciront toutes les difficultés que pourrait renfermer l'énoncé ci-dessus.

295. 1°. Soit $dy^2-a^2dx^2=0$; cette équation se décompose en $dy+adx=0$, $dy-adx=0$, dont les inté-

grales sont $y+ax=c$, $y-ax=c'$; et il est facile de voir que chacun de ces résultats satisfait à la proposée. L'équation $(y+ax-c)(y-ax-c')=0$ y satisfait aussi; car elle donne

$$(y+ax-c)(dy-adx)+(y-ax-c')(dy+adx)=0,$$

d'où

$$dy=\frac{[(y+ax-c)-(y-ax-c')]adx}{2y-(c+c')};$$

et mettant successivement, au lieu de y, ses valeurs $c-ax$, $c'+ax$, on trouve

$$dy=-adx, \quad dy=+adx.$$

L'intégrale $(y+ax-c)(y-ax+c')=0$, renfermant deux constantes arbitraires et irréductibles, paraîtrait plus générale que celles des autres équations du premier ordre qui ne comportent qu'une constante; mais il faut bien faire attention que chacun de ses facteurs doit être considéré isolément, et qu'on n'en tire pas d'autres lignes que celles qui résulteraient d'une intégrale renfermant une seule constante, dont cette équation est aussi susceptible. Cette dernière intégrale s'obtient en faisant $dy=mdx$ dans l'équation différentielle $dy^2-a^2dx^2=0$, qui se change en $m^2-a^2=0$, ce qui détermine la quantité m, dont il faudrait ensuite substituer la valeur dans l'intégrale de $dy=mdx$, qui est $y=mx+c$. Il suit de là que l'intégrale de la proposée est le résultat de l'élimination de m, entre les équations

$$y=mx+c, \quad m^2-a^2=0,$$

desquelles on tire

$$m=\frac{y-c}{x} \quad \text{et} \quad \left(\frac{y-c}{x}\right)^2-a^2=0.$$

La dernière étant du second degré, donne, pour chaque valeur particulière de la constante, deux lignes droites, inclinées dans des sens différens, par rapport à l'axe des x; c'est aussi tout ce que fournit l'autre intégrale $(y+ax-c)\ (y-ax-c')=0$, excepté que chaque facteur ne représente que les lignes inclinées dans le même sens; mais comme en donnant séparément à c et à c' toutes les valeurs possibles, ces quantités passeront nécessairement par les mêmes degrés de grandeur, si l'on assemble les droites correspondantes aux mêmes valeurs des constantes c et c', on retombera sur les solutions comprises dans l'intégrale $\left(\frac{y-c}{x}\right)^2-a^2=0$, qui ne contient que la seule constante c.

Il est bon d'observer que toute équation ne renfermant que dy, dx et des quantités constantes, peut être intégrée en y faisant, comme ci-dessus, $dy=mdx$.

2°. Soit encore l'équation $dy^2-axdx^2=0$, on en tire $dy+dx\sqrt{ax}=0$, $dy-dx\sqrt{ax}=0$, et en intégrant, on aura

$$y+\tfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}-c=0,\quad y-\tfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}-c'=0.$$

Ces équations, ainsi que leur produit, pourront être considérées séparément comme des intégrales de la proposée; mais ce cas diffère du précédent, en ce que les radicaux que contiennent les deux intégrales obtenues forment entre elles un lien qui permet de les comprendre toutes deux dans une même équation, avec une seule constante. En effet, si l'on fait disparaître le radical dans l'équation

$$y+\tfrac{2}{3}\sqrt{ax^3}-c=0,$$

on obtient $(y-c)^2=\frac{4}{9}ax^3$. Ce résultat est encore l'intégrale de l'équation proposée, à laquelle il conduira immédiatement par l'élimination de c. Il appartient à une espèce de paraboles dont chacune des équations irrationnelles ne présente qu'une branche; et le produit de ces équations ne répondrait qu'à des groupes de branches appartenantes à des courbes différentes, mais qui, étant rassemblées deux à deux pour les mêmes valeurs des constantes, ne donneraient rien de plus que l'intégrale rationnelle.

296. Ce qui précède faisant dépendre l'intégration des équations où les différentielles passent le premier degré, de la résolution des équations algébriques, pour laquelle on est bientôt arrêté, voici quelques procédés qui, dans certains cas, peuvent éluder, au moins en partie, les difficultés que présente la résolution de l'équation différentielle proposée, par rapport à $\frac{dy}{dx}$.

Quand cette équation ne contient avec $\frac{dy}{dx}$, que l'une des deux variables, x, par exemple, et qu'il est plus facile de la résoudre par rapport à x que par rapport au coefficient $\frac{dy}{dx}$, que je représenterai, pour abréger, par p, on en tire d'abord $x=P$, P désignant une fonction quelconque de p; et comme l'équation

$\frac{dy}{dx}=p$ donne $dy=pdx$, d'où $y=px-\int xdp+C$,

si l'on met pour x sa valeur P, il viendra

$$y=Pp-\int Pdp+C.$$

Alors l'élimination de p, entre les deux équations

$$x = P, \quad y = Pp - \int P dp + C,$$

conduisant à une équation primitive entre x, y et la constante arbitraire C, donnera l'intégrale demandée.

Soit, par exemple, $x dx + a dy = b\sqrt{dx^2 + dy^2}$, ou $x + ap = b\sqrt{1 + p^2}$, en écrivant p au lieu de $\frac{dy}{dx}$; cette dernière équation donne immédiatement

$$x = -ap + b\sqrt{1 + p^2}, \quad P = -ap + b\sqrt{1 + p^2},$$

et par conséquent

$$y = bp\sqrt{1 + p^2} - \tfrac{1}{2}ap^2 - b\int dp\sqrt{1 + p^2} + C.$$

297. Quand les deux variables entrent en même temps dans l'équation proposée, mais que l'une d'elles, y, par exemple, n'y monte qu'au premier degré, si l'on prend alors la valeur de y en x et p, on en tirera

$$dy = R dx + S dp,$$

d'où il suit

$$p dx = R dx + S dp \text{ ou } (R - p) dx + S dp = 0;$$

et si l'on parvenait à intégrer cette dernière équation, on aurait, entre p, x et une constante arbitraire, une relation, au moyen de laquelle chassant p de l'équation proposée, on obtiendrait une équation primitive qui serait l'intégrale cherchée.

Quand la variable x ne s'élève pas non plus au-delà du premier degré, l'équation proposée, étant alors de la forme

$$y = Nx + P,$$

où N et P désignent des fonctions de p, conduit à une différentielle analogue à l'équation traitée dans le n° 285; mais, pour plus de simplicité, bornons-nous

au cas particulier

$$y = px + P.$$

On a $dy = pdx + \left(x + \frac{dP}{dp}\right) dp$; et puisque $dy = pdx$, il reste l'équation $\left(x + \frac{dP}{dp}\right) dp = 0$, qui se décompose en deux facteurs $x + \frac{dP}{dp} = 0$, $dp = 0$. Le premier n'est, au fond, qu'une équation primitive entre x et p; il n'y a lieu à intégrer que le second, qui donne $p = c$, ou $dy = cdx$ et $y = cx + c'$. Les constantes c et c' ne sont pas arbitraires toutes deux; car en faisant dans l'équation proposée $p = c$, on a $y = cx + C$, C étant ce que devient P dans la même circonstance, et l'on tire de là $c' = C$: l'intégrale demandée est donc $y = cx + C$, et s'obtient en changeant p en c.

Le facteur $x + \frac{dP}{dp} = 0$ n'est point étranger à la question. Si on le combine avec l'équation proposée pour éliminer p, on obtient entre x et y, une équation primitive qui satisfait aussi à cette proposée; car la relation qu'il établit entre x et p réduit encore à pdx la valeur de dy, déduite de l'équation proposée elle-même; mais cette dernière solution ne renfermant pas de nouvelle constante, n'est que particulière.

Soit, pour exemple, l'équation

$$ydx - xdy = n\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

qui se met d'abord sous la forme

$$y = px + n\sqrt{1 + p^2};$$

en la différentiant, on trouve

$$dy = pdx + xdp + \frac{npdp}{\sqrt{1+p^2}},$$

et à cause que $dy = pdx$, il reste

$$xdp + \frac{npdp}{\sqrt{1+p^2}} = 0.$$

Cette équation se décompose en deux facteurs

$$x + \frac{np}{\sqrt{1+p^2}} = 0, \text{ et } dp = 0;$$

le second conduit à $p = c$, et l'intégrale demandée est

$$y = cx + n\sqrt{1+c^2}.$$

Le premier facteur donne

$$p = \pm\frac{x}{\sqrt{n^2-x^2}}, \quad \sqrt{1+p^2} = -\frac{np}{x} = \mp\frac{n}{\sqrt{n^2-x^2}};$$

substituant dans l'équation proposée, on a $y^2+x^2=n^2$, équation qui ne renferme point de constante arbitraire, qui n'est point comprise dans l'intégrale

$$y = cx + n\sqrt{1+c^2},$$

et telle néanmoins, que les valeurs de y et de dy, qui s'en déduisent, satisfont à l'équation différentielle proposée, dont elle offre par conséquent une *solution particulière*. Je reviendrai dans la suite sur ce genre de solutions.

De l'intégration des équations différentielles du second ordre et des ordres supérieurs.

298. La difficulté d'intégrer les équations devient d'autant plus grande, que ces équations sont d'un ordre plus élevé : on n'y réussit que par rapport à un

petit nombre d'équations très particulières; et cependant toute équation différentielle à deux variables, dans quelque ordre que ce soit, n'exprime point une relation absurde, lorsqu'elle ne donne pas une valeur imaginaire pour le coefficient différentiel de l'ordre le plus élevé. Cette proposition, déjà annoncée dans le n° 289, se prouve aisément par le théorème de Taylor.

En effet, une équation différentielle quelconque de l'ordre n, étant résolue par rapport au coefficient différentiel de cet ordre, en donnera l'expression par ceux des ordres inférieurs, et l'on aura en général

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2 y}{dx^2},\ \ldots\ \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right),$$

d'où, par des différentiations successives, on tirera les expressions de

$$\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}},\ \frac{d^{n+2} y}{dx^{n+2}},\ \text{etc.},$$

en ayant soin, après chaque différentiation, de mettre pour $\frac{d^n y}{dx^n}$, la valeur qu'a fournie l'équation proposée. Par ce moyen, on obtiendra tous les coefficiens différentiels, depuis l'ordre n inclusivement, en fonction des variables primitives et des $n-1$ premiers coefficiens différentiels.

Si, dans ces fonctions, on peut supposer $x=0$, sans qu'elles cessent d'être réelles et finies, il faudra encore, pour achever de déterminer les coefficiens différentiels qu'elles expriment, prendre arbitrairement les valeurs correspondantes des quantités

$$y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2 y}{dx^2},\ \ldots\ \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}},$$

que l'équation proposée ne fait pas connaître; et en les représentant par

$$A,\ A_1,\ A_2,\ \ldots\ldots A_{n-1},$$

on aura, pour une valeur quelconque de x,

$$y = A + A_1\frac{x}{1} + A_2\frac{x^2}{1.2}\ldots\ldots + A_{n-1}\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + \mathrm{f}(A,\ A_1,\ A_2,\ldots A_{n-1})\frac{x^n}{1.2\ldots n} + \text{etc.}\ (22),$$

série où les coefficiens des n premiers termes sont des constantes arbitraires.

S'il arrivait que la supposition de $x = o$ rendît imaginaire ou infinie l'expression du coefficient différentiel de l'ordre n ou des suivans, on ferait alors $x = a$, a désignant une quelconque des valeurs qui ne produisent pas cet effet, et l'on aurait

$$y = A + A_1\frac{x-a}{1} + A_2\frac{(x-a)^2}{1.2}\ldots + A_{n-1}\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + \mathrm{f}(a,\ A,\ A_1,\ A_2,\ldots A_{n-1})\frac{(x-a)^n}{1.2\ldots n} + \text{etc},$$

série où les quantités arbitraires $A,\ A_1,\ A_2,\ldots A_{n-1}$ sont les valeurs de y et de ses coefficiens différentiels, correspondantes à $x = a$.

De cette manière comme de l'autre, on voit que si la fonction désignée par f n'est pas constamment imaginaire pour toutes les valeurs de x, on tirera toujours de l'équation différentielle proposée un nombre infini de valeurs consécutives de y, par une série qui sera d'autant plus convergente, que les valeurs de x différeront moins de la quantité a : l'équation proposée ne tombera donc point dans le cas d'une impossibilité absolue, quoiqu'on manque de moyens pour l'intégrer. Cette

propriété, qui est particulière aux équations différentielles à deux variables, se reconnaît aussi par des considérations géométriques, comme on le verra plus bas.

299. On conclut aussi de ce qui précède, que l'expression générale de y en x doit renfermer n constantes arbitraires.

La quantité a qu'introduit ici la variable indépendante x, ne doit pas compter dans le nombre des constantes arbitraires amenées par l'intégration, comme on peut s'en assurer sur les intégrales complètes des équations du premier ordre, considérées dans leur forme générale $F(x, y, C) = 0$. On ne peut dans ce cas déterminer la constante arbitraire C, qu'en assignant en même temps une valeur à x aussi bien qu'à y, et si on les représente par a et b, on aura l'équation $F(a, b, C) = 0$, de laquelle on tirera la valeur de C en a et b; mais ce qu'il faut bien observer, c'est que la fonction de ces quantités, par laquelle on remplace ainsi la constante arbitraire, peut également être éliminée par la différentiation; car si l'on met l'intégrale proposée sous la forme

$$F_1(x, y) = C, \quad \text{il vient} \quad C = F_1(a, b),$$

et ensuite l'équation

$$F_1(x, y) = F_1(a, b),$$

dont le second membre disparaît par la différentiation.

On détermine semblablement deux constantes C et C_1, dans une équation primitive de la forme..... $F(x, y, C, C_1) = 0$, lorsque, pour une valeur donnée de x, on assigne celles de y et de $\frac{dy}{dx}$; car en joignant à l'équation ci-dessus sa différentielle première, que je

représenterai par

$$F_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, C, C_1\right) = 0,$$

et supposant qu'à $x = a$ réponde

$$y = b, \frac{dy}{dx} = c,$$

on a les deux équations

$$F(a, b, C, C_1) = 0, \quad F_1(a, b, c, C, C_1) = 0,$$

au moyen desquelles on détermine C et C_1 en a, b, c, par des expressions qui se comportent dans les différentiations et les éliminations, comme les simples lettres C et C_1.

300. Ces considérations nous ramènent à la formation des équations différentielles par l'élimination des constantes, dont on a déjà vu, dans le n° 54, un exemple conduisant jusqu'au second ordre.

En partant de l'équation

$$y^2 = m(a^2 - x^2) \quad (U),$$

une première différentiation conduit à

$$y dy = -mx dx \quad (V),$$

résultat qui ne contient plus a; puis une seconde différentiation suivie de l'élimination de m, donne l'équation du second ordre

$$y \frac{dy}{dx} - x \frac{dy^2}{dx^2} - xy \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad (Z),$$

qui ne renferme plus les constantes m et a.

Cette même équation peut encore s'obtenir en commençant par éliminer m, entre l'équation primitive et

sa différentielle première, ce qui donnera

$$xy\,dx + dy(a^2 - x^2) = 0 \quad (V'),$$

puis différentiant celle-ci pour éliminer en dernier lieu la constante a. Enfin, si la constante a ne disparaissait pas d'elle-même, à la première différentiation, on pourrait commencer par différentier deux fois de suite l'équation (U), puis éliminer, entre cette équation et ses différentielles première et seconde, les constantes m et a.

* Quel que soit celui de ces trois procédés qu'on ait suivi, on arrive toujours à l'équation (Z); mais ce qu'il faut remarquer, c'est que chacune des équations (V) et (V'), y menant en particulier par la différentiation et l'élimination d'une constante, en est une intégrale. On les appelle, en conséquence, *intégrales premières*, pour les distinguer de l'équation (U), qui est l'*intégrale seconde* ou l'*intégrale primitive*, à cause que (Z) n'est que du second ordre.

On voit par là qu'une équation différentielle du second ordre peut avoir deux intégrales premières, et qu'en éliminant de celles-ci le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, on obtiendrait, entre x, y et deux constantes arbitraires, une équation primitive qui devrait rentrer dans l'équation (U) : d'où il suit qu'il suffit de connaître les deux intégrales premières, pour trouver l'intégrale seconde.

Ces remarques s'étendent aux équations de tous les ordres. Pour le troisième, par exemple, l'équation primitive doit contenir trois constantes arbitraires (299), car on a les quatre équations

$$U = 0, \quad dU = 0, \quad d^2U = 0, \quad d^3U = 0;$$

mais si l'on élimine d'abord deux des constantes arbi-

traires entre les équations $U=0$, $dU=0$, $d^2U=0$, on aura trois équations différentielles du second ordre, puisqu'on pourra conserver chacune des trois constantes à son tour. Les équations qu'on obtient ainsi, sont des *intégrales premières* de l'équation différentielle du troisième ordre, qui résultera nécessairement de l'élimination de la constante qu'elles renferment. Les *intégrales secondes* sont ici les équations du premier ordre que donne l'élimination de chacune des constantes, entre les équations $U=0$ et $dU=0$, et l'équation primitive $U=0$ est l'*intégrale troisième*. Sans pousser plus loin ces considérations, on doit en conclure qu'*une équation différentielle de l'ordre n a un nombre n d'intégrales premières;* et comme ces intégrales sont de l'ordre $n-1$, elles ne renferment que les $n-1$ coefficiens

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

si donc on peut les éliminer, on aura l'intégrale $n^{ième}$, ou l'équation primitive qui répond à l'équation différentielle proposée.

301. Pour généraliser la théorie précédente, Lagrange, par l'application de la série de Taylor, a déduit de l'équation différentielle même, cette multiplicité de leurs intégrales premières, qui vient d'être établie en partant de l'équation primitive.

Si l'on pose d'abord, comme dans le n° 240, $h=-x$, et que l'on désigne par A la valeur de y lorsque $x=0$, on trouve

$$A=y-\frac{dy}{dx}\frac{x}{1}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{x^2}{1.2}-\frac{d^3y}{dx^3}\frac{x^3}{1.2.3}+\text{etc.} \quad (a),$$

équation où l'on peut faire disparaître tous les coefficiens différentiels des ordres supérieurs à celui de

l'équation différentielle proposée. Supposons, par exemple, celle-ci du second ordre et mise sous la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \quad (Z);$$

on en déduira les valeurs des coefficiens différentiels des ordres plus élevés, et par ce moyen, l'équation (a), devenant

$$A = y - \frac{dy}{dx}\frac{x}{1} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\frac{x^2}{1.2} - f_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.} \quad (1),$$

est ramenée au premier ordre, et est une intégrale première de l'équation (Z), A désignant alors la constante arbitraire.

Cela posé, on peut écrire dans le second membre de l'équation (a), $\frac{dy}{dx}$ au lieu de y; il donnera la valeur de $\frac{dy}{dx}$, correspondante à $x = 0$; en désignant cette valeur par A_1, on aura

$$A_1 = \frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2}\frac{x}{1} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{x^2}{1.2} - \text{etc.},$$

et remplaçant encore $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., par leurs valeurs tirées de l'équation (Z), on obtiendra

$$A_1 = \frac{dy}{dx} - f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\frac{x}{1} + f_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\frac{x^2}{1.2} - \text{etc.} \quad (2),$$

qui sera encore une autre intégrale première de l'équation proposée. On ne pourra pas aller plus loin, puis-

qu'il n'y a d'arbitraire que les premières valeurs de y et de $\frac{dy}{dx}$.

Sans qu'il soit besoin d'entrer dans de nouveaux détails, on voit que si l'équation proposée était de l'ordre n, on tirerait de l'équation (a) des expressions de

$$y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},$$

correspondantes à $x=0$, qui seraient toutes arbitraires, et en y remplaçant les coefficiens différentiels de l'ordre n et des ordres supérieurs par leurs valeurs tirées de l'équation proposée, on formerait n équations de l'ordre $n-1$, qui en seraient les intégrales premières.

302. Nous commencerons l'intégration des équations différentielles des ordres supérieurs, par celles qui ne renferment point les variables primitives.

Dans le second ordre, ces équations ne contiennent que $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$; et lorsqu'on y fait pour abréger $\frac{dy}{dx}=p$, ce qui donne $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$, elles conduisent à $\frac{dp}{dx}=P$, P étant une fonction de p. On tire de là $dx=\frac{dp}{P}$, et par conséquent $x=\int\frac{dp}{P}+C$; mettant pour dx sa valeur dans l'équation $dy=pdx$, on trouve aussi... $y=\int\frac{pdp}{P}+C'$; il ne s'agit plus que d'éliminer p entre les deux équations $x=\int\frac{dp}{P}+C$ et $y=\int\frac{pdp}{P}+C'$, pour avoir l'intégrale en x et y, qui sera complète; car elle renfermera deux constantes arbitraires (299).

L'élimination de p ne pourra se faire que lorsqu'on aura effectué les intégrations indiquées; mais par les quadratures, on construira la courbe cherchée.

Soit pour exemple l'équation $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y}=a$. En mettant pdx pour dy, et $dpdx$ pour d^2y, on changera cette équation en $\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}dx}{dp}=a$, et l'on en tirera

$$dx=\frac{adp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},\quad dy=pdx=\frac{apdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

L'intégration donnera

$$x=C+\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}},\quad y=C'-\frac{a}{\sqrt{1+p^2}};$$

éliminant p, il viendra

$$(x-C)^2+(y-C')^2=a^2,$$

résultat facile à prévoir, car l'équation différentielle proposée n'étant autre chose que l'expression générale du rayon de courbure, égalée à une constante $-a$ (81), exprime la propriété fondamentale du cercle.

303. On ramène de même à l'intégration des fonctions d'une seule variable, les équations d'un ordre quelconque, dans lesquelles un coefficient différentiel est exprimé par celui de l'ordre immédiatement inférieur.

Si l'on avait, par exemple, $\frac{d^3y}{dx^3}$ en fonction de $\frac{d^2y}{dx^2}$, on ferait $\frac{d^2y}{dx^2}=q$, d'où il résulterait $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{dq}{dx}$; et par conséquent l'équation proposée serait transformée en

$\frac{dq}{dx} = Q$, Q représentant une fonction donnée de q.

On conclurait de cette dernière équation

$$dx = \frac{dq}{Q}, \quad x = \int \frac{dq}{Q} + C;$$

puis de $\frac{d^2y}{dx^2} = q$, on tirerait successivement

$$\frac{dy}{dx} = \int q\,dx = \int \frac{q\,dq}{Q} + C',$$

$$y = \int dx \int q\,dx = \int \frac{dq}{Q}\left(\int \frac{q\,dq}{Q} + C'\right) + C'':$$

l'intégrale demandée serait donc le résultat de l'élimination de q entre les deux équations

$$x = \int \frac{dq}{Q} + C, \quad y = \int \frac{dq}{Q}\left(\int \frac{q\,dq}{Q} + C'\right) + C'',$$

et il y aurait trois constantes arbitraires dans le résultat. On étendrait facilement ce procédé à un ordre quelconque.

304. On réduit encore très aisément à l'intégration des fonctions d'une seule variable, les équations d'un ordre quelconque, dans lesquelles un coefficient différentiel est donné par celui de l'ordre inférieur de deux unités. Si l'on avait, par exemple, $\frac{d^4y}{dx^4}$ en fonction de $\frac{d^2y}{dx^2}$, on représenterait $\frac{d^2y}{dx^2}$ par q, d'où il suivrait

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dq}{dx}, \quad \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^2q}{dx^2},$$

et la proposée serait transformée en

$$\frac{d^2q}{dx^2} = Q,$$

Q désignant une fonction donnée de q. En multipliant alors les deux membres par dq, il viendrait

$$\frac{dq}{dx}\cdot\frac{d^2q}{dx} = Q dq;$$

et comme $\frac{d^2q}{dx} = d\frac{dq}{dx}$, on tirerait de là

$$\frac{1}{2}\frac{dq^2}{dx^2} = \int Q dq + C, \quad \text{et} \quad \frac{dq}{dx} = \sqrt{2\int Q dq + C},$$

$$dx = \frac{dq}{\sqrt{2\int Q dq + C}}, \quad x = \int \frac{dq}{\sqrt{2\int Q dq + C}} + C';$$

mais de $\frac{d^2y}{dx^2} = q$, on déduit successivement

$$\frac{dy}{dx} = \int q dx = \int \frac{q dq}{\sqrt{2\int Q dq + C}} + C'',$$

$$y = \int dx \int q dx = \int \frac{dq}{\sqrt{2\int Q dq + C}} \left(\int \frac{q dq}{\sqrt{2\int Q dq + C}} + C'' \right) + C''':$$

l'intégrale serait par conséquent le résultat de l'élimination de q, entre les équations

$$x = \int \frac{dq}{\sqrt{2\int Q dq + C}} + C',$$

$$y = \int \frac{dq}{\sqrt{2\int Q dq + C}} \left(\int \frac{q dq}{\sqrt{2\int Q dq + C}} + C'' \right) + C''',$$

contenant quatre constantes arbitraires. On traiterait de même les équations analogues, dans les ordres plus élevés.

305. L'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = Y$, où Y désigne une fonction quelconque de y, est le cas le plus simple de la classe

d'équations qui nous occupe; il vient alors

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx}=Ydy,$$

$$\frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx^2}=\int Ydy+C, \text{ et } \frac{dy}{dx}=\sqrt{2\int Ydy+C}.$$

Si l'on applique ce procédé à l'équation particulière

$$d^2y\sqrt{ay}=dx^2,$$

on aura

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\sqrt{ay}}, \quad \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx}=\frac{dy}{\sqrt{ay}},$$

et

$$\frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{2}{a}\sqrt{ay}+C,$$

en intégrant. Changeant C en $\frac{2c}{\sqrt{a}}$, on tirerait de là

$$\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{4}{\sqrt{a}}(\sqrt{y}+c), \quad \frac{2dx}{\sqrt[4]{a}}=\frac{dy}{\sqrt{c+\sqrt{y}}};$$

faisant ensuite $c+\sqrt{y}=z$, il viendrait

$$\frac{dx}{\sqrt[4]{a}}=\frac{(z-c)dz}{\sqrt{z}}=(cz^{\frac{1}{2}}-cz^{-\frac{1}{2}})dz,$$

et enfin

$$\frac{x}{\sqrt[4]{a}}=\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}-2cz^{\frac{1}{2}}+c'=\frac{2}{3}(\sqrt{y}-2c)\sqrt{c+\sqrt{y}}+c'.$$

306. Les équations différentielles qui ne contiennent qu'une seule des variables primitives, s'abaissent au moins d'un ordre.

Cela est d'abord visible pour celles qui sont de la forme

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

x désignant la variable indépendante; car si l'on fait $\frac{dy}{dx} = p$, il vient

$$f\left(x, p, \frac{dp}{dx}, \ldots \frac{d^{n-1}p}{dx^{n-1}}\right) = 0,$$

équation qui n'est plus que de l'ordre $n-1$, par rapport aux variables x et p. Quand on pourra l'intégrer et en tirer p en x, ou bien x en p, on aura y par les formules

$$y = \int p dx + C, \quad \text{ou} \quad y = px - \int x dp + C.$$

Soit, par exemple, l'équation différentielle

$$\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx d^2y} = X,$$

X désignant une fonction donnée de x seul; cette équation se transforme en

$$\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}} dx}{dp} = X,$$

ou

$$\frac{dx}{X} = \frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

En intégrant il vient

$$\int \frac{dx}{X} + C = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}};$$

je représente $\int \frac{dx}{X} + C$ par V, et il en résulte

$$p = \frac{V}{\sqrt{1-V^2}}, \quad y = \int p dx + C' = \int \frac{V dx}{\sqrt{1-V^2}} + C'.$$

307. Si la fonction y entrait dans l'équation proposée, au lieu de la variable indépendante x, on ramènerait ce cas au précédent, en prenant dy constant, au lieu de dx (130).

On pourrait encore, si l'équation proposée n'était que du second ordre, chasser dx au moyen de sa valeur $\frac{dy}{p}$, tirée de l'équation $dy = pdx$, et l'on aurait ainsi

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{pdp}{dy};$$

la transformée ne renfermerait alors que p, dp, y et dy. Si elle pouvait s'intégrer, et qu'elle donnât p en y, on trouverait x par la formule $x = \int \frac{dy}{p}$, et par la formule $x = \frac{y}{p} + \int \frac{ydp}{p^2}$, lorsqu'on aurait y en p.

L'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = Y$, déjà traitée dans le n° 305, devient, par le procédé ci-dessus,

$$\frac{pdp}{dy} = Y, \quad \text{d'où} \quad p^2 = 2\int Y dy + C,$$

$$p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{2\int Y dy + C} \quad \text{et} \quad x = \int \frac{dy}{\sqrt{2\int Y dy + C}} + C'.$$

308. Parmi les équations différentielles qui contiennent en même temps les deux variables primitives, il faut remarquer celles qui sont homogènes entre la fonction y et ses différentielles, considérées comme des facteurs algébriques : une transformation très simple, faisant disparaître la fonction primitive y, les ramène au cas précédent.

Il suffit de poser $y = e^u$, d'où il résulte

$$dy = e^u du, \quad d^2y = e^u(d^2u + du^2),$$
$$d^3y = e^u(d^3u + 3du d^2u + du^3), \text{ etc.};$$

le facteur e^u, devenant alors commun à tous les termes de l'équation, disparaît, et il ne reste plus que les différentielles de u, avec x et dx.

Le cas le plus simple de ces équations est celui où y et ses différentielles ne passent pas le premier degré; il est représenté par la formule générale

$$d^n y + P d^{n-1} y dx + Q d^{n-2} y dx^2 \ldots\ldots + U y dx^n = 0.$$

Prenons pour exemple celle du troisième ordre

$$d^3y + P d^2y dx + Q dy dx^2 + U y dx^3 = 0;$$

les valeurs de y et de ses différentielles la réduiront à

$$\left.\begin{array}{l} d^3u + 3du d^2u + du^3 + P(d^2u + du^2)dx \\ \qquad + Q du dx^2 + U dx^3 \end{array}\right\} = 0,$$

qui s'abaisse au second ordre en posant $du = t dx$, d'où il résulte

$$d^2t + (3t + P)\, dt dx + (t^3 + Pt^2 + Qt + U)dx^2 = 0.$$

La forme de cette équation donne lieu à une remarque importante, savoir, que si les quantités P, Q et U étaient constantes, on pourrait supposer t constant; car en faisant $d^2t = 0$, $dt = 0$, il ne resterait pour déterminer t, que l'équation

$$t^3 + Pt^2 + Qt + U = 0$$

dont les coefficiens seraient des constantes.

Désignant donc par m_1, m_2, m_3, les trois racines de cette équation, on pourrait prendre successivement

$$t = m_1, \quad t = m_2, \quad t = m_3;$$

et comme

$$du = tdx \quad \text{donne} \quad u = \int t dx + c, \quad y = e^{\int t dx + c},$$

on aurait pour y, les trois valeurs

$$y_1 = e^{m_1 x + c_1}, \quad y_2 = e^{m_2 x + c_2}, \quad y_3 = e^{m_3 x + c_3},$$

qui reviennent à

$$y_1 = C_1 e^{m_1 x}, \quad y_2 = C_2 e^{m_2 x}, \quad y_3 = C_3 e^{m_3 x},$$

en prenant pour constantes arbitraires les quantités

309. Ce ne sont encore là que des valeurs particulières de la fonction y, puisqu'elles ne renferment qu'une constante; mais en les ajoutant, on forme l'intégrale primitive complète

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x}.$$

Non-seulement il est facile de s'assurer que cette expression de y satisfait à l'équation différentielle proposée; mais on peut établir à ce sujet une proposition générale, quels que soient les coefficiens P, Q et U, savoir: que si y_1, y_2, y_3 sont trois valeurs de y qui satisfassent chacune en particulier à cette équation, leur somme $y_1 + y_2 + y_3$, étant prise pour l'expression de y, satisfera également, et que si les fonctions y_1, y_2, y_3 ne contenaient pas des constantes arbitraires comme ci-dessus, on pourrait prendre

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3;$$

car en différentiant trois fois cette expression, substituant dans l'équation proposée, les valeurs de y, dy, d^2y, d^3y, et rassemblant tous les termes où entre la même constante, il vient

$$\left.\begin{aligned} &C_1(d^3y_1+Pd^2y_1dx+Qdy_1dx^2+Uy_1dx^3)\\ &+C_2(d^3y_2+Pd^2y_2dx+Qdy_2dx^2+Uy_2dx^3)\\ &+C_3(d^3y_3+Pd^2y_3dx+Qdy_3dx^2+Uy_3dx^3)\end{aligned}\right\}=0,$$

résultat dans lequel la fonction qui multiplie chaque constante est nulle par elle-même, puisqu'on a supposé que les fonctions y_1, y_2, y_3 satisfaisaient séparément à l'équation

$$d^3y+Pd^2ydx+Qdydx^2+Uydx^3=0.$$

On voit aisément que cette démonstration peut s'appliquer à l'équation d'un ordre quelconque

$$d^ny+Pd^{n-1}ydx+Qd^{n-2}ydx^2.....+Uydx^n=0,$$

et que par conséquent si l'on trouve n valeurs particulières,

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_n,$$

qui y satisfassent, on pourra poser

$$y=C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3.....+C_ny_n,$$

C_1, C_2, C_3,.....C_n désignant des constantes arbitraires.

Il est également visible que si les coefficiens P, Q,.....U sont constans, les valeurs de y s'obtiendront par la supposition de $y=e^{mx}$, m étant une constante, ce qui donne

$$dy=e^{mx}mdx,\ d^2y=e^{mx}m^2dx^2,.....d^ny=e^{mx}m^ndx^n,$$

et rendant divisible par $e^{mx}dx^n$, l'équation proposée, la réduit alors à

$$m^n+Pm^{n-1}+Qm^{n-2}.....+U=0.$$

Si l'on représente par m_1, m_2,.....m_n, les racines de celle-ci, on aura

$$y_1=e^{m_1x},\ y_2=e^{m_2x},.....y_n=e^{m_nx},$$

et par conséquent

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} \ldots\ldots + C_n e^{m_n x}.$$

310. Lorsque parmi les valeurs de m, il s'en trouve d'imaginaires, l'expression ci-dessus, qui ne cesse pas pour cela de vérifier l'équation différentielle proposée, a besoin d'être transformée en une autre, où il n'y ait que des quantités réelles, ce qui s'effectue au moyen des formules du n° 187.

Si m_1 et m_2, par exemple, désignent un groupe de racines imaginaires, elles seront de la forme

$$m_1 = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad m_2 = \alpha - \beta\sqrt{-1}$$

et fourniront dans l'expression générale de y une partie

$$C_1 e^{\alpha x + \beta x\sqrt{-1}} + C_2 e^{\alpha x - \beta x\sqrt{-1}}$$
$$= e^{\alpha x}(C_1 e^{\beta x\sqrt{-1}} + C_2 e^{-\beta x\sqrt{-1}});$$

mais, par l'article cité, on a

$$e^{\beta x\sqrt{-1}} = \cos\beta x + \sqrt{-1}\sin\beta x,$$
$$e^{-\beta x\sqrt{-1}} = \cos\beta x - \sqrt{-1}\sin\beta x;$$

ces valeurs, substituées dans l'expression précédente, la changent en

$$e^{\alpha x}\{(C_1 + C_2)\cos\beta x + (C_1 - C_2)\sqrt{-1}\sin\beta x\};$$

et, comme les constantes C_1 et C_2 disparaissent de l'équation différentielle, sans qu'il soit besoin de leur assigner aucune valeur, on peut leur en supposer une telle que les quantités $C_1 + C_2$ et $(C_1 - C_2)\sqrt{-1}$ soient réelles, et faire en conséquence

$$C_1 + C_2 = E_1, \quad (C_1 - C_2)\sqrt{-1} = E_2,$$

d'où il résultera, pour l'expression cherchée,

$$e^{\alpha x}\{E_1 \cos\beta x + E_2 \sin\beta x\},$$

valeur entièrement réelle.

On peut changer cette dernière de forme, en y posant

$$E_1 = p\sin q, \quad E_2 = p\cos q,$$

p et q étant de nouvelles quantités arbitraires; elle deviendra

$$e^{\alpha x}\{p\sin q\cos\beta x + p\cos q\sin\beta x\}$$
$$= pe^{\alpha x}\sin(q+\beta x).$$

On traiterait de la même manière les autres groupes de termes imaginaires que pourrait renfermer l'expression générale de y.

311. Si quelques-unes des racines m_1, m_2, etc. deviennent égales, cette expression perd de sa généralité; quand, par exemple, $m_1 = m_2$, les deux premiers termes, prenant la forme

$$C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_1 x} = (C_1 + C_2)e^{m_1 x},$$

se réunissent en un seul dont le coefficient $C_1 + C_2$ ne compte plus que pour une seule constante.

Des divers procédés qu'on a donnés pour parer à cet inconvénient, celui qu'a proposé d'Alembert me paraît encore le plus ingénieux et le plus simple : voici en quoi il consiste (*).

Au lieu de supposer que les racines m_1 et m_2 soient égales, on fait d'abord

$$m_2 = m_1 + h,$$

(*) Voyez d'ailleurs le Traité in-4°, t. III, p. 695.

ce qui donne

$$C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} = e^{m_1 x}(C_1 + C_2 e^{hx}) =$$
$$e^{m_1 x}\left[C_1 + C_2\left(1 + \frac{hx}{1} + \frac{h^2 x^2}{1.2} + \text{etc.}\right)\right],$$

en développant l'exponentielle e^{hx} (27); alors si l'on pose

$$C_1 + C_2 = E_1, \quad C_2 h = E_2,$$

il vient

$$e^{m_1 x}\left[E_1 + E_2 x + E_2 \frac{hx^2}{2} + \text{etc.}\right];$$

or, C_1 et C_2 étant arbitraires, E_1 et E_2 le seront pareillement, et l'expression $C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$ satisfaisant à l'équation différentielle proposée, indépendamment d'aucune valeur de C_1 et de C_2 (309), il en sera de même du développement ci-dessus, et des constantes E_1 et E_2, et cela, quelque petite que soit la quantité h. Si donc on suppose $h = 0$, l'expression ci-dessus, réduite à

$$e^{m_1 x}(E_1 + E_2 x)$$

et contenant deux constantes arbitraires irréductibles, satisfera encore à la proposée; mais ce cas répond précisément à $m_1 = m_2$.

De là, on passe aisément au cas où $m_1 = m_2 = m_3$; car en ne supposant d'abord que l'équation $m_1 = m_2$, on aura

$$y = e^{m_1 x}(E_1 + E_2 x) + C_3 e^{m_3 x} \ldots\ldots + C_n e^{m_n x},$$

et faisant en conséquence $m_3 = m_1 + h$, il viendra

$$e^{m_1 x}(E_1 + E_2 x) + C_3 e^{m_3 x} = e^{m_1 x}(E_1 + E_2 x + C_3 e^{hx});$$

que le développement de e^{hx} changera en

$$e^{m_1 x}\left(E_1 + C_3 + (E_2 + C_3 h)x + C_3\frac{h^2x^2}{2} + C_3\frac{h^3x^3}{2.3} + \text{etc.}\right),$$

et faisant

$$E_1 + C_3 = F_1, \quad E_2 + C_3 h = F_2, \quad \tfrac{1}{2} C_3 h^2 = F_3,$$

on aura l'expression

$$e^{m_1 x}\left(F_1 + F_2 x + F_3 x^2 + F_3\frac{hx^3}{3} + \text{etc.}\right),$$

satisfaisant encore à l'équation différentielle proposée, quelles que soient les constantes F_1, F_2, F_3, et quelque petite que soit h : en posant donc $h = \sigma$, il en résultera, pour le cas où $m_1 = m_2 = m_3$, l'expression

$$e^{m_1 x}(F_1 + F_2 x + F_3 x^2),$$

qui remplacera complètement la partie..... $C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x}$, et ainsi de suite, en quelque nombre que soient les valeurs égales de m.

312. L'équation différentielle proposée peut rarement s'intégrer lorsque les coefficiens sont variables; le cas suivant

$$\left.\begin{array}{l}(a+bx)^n \mathrm{d}^n y + P(a+bx)^{n-1}\mathrm{d}^{n-1}y\mathrm{d}x \\ + Q(a+bx)^{n-2}\mathrm{d}^{n-2}y\mathrm{d}x^2 \ldots\ldots + U y \mathrm{d}x^n\end{array}\right\} = 0,$$

où $P, Q, \ldots\ldots U$ désignent des constantes, est un des plus remarquables. Si l'on fait $a + bx = t$, d'où il suit $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{b}$, l'équation ci-dessus se change en

$$t^n \mathrm{d}^n y + \frac{P}{b} t^{n-1}\mathrm{d}^{n-1}y\mathrm{d}t + \frac{Q}{b^2} t^{n-2}\mathrm{d}^{n-2}y\mathrm{d}t^2 \ldots + \frac{U}{b^n} y \mathrm{d}t^n = 0,$$

à laquelle on satisfait en posant $y = t^m$, m étant un

exposant indéterminé; car dt étant constant ainsi que dx, la substitution de y et de ses différentielles rend l'équation ci-dessus divisible par $t^m dt^n$, et l'on a seulement

$$\left.\begin{aligned} &m(m-1)\ldots(m-n+1)+\frac{P}{b}m(m-1)\ldots(m-n+2)\\ &+\frac{Q}{b^2}m(m-1)\ldots(m-n+3)\ldots+\frac{U}{b^n}\end{aligned}\right\}=0,$$

qui détermine m, au moyen des constantes n, b, P, Q, $\ldots U$.

313. Il est facile d'appliquer ce qui précède à l'équation du second ordre

$$d^2y+Pdydx+Uydx^2=0,$$

et d'en tirer les résultats suivans, qu'il est utile de connaître.

1°. Si y_1 et y_2 sont deux valeurs qui satisfassent à cette équation, son intégrale complète est

$$y=C_1y_1+C_2y_2 \quad (309).$$

2°. Quand P et U sont constans, on a

$$y=C_1e^{m_1x}+C_2e^{m_2x},$$

m_1 et m_2 étant les racines de l'équation

$$m^2+Pm+U=0.$$

3°. Si ces racines sont imaginaires, il vient

$$y=pe^{\alpha x}\sin(q+\beta x) \quad (310).$$

4°. Si elles sont égales

$$y=e^{m_1x}(E_1+E_2x). \quad (311).$$

5°. Enfin l'équation

$$(a+bx)^2d^2y+(a+bx)Pdydx+Uydx^2=0,$$

se change en

$$t^2 d^2y + \frac{P}{b}\, t dy dt + \frac{U}{b^2} y dt^2 = 0,$$

lorsqu'on fait $a + bx = t$, et dépend de

$$m(m-1) + \frac{P}{b}\, m + \frac{U}{b^2} = 0 \quad (312)$$

ce qui revient à

$$m^2 + \left(\frac{P}{b} - 1\right) m + \frac{U}{b^2} = 0;$$

ainsi son intégrale est

$$y = C_1 t^{m_1} + C_2 t^{m_2} = C_1 (a+bx)^{m_1} + C_2 (a+bx)^{m_2},$$

m_1 et m_2 étant les deux valeurs de m.

314. L'équation

$$d^n y + P d^{n-1} y dx + Q d^{n-2} y dx^2 \ldots + U y dx^n = 0 \quad (1),$$

n'est qu'un cas particulier de l'équation différentielle de l'ordre n et du premier degré; car celle-ci, pour être générale, doit contenir un terme indépendant de y, et avoir par conséquent la forme

$$d^n y + P d^{n-1} y dx + Q d^{n-2} y dx^2 \ldots + U y dx^n = V dx^n \quad (2);$$

mais l'intégration de cette dernière se ramène facilement à celle de la première : on l'a déjà vu pour le premier ordre, dans le n° 285; et dans un ordre quelconque, *il suffit de connaître un nombre n de valeurs particulières de* y, *satisfaisant à l'équation* (1), *pour parvenir à l'intégrale complète de l'équation* (2).

Lagrange, qui a découvert cet important théorème, l'a prouvé en étendant à l'équation (2), par la variation des quantités C_1, C_2, ... C_n, l'expression générale de y relative à l'équation (1).

Pour fixer les idées, je prends l'équation proposée du troisième ordre seulement : il vient $y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3$, expression dans laquelle il faut déterminer C_1, C_2 et C_3, de manière qu'elle satisfasse à

$$d^3y + Pd^2ydx + Qdydx^2 + Uydx^3 = Vdx^3.$$

Si l'on forme successivement les valeurs de dy, d^2y et d^3y, en traitant C_1, C_2, C_3, comme variables, on trouvera d'abord

$$dy = C_1dy_1 + C_2dy_2 + C_3dy_3 + y_1dC_1 + y_2dC_2 + y_3dC_3;$$

mais comme on a trois quantités à déterminer, et que la question proposée n'offre qu'une condition, on en peut choisir deux autres à volonté, et faire en conséquence

$$y_1dC_1 + y_2dC_2 + y_3dC_3 = 0$$

ce qui donnera

$$dy = C_1dy_1 + C_2dy_2 + C_3dy_3$$

comme si les quantités C_1, C_2 et C_3 n'avaient pas varié. En différentiant cette valeur, il viendra

$$d^2y = C_1d^2y_1 + C_2d^2y_2 + C_3d^2y_3 + dy_1dC_1 + dy_2dC_2 + dy_3dC_3;$$

posant encore

$$dy_1dC_1 + dy_2dC_2 + dy_3dC_3 = 0,$$

il restera

$$d^2y = C_1d^2y_1 + C_2d^2y_2 + C_3d^2y_3,$$

d'où l'on tirera

$$d^3y = C_1d^3y_1 + C_2d^3y_2 + C_3d^3y_3 + d^2y_1dC_1 + d^2y_2dC_2 + d^2y_3dC_3.$$

Par la substitution des valeurs de y, dy, d^2y et d^3y, l'équation proposée deviendra

$$\left.\begin{array}{l} C_1(d^3y_1+Pd^2y_1dx+Qdy_1dx^2+Uy_1dx^3) \\ +\ C_2(d^3y_2+Pd^2y_2dx+Qdy_2dx^2+Uy_2dx^3) \\ +\ C_3(d^3y_3+Pd^2y_3dx+Qdy_3dx^2+Uy_3dx^3) \\ +\ d^2y_1dC_1+d^2y_2dC_2+d^2y_3dC_3 \end{array}\right\} = Vdx^3,$$

ce qui se réduit à

$$d^2y_1dC_1 + d^2y_2dC_2 + d^2y_3dC_3 = Vdx^3,$$

quand les fonctions y_1, y_2, y_3 satisfont à l'équation

$$d^3y + Pd^2ydx + Qdydx^2 + Uydx^3 = 0 :$$

il existera donc entre les différentielles dC_1, dC_2 et dC_3, les trois équations

$$\begin{aligned} y_1dC_1 + y_2dC_2 + y_3dC_3 &= 0, \\ dy_1dC_1 + dy_2dC_2 + dy_3dC_3 &= 0, \\ d^2y_1dC_1 + d^2y_2dC_2 + d^2y_3dC_3 &= Vdx, \end{aligned}$$

d'où l'on tirera les valeurs de chacune de ces différentielles, exprimées en x et en dx, lorsque les fonctions y_1, y_2, y_3 seront connues. Les résultats ayant la forme

$$dC_1 = X_1dx, \quad dC_2 = X_2dx, \quad dC_3 = X_3dx,$$

on en déduira

$$C_1 = \int X_1dx + c_1, \quad C_2 = \int X_2dx + c_2, \quad C_3 = \int X_3dx + c_3,$$

et par conséquent

$$y = y_1(\int X_1dx + c_1) + y_2(\int X_2dx + c_2) + y_3(\int X_3dx + c_3),$$

sera l'intégrale complète de l'équation proposée.

Si l'on ne connaissait que deux valeurs particulières de y, la proposée ne pourrait s'intégrer qu'avec le secours d'une équation du second ordre, réductible au premier. En effet, on aurait alors

$$y = C_1y_1 + C_2y_2; \quad dy = C_1dy_1 + C_2dy_2,$$

en faisant

$$y_1 dC_1 + y_2 dC_2 = 0;$$

mais puisqu'on ne pourrait disposer que d'une seule des quantités C_1 et C_2, il faudrait employer le développement complet de d^2y, qui serait

$$d^2y = C_1 d^2y_1 + C_2 d^2y_2 + dy_1 dC_1 + dy_2 dC_2,$$

et qui donnerait

$$d^3y = C_1 d^3y_1 + C_2 d^3y_2 + 2d^2y_1 dC_1 + 2d^2y_2 dC_2 + dy_1 d^2C_1 + dy_2 d^2C_2.$$

Substituant dans la proposée, et réduisant de la même manière que ci-dessus, on obtiendrait

$$\left.\begin{array}{l} dy_1 d^2C_1 + dy_2 d^2C_2 + 2d^2y_1 dC_1 + 2d^2y_2 dC_2 \\ \qquad + P dy_1 dC_1 dx + P dy_2 dC_2 dx \end{array}\right\} = V dx^3,$$

équation de laquelle on chassera dC_2 et d^2C_2, en tirant leurs valeurs de l'équation $y_1 dC_1 + y_2 dC_2 = 0$ et de sa différentielle; la résultante ne contenant que d^2C_1, dC_1 et des fonctions de x, se ramènera au premier ordre (306).

Enfin, lorsqu'on n'aura qu'une seule valeur de y, on tombera sur une équation auxiliaire du troisième ordre, réductible au second; c'est ce dont il est facile de se convaincre, en mettant dans la proposée,

$$\begin{array}{l} C_1 y_1, \quad C_1 dy_1 + y_1 dC_1, \quad C_1 d^2y_1 + 2dy_1 dC_1 + y_1 d^2C_1, \\ C_1 d^3y_1 + 3d^2y_1 dC_1 + 3dy_1 d^2C_1 + y_1 d^3C_1, \end{array}$$

au lieu de

$$y, \quad dy, \quad d^2y \text{ et } d^3y:$$

l'équation formée par ces substitutions sera réduite à

$$\left.\begin{array}{l} y_1 d^3C_1 + 3dy_1 d^2C_1 + 3d^2y_1 dC_1 \\ \quad + Py_1 d^2C_1 dx + 2Pdy_1 dC_1 dx \\ \qquad + Qy_1 dC_1 dx^2 \end{array}\right\} = V dx^3.$$

Si dans les calculs précédens l'on suppose $V=0$, ils montreront comment, avec deux, ou seulement une valeur particulière de la fonction y, on peut parvenir à son expression générale, dans l'équation

$$d^3y + Pd^2ydx + Qdydx^2 + Uydx^3 = 0;$$

et de là résulte, pour toutes les équations différentielles du premier degré, le théorème suivant :

Si l'on a n valeurs particulières de y, *pour l'équation* (1), *on en déduira immédiatement l'expression générale de cette fonction pour les équations* (1) *et* (2); *et dans le cas où l'on ne connaîtrait que* n — 1 *valeurs particulières, on parviendrait encore à la même expression, en intégrant une équation du premier degré et du premier ordre.*

315. Je prendrai pour exemple l'équation du second ordre

$$d^2y + Pdydx + Uydx^2 = Vdx^2.$$

En désignant d'abord par y_1, y_2, les valeurs particulières de y qui satisfont à l'équation

$$d^2y + Pdydx + Uydx^2 = 0,$$

l'intégrale complète de la proposée sera

$$y = C_1y_1 + C_2y_2,$$

C_1 et C_2 étant déterminés par les équations

$$y_1dC_1 + y_2dC_2 = 0,$$
$$dy_1dC_1 + dy_2dC_2 = Vdx^2 \text{ (n° précédent)}.$$

Maintenant si l'on suppose que les coefficiens P et U soient constans, V demeurant une fonction quelconque de x, on aura

$$y_1 = e^{m_1x}, \quad y_2 = e^{m_2x} \quad (313),$$

et par conséquent

$$e^{m_1 x}\mathrm{d}C_1 + e^{m_2 x}\mathrm{d}C_2 = 0,$$
$$e^{m_1 x}m_1\mathrm{d}C_1 + e^{m_2 x}m_2\mathrm{d}C_2 = V\mathrm{d}x,$$

d'où l'on déduira

$$\mathrm{d}C_1 = \frac{Ve^{-m_1 x}\mathrm{d}x}{m_1 - m_2},\quad \mathrm{d}C_2 = \frac{Ve^{-m_2 x}\mathrm{d}x}{m_2 - m_1},$$

puis

$$C_1 = E_1 + \frac{\int Ve^{-m_1 x}\mathrm{d}x}{m_1 - m_2},\quad C_2 = E_2 + \frac{\int Ve^{-m_2 x}\mathrm{d}x}{m_2 - m_1},$$

et enfin

$$y = \frac{e^{m_1 x}(E_1 + \int Ve^{-m_1 x}\mathrm{d}x) - e^{m_2 x}(E_2 + \int Ve^{-m_2 x}\mathrm{d}x)}{m_1 - m_2},$$

en donnant aux constantes arbitraires E_1, E_2, le diviseur commun $m_1 - m_2$, ce qui revient à

$$y = \frac{e^{m_1 x}\int Ve^{-m_1 x}\mathrm{d}x - e^{m_2 x}\int Ve^{-m_2 x}\mathrm{d}x}{m_1 - m_2},$$

en concevant que chaque intégrale comprenne implicitement sa constante arbitraire.

316. Cette formule est soumise aux circonstances qui naissent de la nature des valeurs de m_1 et m_2 (310, 311).

On pourrait en restreindre l'emploi au cas où les quantités m_1, m_2 sont réelles et inégales, et former immédiatement des expressions de y, pour chacun des deux autres, en employant les valeurs de y_1 et y_2 particulières à ce cas. Par exemple, lorsque m_1 et m_2 sont imaginaires, on tirera de la valeur complète

$$y = e^{\alpha x}(E_1 \cos\beta x + E_2 \sin\beta x),$$

trouvée dans le n° 310, les valeurs particulières

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

avec lesquelles il serait facile d'obtenir l'intégrale complète de l'équation proposée; mais il est peut-être plus simple d'opérer immédiatement sur la formule du n° précédent, la transformation propre à en faire disparaître les imaginaires, c'est-à-dire d'y changer

$$m_1 \text{ en } \alpha+\beta\sqrt{-1}, \quad m_2 \text{ en } \alpha-\beta\sqrt{-1},$$

et de remplacer ensuite les exponentielles imaginaires, par leur expression en sinus et cosinus. Par ces substitutions, on a d'abord

$$y = \frac{1}{2\beta\sqrt{-1}}\Big\{e^{\alpha x+\beta x\sqrt{-1}}\int V e^{-\alpha x-\beta x\sqrt{-1}}dx - e^{\alpha x-\beta x\sqrt{-1}}\int V e^{-\alpha x+\beta x\sqrt{-1}}dx\Big\} =$$

$$\frac{e^{\alpha x}}{2\beta\sqrt{-1}}\Big\{(\cos\beta x+\sqrt{-1}\sin\beta x)\int V e^{-\alpha x}(\cos\beta x-\sqrt{-1}\sin\beta x)dx - (\cos\beta x-\sqrt{-1}\sin\beta x)\int V e^{-\alpha x}(\cos\beta x+\sqrt{-1}\sin\beta x)dx\Big\};$$

puis en effectuant les multiplications indiquées, séparant les intégrales en monomes, et réduisant, le facteur $2\sqrt{-1}$ devient commun aux deux termes de la fraction, et l'on arrive à l'expression réelle

$$y = \frac{e^{\alpha x}}{\beta}\Big\{\sin\beta x\int V e^{-\alpha x}dx\cos\beta x - \cos\beta x\int V e^{-\alpha x}dx\sin\beta x\Big\}.$$

Si V était nul, il faudrait mettre une constante arbitraire à la place de chaque intégrale, et l'on aurait seulement

$$y = \frac{e^{\alpha x}}{\beta}\left\{E_1 \sin \beta x - E_2 \cos \beta x\right\},$$

ce qui rentre dans le résultat du n° 310.

On rencontre fréquemment, dans les applications de l'Analyse à la Physique céleste, l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2 y = V,$$

pour laquelle

$$m = \pm a\sqrt{-1} \quad (313),$$

d'où

$$\alpha = 0, \quad \beta = a,$$

et

$$y = p \sin ax + q \cos ax + \frac{\sin ax \int V dx \cos ax - \cos ax \int V dx \sin ax}{a},$$

en restituant les constantes arbitraires. La fonction V a ordinairement la forme

$$A + B \cos \beta x + C \cos \gamma x + \text{etc.},$$

A, B, C, etc., β, γ, etc. désignant des coefficiens constans, et les intégrations indiquées s'effectuent par le procédé du n° 218.

317. L'égalité des racines m_1 et m_2 réduisant à $\frac{0}{0}$ l'expression

$$y = \frac{e^{m_1 x} \int V e^{-m_1 x} dx - e^{m_2 x} \int V e^{-m_2 x} dx}{m_1 - m_2},$$

il suffit, pour en obtenir la vraie valeur, de différentier par rapport à m_1 son numérateur et son dénominateur, en observant pour les intégrales la règle du

n° 281, et il vient

$$y = e^{m_1 x}(x\int Ve^{-m_1 x}dx - \int Ve^{-m_1 x}x dx).$$

Cette dernière expression comprend celle du n° 311 ; car lorsque $V = 0$, les intégrales se réduisant à leur constante arbitraire, il vient seulement

$$y = e^{m_1 x}(E_1 x - E_2).$$

318. Si l'on a un nombre m d'équations différentielles renfermant un nombre $m+1$ de variables, une seule de ces variables sera indépendante, et les m autres en seront des fonctions. Supposons d'abord que ces fonctions et leurs coefficiens différentiels ne s'élèvent pas au-delà de la première puissance, dans les équations proposées, qui sont alors du premier degré : la méthode indiquée au n° 133, conduirait, dans ce cas, à une équation différentielle du premier degré entre l'une des fonctions à déterminer et la variable que l'on regarde comme indépendante ; mais on peut quelquefois éviter les calculs de l'élimination, en intégrant conjointement les équations proposées.

Lorsqu'elles ne sont que du premier ordre et qu'elles ne renferment que trois variables, ces équations peuvent être représentées par

$$\begin{aligned} M\mathrm{d}u + N\mathrm{d}x + (Pu + Qx)\,\mathrm{d}t &= R\mathrm{d}t, \\ M'\mathrm{d}u + N'\mathrm{d}x + (P'u + Q'x)\,\mathrm{d}t &= R'\mathrm{d}t; \end{aligned}$$

mais si l'on en chasse alternativement $\mathrm{d}u$ et $\mathrm{d}x$, et qu'on dégage de son coefficient celle de ces différentielles que l'on conserve, les équations résultantes prendront la forme

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u + (Pu + Qx)\mathrm{d}t &= T\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}x + (P'u + Q'x)\mathrm{d}t &= T'\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

P, Q, T, P', etc. représentant de nouvelles fonctions de t, dérivées des premières par la suite des opérations indiquées. C'est sous cette dernière forme que d'Alembert a traité les équations différentielles simultanées, par une méthode très ingénieuse, que je vais exposer comme l'a présentée M. Ampère.

En multipliant la seconde équation par un facteur θ, et ajoutant le produit à la première, il vient

$$du+\theta dx+[(P+P'\theta)u+(Q+Q'\theta)x]\,dt=(T+T'\theta)dt;$$

faisant ensuite $u+\theta x=z$, on aura

$$du+\theta dx=dz-xd\theta,\quad u=z-\theta x,$$

et par ces valeurs, la transformée ci-dessus deviendra

$$\left.\begin{aligned}&dz+(P+P'\theta)z\,dt\\ -x\{&d\theta+[(P+P'\theta)\theta-(Q+Q'\theta)]dt\}\end{aligned}\right\}=(T+T'\theta)dt;$$

enfin égalant à zéro le multiplicateur de x, on partagera l'équation ci-dessus en deux autres,

$$dz+(P+P'\theta)z\,dt=(T+T'\theta)dt \qquad (a),$$
$$d\theta+[(P+P'\theta)\theta-(Q+Q'\theta)]dt=0 \qquad (b),$$

dont la dernière ne renferme plus que les deux variables θ et t. Lorsqu'on pourra trouver une valeur de θ satisfaisant à celle-ci, on réduira, par son moyen, la première à ne contenir que les deux variables z et t; et n'étant d'ailleurs que du premier degré, elle s'intégrera complètement par la formule du n° 285.

Quand les coefficiens P, P', Q et Q' sont constans, on peut faire

$$d\theta=0,\quad (P+P'\theta)\theta-(Q+Q'\theta)=0;$$

θ est alors déterminé par une équation du second degré, dont je désignerai les racines par θ_1 et θ_2.

Dans la même hypothèse, l'équation (a), en y faisant,

pour abréger,

$$P + P'\theta = m, \quad T + T'\theta = V,$$

a pour intégrale l'équation

$$z = e^{-mt}(\int e^{mt} V\,dt + C),$$

d'où l'on tire les deux suivantes,

$$u + \theta_1 x = e^{-m_1 t}(\int e^{m_1 t} V_1\,dt + C_1),$$
$$u + \theta_2 x = e^{-m_2 t}(\int e^{m_2 t} V_2\,dt + C_2),$$

lorsqu'on y met successivement les deux valeurs de θ : le problème est donc complètement résolu, puisqu'on a, entre les variables u, x et t, deux équations primitives renfermant chacune une constante arbitraire.

319. Passons au système d'équations à quatre variables, auquel on peut toujours donner la forme

$$du + (Pu + Qx + Ry)dt = T dt,$$
$$dx + (P'u + Q'x + R'y)dt = T' dt,$$
$$dy + (P''u + Q''x + R''y)dt = T'' dt.$$

Si l'on multiplie la seconde par θ, la troisième par θ', qu'on ajoute les produits à la première, et que l'on fasse

$$u + \theta x + \theta' y = z,$$

d'où il suit

$$du + \theta dx + \theta' dy = dz - x d\theta - y d\theta',$$
$$u = z - \theta x - \theta' y,$$

et qu'après la substitution de ces valeurs, on rassemble, pour les égaler à zéro, les termes affectés de x et de y, l'équation ci-dessus se partagera dans les trois suivantes,

$$dz + (P + P'\theta + P''\theta')z\,dt = (T + T'\theta + T''\theta')dt \qquad (a),$$
$$d\theta + [(P + P'\theta + P''\theta')\theta - (Q + Q'\theta + Q''\theta')]dt = 0 \qquad (b),$$
$$d\theta' + [(P + P'\theta + P''\theta')\theta' - (R + R'\theta + R''\theta')]dt = 0 \qquad (b');$$

et lorsqu'on pourra trouver les valeurs de θ et de θ' qui satisfont aux équations (b) et (b'), l'équation (a) réduite aux variables z et t, s'intégrera encore comme dans le n° précédent.

En se bornant au cas où les coefficiens des fonctions u, x et y sont des constantes, on peut supposer $d\theta = o$, $d\theta' = o$; il en résultera

$$(P + P'\theta + P''\theta')\theta - (Q + Q'\theta + Q''\theta') = o,$$
$$(P + P'\theta + P''\theta')\theta' - (R + R'\theta + R''\theta') = o;$$

et si l'on fait $P + P'\theta + P''\theta' = m$, les équations ci-dessus, devenant

$$(m - Q')\theta - Q''\theta' = Q,$$
$$(m - R'')\theta' - R'\theta = R,$$

donneront pour θ et θ', des valeurs qui, substituées dans l'expression de m, conduiront à une équation finale, où cette inconnue montera au troisième degré. Chacune de ses valeurs en fournissant une pour les facteurs θ, θ', si l'on distingue celles-ci par des indices inférieurs, et qu'on fasse $T + T'\theta + T''\theta' = V$, on aura les trois systèmes de quantités

$$\theta_1, \theta'_1, m_1, V_1, \quad \theta_2, \theta'_2, m_2, V_2, \quad \theta_3, \theta'_3, m_3, V_3,$$

dont la substitution dans $z = e^{-mt}\{\int e^{mt} V dt + C\}$, intégrale de l'équation (a), donnera les trois équations primitives

$$u + \theta_1 x + \theta'_1 y = e^{-m_1 t}(\int e^{m_1 t} V_1 dt + C_1),$$
$$u + \theta_2 x + \theta'_2 y = e^{-m_2 t}(\int e^{m_2 t} V_2 dt + C_2),$$
$$u + \theta_3 x + \theta'_3 y = e^{-m_3 t}(\int e^{m_3 t} V_3 dt + C_3).$$

On peut maintenant étendre ce procédé à tel nombre d'équations que l'on voudra. Pour en compléter l'exposition, il faudrait examiner les cas où les valeurs

de θ, θ' deviennent imaginaires ou bien égales entre elles; mais ces détails, qui tiendraient trop de place, sont faciles à suppléer, par ce qu'on a vu dans les n°s 310, 311.

320. D'Alembert applique aussi son procédé aux équations du premier degré d'un ordre quelconque, et pour cela il les ramène au premier ordre, de la manière suivante.

Ayant, par exemple, deux équations de la forme

$$d^2u + (A du + B dx)dt + (Cu + Dx)dt^2 = T dt^2,$$
$$d^2x + (A' du + B' dx)dt + (C'u + D'x)dt^2 = T' dt^2,$$

il fait $du = p dt$, $dx = q dt$; et il a par conséquent, entre les cinq variables p, q, t, u et x, les quatre équations du premier ordre

$$dp + (Ap + Bq + Cu + Dx)dt = T dt,$$
$$dq + (A'p + B'q + C'u + D'x)dt = T' dt,$$
$$du - p dt = 0,$$
$$dx - q dt = 0;$$

qui peuvent se traiter par la méthode du n° précédent.

Il s'est servi du même artifice pour les équations qui ne contiennent que deux variables; mais le procédé du n° 314 est plus simple et plus élégant.

321. Considérons maintenant les équations du premier ordre,

$$dy - \alpha dx = 0, \qquad dz - \beta dx = 0,$$

dans lesquelles α et β sont des fonctions quelconques des trois variables x, y, z: voici comment on peut y appliquer le procédé du n° 133.

On différentie la première, et il vient

$$d^2y - \frac{d\alpha}{dx} dx^2 - \frac{d\alpha}{dy} dx dy - \frac{d\alpha}{dz} dx dz = 0;$$

mettant pour dz sa valeur βdx, on obtient

$$d^2y - \left(\frac{d\alpha}{dx} + \beta\frac{d\alpha}{dz}\right)dx^2 - \frac{d\alpha}{dy}dxdy = 0;$$

éliminant ensuite z, au moyen de l'équation

$$dy - \alpha dx = 0,$$

on parvient à une résultante en x et y, du second ordre, et qui a nécessairement une intégrale primitive avec deux constantes arbitraires a et b (298).

Soient

$$\psi(x, y, a, b) = 0 \quad \text{et} \quad dy = mdx$$

cette intégrale et la valeur de dy qu'on en tirera; en substituant celle-ci dans $dy - \alpha dx = 0$, on aura une seconde équation primitive $m - \alpha = 0$, entre x, y et z, en sorte que les équations différentielles proposées seront vérifiées par le système des équations primitives

$$\psi(x, y, a, b) = 0, \quad m - \alpha = 0,$$

et par toutes celles qui seront équivalentes à ces dernières.

Cela posé, on va voir qu'il existe toujours au moins deux systèmes de facteurs, au moyen desquels on déduit des équations proposées, deux différentielles exactes. En effet, si des équations primitives indiquées ci-dessus, on élimine alternativement les constantes a et b, et que les résultats soient mis sous la forme

$$M = a, \quad N = b,$$

leurs différentielles

$$\frac{dM}{dx}dx + \frac{dM}{dy}dy + \frac{dM}{dz}dz = 0,$$
$$\frac{dN}{dx}dx + \frac{dN}{dy}dy + \frac{dN}{dz}dz = 0,$$

devant être vérifiées par les valeurs

$$dy = \alpha dx, \quad dz = \beta dx,$$

tirées des proposées, il s'ensuit que

$$\frac{dM}{dx} + \frac{dM}{dy}\alpha + \frac{dM}{dz}\beta = 0,$$
$$\frac{dN}{dx} + \frac{dN}{dy}\alpha + \frac{dN}{dz}\beta = 0,$$

sont des quantités identiquement nulles; on a donc

$$\frac{dM}{dx} = -\frac{dM}{dy}\alpha - \frac{dM}{dz}\beta,$$
$$\frac{dN}{dx} = -\frac{dN}{dy}\alpha - \frac{dN}{dz}\beta,$$

et mettant ces valeurs dans les différentielles de M et N, ce qui ne les change point, on obtient les différentielles exactes

$$\frac{dM}{dy}(dy - \alpha dx) + \frac{dM}{dz}(dz - \beta dx) = 0,$$
$$\frac{dN}{dy}(dy - \alpha dx) + \frac{dN}{dz}(dz - \beta dx) = 0,$$

comprenant les produits des équations proposées multipliées respectivement par les facteurs

$$\frac{dM}{dy} \text{ et } \frac{dM}{dz}; \quad \frac{dN}{dy} \text{ et } \frac{dN}{dz}.$$

On conçoit aisément qu'il y a des théorèmes analogues, pour les équations dans lesquelles le nombre de variables surpasse trois.

Des solutions particulières des équations différentielles du premier ordre.

322. Dans le n° 297 il s'est présenté, pour une équation différentielle, une *solution particulière* qui ne dé-

rivait pas de l'intégrale complète, et l'on peut quelquefois tomber sur des équations primitives, sans constantes arbitraires, et vérifiant une équation différentielle dont on ne connaît pas l'intégrale complète : ces deux circonstances font naître les questions suivantes : *d'où viennent les solutions particulières ?* et *comment distinguer si une équation primitive qui satisfait à une équation différentielle proposée, dérive ou non de son intégrale ?* c'est ce dont je vais m'occuper.

La relation qui existe entre une équation différentielle et son intégrale, est telle que cette dernière équivaut à un nombre infini d'équations primitives, qu'on obtiendrait en donnant successivement à la constante arbitraire toutes les valeurs possibles, et dont chacune satisferait à l'équation différentielle (53). On désigne ces diverses équations primitives sous le nom d'*intégrales particulières*, puisque ce sont des cas particuliers de l'intégrale complète. Les *solutions particulières*, dont le nombre est toujours limité, sont des équations primitives essentiellement différentes des intégrales particulières. Ces solutions sont de deux sortes; les unes ne sont autre chose que des facteurs de l'équation différentielle proposée, dans lesquels dx et dy n'entrent point, qui par conséquent étant égalés à zéro, donnent des équations primitives établissant, entre x et y, des relations qui rendent la proposée identique. En cherchant les diviseurs communs des fonctions M et N, on trouvera les solutions de cette espèce, dont est susceptible l'équation

$$M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y = 0.$$

La seconde espèce de solutions particulières, dont l'équation $y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = n\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$ (297) a fourni

un exemple, est liée intimement à l'équation différentielle dont elle dérive, quoiqu'elle ne puisse rentrer dans aucun des cas de l'intégrale complète, quelque valeur que l'on donne à la constante arbitraire, ainsi qu'il est facile de le voir, en comparant les équations $y = cx + n\sqrt{1+c^2}$ et $x^2 + y^2 = n^2$.

Voici la théorie que Lagrange, en 1774, donna de ces dernières solutions, regardées avant lui comme formant un paradoxe dans le Calcul intégral (*).

323. Les solutions particulières, sans être comprises implicitement dans l'intégrale complète, peuvent néanmoins s'en déduire, en cessant de regarder la constante arbitraire comme invariable. En effet, soit $U=0$, une équation primitive renfermant les variables x, y, et une constante c; l'équation différentielle correspondante, que je désignerai par $V=0$, sera le résultat de l'élimination de cette constante, entre les équations $U=0$, $\frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy = 0$ (53); mais si l'on suppose que c soit une fonction quelconque de x, on donnera à l'équation $U=0$ une extention telle qu'elle pourra représenter une équation quelconque à deux variables, et par conséquent aussi toutes les solutions particulières de l'équation $V=0$. Cela posé, la valeur que l'équation $U=0$ donne pour y et sa différentielle

(*) Il les appela *intégrales particulières*, et donna le nom de solutions particulières aux différens cas de l'intégrale complète. Laplace, qui s'est occupé avec succès du même sujet avant Lagrange, emploie ces dénominations dans un sens inverse, et je l'ai suivi. Il m'a semblé que les équations primitives, qui résolvent les équations différentielles sans être comprises dans leur intégrale complète, ne s'obtenant point par les procédés de l'intégration, ne devaient pas porter un nom qui rappelle ces procédés.

que je représenterai par $dy = p dx$, vérifiant indépendamment de c, l'équation $V = o$, on pourrait supposer c variable, pourvu que la loi de sa variation fût telle qu'on eût toujours $dy = p dx$. Or, quoiqu'en regardant c comme variable aussi bien que x, il vienne en général $dy = p dx + q dc$, p et q étant des fonctions de x et de c, on aura néanmoins $dy = p dx$ seulement, si $q = o$: déterminant donc c par cette dernière équation, et substituant dans $U = o$ la valeur qu'on trouvera, le résultat satisfera encore à l'équation différentielle $V = o$.

Dans ce qui précède, y a été regardé comme une fonction de x et de c; en considérant à son tour x comme une fonction de y et de c, on aura $dx = m dy$, et raisonnant comme ci-dessus, on trouvera que, si la valeur de dx, prise en faisant varier c, est $dx = m dy + n dc$; l'équation résultante de l'élimination de c, entre $n = o$ et $U = o$, satisfera aussi à l'équation différentielle $V = o$.

On peut comprendre ces deux procédés dans un seul, en faisant évanouir les dénominateurs dans l'équation $\frac{dU}{dx} dx + \frac{dU}{dy} dy + \frac{dU}{dc} dc = o$, différentielle de $U = o$, prise en supposant c variable avec x et y. Elle aura alors la forme

$$M dx + N dy + P dc = o ;$$

on en tirera

$$dy = -\frac{M}{N} dx - \frac{P}{N} dc, \quad dx = -\frac{N}{M} dy - \frac{P}{M} dc ;$$

et si les fonctions entières M, N sont algébriques, ou, quoique transcendantes, ne peuvent pas devenir infinies par quelque valeur de c, le coefficient de dc ne disparaîtra que par la supposition de $P = o$, qui donnera

ainsi tout ce qu'on peut tirer des opérations indiquées ci-dessus.

Les équations auxquelles ces procédés conduisent, ne sont pas nécessairement des solutions particulières de l'équation $V=0$; mais pour ne pas se tromper sur cela, il faut examiner les diverses circonstances que peut offrir l'équation $P=0$.

Il est d'abord évident que si cette équation donne à c une valeur constante, elle ne conduira qu'à une intégrale particulière; mais si cette valeur est variable, on ne devra pas en conclure tout de suite que le résultat de l'élimination de c entre $P=0$ et $U=0$, sera nécessairement une solution particulière; car il pourra encore arriver que l'équation résultante ne soit qu'un cas particulier de $U=0$. Pour le reconnaître, il faut éliminer une des variables entre cette nouvelle équation et $U=0$. Si l'on peut faire disparaître l'autre variable, en déterminant c par des constantes seulement, on n'a obtenu qu'une intégrale particulière; et si l'on trouvait $c=\frac{0}{0}$, il en faudrait conclure que l'équation $P=0$ est un facteur de $U=0$, indépendant de la constante c, et par conséquent étranger à l'équation différentielle $V=0$.

Quand c n'est qu'au premier degré dans U, il n'entre point dans P, qui ne contient alors que les variables x et y; l'équation $P=0$ satisfait elle-même à $V=0$, parce que $U=0$ étant de la forme $Q+cP=0$, $V=0$ revient à $P\mathrm{d}Q-Q\mathrm{d}P=0$; mais il est aisé de voir que $P=0$ n'est qu'une intégrale particulière correspondante à $c=$ infini.

324. J'appliquerai d'abord cette théorie à l'équation $y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=n\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$, ayant pour intégrale

complète $y - cx = n\sqrt{1+c^2}$ (297). En faisant varier c en même temps que x et y, et réduisant tous les termes au même dénominateur, on a

$$cdx\sqrt{1+c^2} - dy\sqrt{1+c^2} + (x\sqrt{1+c^2} + nc)dc = 0;$$

égalant à zéro le coefficient de dc, il vient

$$x\sqrt{1+c^2} + nc = 0,$$

d'où l'on tire $c = \frac{x}{\sqrt{n^2 - x^2}}$, valeur qui change l'équation $y - cx = n\sqrt{1+c^2}$ en $x^2 + y^2 = n^2$, et donne la solution particulière obtenue dans le n° cité.

Toutes les équations de la forme $y = px + P$ (297), dans laquelle se trouve comprise la précédente, ont aussi une solution particulière analogue. Leur intégrale complète, représentée par $y = cx + C$, C étant composé en c, comme P l'est en p, donne

$$cdx - dy + \left(x + \frac{dC}{dc}\right)dc = 0;$$

et posant $x + \frac{dC}{dc} = 0$, on en tire la valeur de c, d'où dépend la solution particulière. Cette solution particulière s'est montrée lorsqu'on a intégré l'équation... $y = px + P$; car en la différentiant on est parvenu à une équation composée des deux facteurs

$$x + \frac{dP}{dp} = 0, \quad dp = 0,$$

et le résultat de l'élimination de p entre

$$y = px + P \text{ et } x + \frac{dP}{dp} = 0,$$

est le même que celui de l'élimination de c, entre

$$y = cx + C, \text{ et } x + \frac{dC}{dc} = 0.$$

Les équations $y = px + P$ ont été remarquées d'abord par Clairaut, tant à cause de la propriété qu'elles ont de s'intégrer facilement, après une nouvelle différentiation, que par rapport à la solution particulière que cette différentiation manifeste sur-le-champ.

Soit encore l'équation

$$xdx + ydy = dy\sqrt{x^2 + y^2 - a^2},$$

dont l'intégrale est

$$\sqrt{x^2 + y^2 - a^2} = y + c, \text{ ou } x^2 - 2cy - c^2 - a^2 = 0,$$

en faisant disparaître le radical. On trouve

$$xdx - cdy - (y + c)dc = 0,$$

d'où il suit

$$y + c = 0;$$

et par conséquent

$$\sqrt{x^2 + y^2 - a^2} = 0, \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 - a^2 = 0,$$

équation qui ne peut résulter de la proposée, par aucune valeur constante de c, et qui est donc une solution particulière.

Soit enfin l'équation primitive

$$(x^2 + y^2 - a^2)(y^2 - 2cy) + (x^2 - a^2)c^2 = 0.$$

En la traitant comme les précédentes, on trouve

$$c = \frac{(x^2 + y^2 - a^2)y}{x^2 - a^2},$$

valeur qui, bien que variable, ne conduit pas à une

solution particulière; car si on la substitue dans l'équation proposée, celle-ci devenant

$$\frac{y^4(x^2+y^2-a^2)}{x^2-a^2}=0,$$

donne

$$y=0, \quad \text{ou} \quad x^2+y^2-a^2=0,$$

équations qu'on tire immédiatement de la proposée, en y faisant $c=0$: ce ne sont donc point des solutions mais des intégrales particulières de l'équation différentielle produite par l'élimination de la constante arbitraire c.

325. Une propriété des solutions particulières qui se présente facilement sur le second exemple, et qui est générale, c'est que *l'équation différentielle peut être préparée de sorte que la solution particulière en devienne un facteur.* En effet, si l'on pose

$$\sqrt{x^2+y^2-a^2}=u,$$

on aura

$$x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=u\mathrm{d}u,$$

et l'équation proposée deviendra

$$u\mathrm{d}u-u\mathrm{d}y=0.$$

Si l'on prenait $u=x^2+y^2-a^2$, le radical resterait en évidence dans la transformée, qui deviendrait

$$\mathrm{d}u-2\mathrm{d}^2y\sqrt{u}=0;$$

en la différentiant, on arriverait à

$$\mathrm{d}^2u-2\mathrm{d}^2y\sqrt{u}-\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}u}{\sqrt{u}}=0,$$

et faisant disparaître le diviseur, il en résulterait

$$\mathrm{d}^2u\sqrt{u}-2u\mathrm{d}^2y-\mathrm{d}y\mathrm{d}u=0,$$

équation qui serait encore vérifiée par la supposition de $u = 0$. Ces transformations pouvant être continuées autant qu'on veut, il s'ensuit qu'il y a des manières de préparer toutes les différentielles de la proposée, pour que la solution particulière y satisfasse aussi, ce qui n'aurait pas lieu sans cela; car si, quand on fait varier la constante c et qu'on pose $\frac{dy}{dc} = 0$, on a, pour la solution particulière, comme pour l'intégrale complète, $dy = p\,dx$, la valeur de d^2y, devient pour la première

$$\left(\frac{dp}{dx}\,dx + \frac{dp}{dc}\,\frac{dc}{dx}\,dx\right)dx,$$

tandis qu'elle est seulement $\frac{dp}{dx}\,dx^2$ pour la seconde; ce n'est pas non plus au même facteur que ces deux valeurs satisfont en général : on voit même que l'équation

$$d^2u\sqrt{u} - 2u\,d^2y - dy\,du = 0,$$

serait vérifiée par la solution particulière, indépendamment des différentielles du second ordre.

Le développement et les démonstrations des circonstances que je viens d'indiquer me mèneraient trop loin; on les trouvera dans un Mémoire où M. Poisson a éclairci avec succès plusieurs difficultés qui restaient encore sur la théorie des solutions particulières des divers genres d'équations différentielles (*).

326. Pour reconnaître par ce qui précède si une équation primitive qui ne contient pas de constante arbitraire, et qui satisfait à une équation différentielle

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, 13me *cahier; voyez* aussi le Traité in-4°, t. II, p. 388.

donnée, en est une intégrale particulière, ou seulement une solution particulière, il faut en avoir l'intégrale complète; cette circonstance, qui n'a pas toujours lieu, conduit naturellement à la question suivante :

Étant donnée une valeur $y=X$, *qui satisfait à une équation différentielle, déterminer si elle est ou non comprise dans l'intégrale complète, et en déduire, s'il est possible, celle-ci.*

En supposant qu'on tire de cette dernière $y=V$, et qu'elle comprenne $y=X$, la fonction V sera nécessairement composée avec la variable x et la constante arbitraire C, de manière à se changer en X, par une détermination convenable de C. Si l'on désigne par C' cette valeur de C, et qu'on observe que la supposition de $C=C'$ donne $V=X$, ou que la différence $V-X$ s'évanouit quand $C-C'=0$, on en conclura que, du moins par son développement, l'expression de $V-X$ doit pouvoir être mise sous la forme

$$V-X=V'(C-C')^{\mu}+V''(C-C')^{\nu}+\text{etc.},$$

les exposans μ, ν, etc. étant tous positifs, et les quantités V', V'', etc. indépendantes de $C-C'$. On peut prendre $(C-C')^{\mu}=h$; la quantité h demeurera arbitraire aussi bien que la quantité C; et changeant aussi $\frac{\nu}{\mu}$ en μ, μ étant alors >1, il viendra

$$V-X=V'h+V''h^{\mu}+\text{etc.},$$

d'où

$$V=X+V'h+V''h^{\mu}+\text{etc.},$$

expression qu'on pourra regarder comme le développement de la valeur complète de y.

Cela posé, si l'on représente par $dy=pdx$, l'équa-

tion différentielle proposée, résolue par rapport à dy, cette nouvelle équation, à laquelle satisfait, par hypothèse, l'équation $y = X$, devra être vérifiée indépendamment de h, par la valeur complète de y. En désignant d'abord celle-ci par $X + k$, il faudra, pour la substituer dans $dy = p\,dx$, chercher ce que devient p, lorsqu'on y change y en $X + k$. Soit

$$P + P'k^m + P''k^n + \text{etc.},$$

le développement de cette valeur de p, les exposans m, n, etc., que je suppose rangés dans l'ordre de leur grandeur, seront nécessairement positifs; car p ne devient pas infini quand $k = 0$, puisque l'équation $y = X$, qui ne donne pas dy infini, rend identique l'équation $dy = p\,dx$, en sorte que $dX = P\,dx$.

Lorsqu'on fait $y = X + k$, on a pour résultat

$$dX + dk = (P + P'k^m + P''k^n + \text{etc.})\,dx,$$

que l'équation $dX = P\,dx$ réduit à

$$dk = (P'k^m + P''k^n + \text{etc.})\,dx;$$

et remettant pour k le développement

$$V'h + V''h^\mu + \text{etc.},$$

il vient

$$hdV' + h^\mu dV'' + \text{etc.} = \left\{\begin{array}{l} P'h^m dx(V' + V''h^{\mu-1} + \text{etc.})^m \\ + P''h^n dx(V' + V''h^{\mu-1} + \text{etc.})^n \\ + \text{etc.} \end{array}\right\} (A),$$

équation d'après laquelle il faut déterminer V', V'', etc., indépendamment de h. En ne prenant d'abord que les termes où cette quantité a le plus petit exposant, on forme l'équation

$$hdV' = P'V'^m h^m dx,$$

qui ne peut avoir lieu, quelle que soit h, que quand $m=1$; dans ce cas h disparaît et il vient

$$dV' = P'V'dx, \quad V' = e^{\int P'dx}.$$

Quand $m>1$, on ne peut plus comparer le premier terme $P'V'^m h^m dx$ du second membre au terme hdV' du premier; mais on fait disparaître celui-ci en posant $dV'=0$, ce qui donne $V'=const.$, ou plus simplement, $V'=1$; puis on suppose $\mu=m$, et l'on a $dV''=P'dx$, d'où il résulte $V''=\int P'dx$; et en poursuivant de cette manière on trouve tous les autres termes de la série.

Quand $m<1$, il n'est plus possible de satisfaire à l'équation (A) en aucune manière, puisqu'on ne saurait comparer le terme $P'V'^m h^m dx$ ni au terme hdV', ni à aucun de ceux qui le suivent, et dont les exposans surpassent tous l'unité; l'équation $y=X$ ne pouvant alors admettre une constante arbitraire, n'est pas une intégrale particulière, mais une solution particulière.

327. Ceci fournit un procédé pour découvrir immédiatement les solutions particulières des équations différentielles du premier ordre, sans connaître leur intégrale complète. En effet, le développement de p, quand on y change y en $y+k$, serait en général, par le théorème de Taylor,

$$p + \frac{dp}{dy}\frac{k}{1} + \frac{d^2p}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} + \text{etc.}$$

et lorsqu'il prend la forme

$$P + P'k^m + \text{etc.},$$

m étant <1, le coefficient différentiel $\frac{dp}{dy}$ devient in-

fini (89); il faut donc que la différentiation par laquelle on passe de p à ce coefficient, amène un diviseur qui s'évanouisse. Il résulte de là, que si l'on représente $\frac{dp}{dy}$ par $\frac{K}{L}$, toute solution particulière donnera $L=0$, et sera par conséquent un facteur de L, et réciproquement, tout facteur de L qui ne le sera pas en même temps de K; et qui, étant égalé à zéro, vérifiera l'équation différentielle proposée, en sera une solution particulière.

On évite la résolution, par rapport à dy, de l'équation différentielle proposée, en remarquant que si $Z=0$ désigne cette équation, Z étant fonction de x, y et p, lorsqu'on écrit pdx au lieu de dy, on a

$$\frac{dZ}{dx}dx+\frac{dZ}{dy}dy+\frac{dZ}{dp}dp=0,$$

d'où

$$\frac{dp}{dy}=-\frac{\frac{dZ}{dy}}{\frac{dZ}{dp}},$$

et que si l'on a préparé l'équation $Z=0$ de manière qu'elle ne contienne ni fractions ni radicaux, il suffira, pour rendre $\frac{dp}{dy}$ infini, d'égaler à zéro un facteur de $\frac{dZ}{dp}$.

On n'obtiendrait ainsi que les solutions particulières dans lesquelles entre y; mais on parviendrait à celles qui ne renferment que x, et qui sont de la forme $x=const.$, en considérant, dans la proposée, x comme fonction de y.

328. Je vais chercher par cette méthode, d'abord les

solutions particulières de l'équation

$$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = \mathrm{d}y\sqrt{x^2+y^2-a^2}$$

du n° 324. Cette équation devient, après l'évanouissement du radical,

$$x^2\mathrm{d}x^2 + 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y + (a^2-x^2)\mathrm{d}y^2 = 0,$$

ou

$$x^2 + 2xyp + (a^2-x^2)p^2 = 0,$$

et la différentiation donne

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}p} = 2xy + 2(a^2-x^2)p;$$

la solution particulière cherchée doit donc être telle, qu'à l'aide de la valeur que sa différentielle fournit pour p, elle vérifie en même temps les deux équations

$$x^2 + 2xyp + (a^2-x^2)p^2 = 0,$$
$$xy + (a^2-x^2)p = 0.$$

Il suit de là que, sans le secours de sa différentielle, elle vérifiera l'équation résultante de l'élimination de p entre les deux précédentes. Cela posé, l'équation

$$xy + (a^2-x^2)p = 0,$$

multipliée par p et retranchée de la proposée, conduit à

$$x^2 + xyp = 0, \quad \text{d'où} \quad p = -\frac{x}{y};$$

et substituant cette valeur de p dans la première, on trouve l'équation

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0,$$

qu'on sait être une solution particulière de la proposée.

L'équation plus générale $y = px + P$, étant traitée

de la même manière, conduit à $\frac{dZ}{dp} = x + \frac{dP}{dp}$; c'est donc à l'équation

$$x + \frac{dP}{dp} = 0,$$

que doivent satisfaire les solutions particulières; et elles résulteront de l'élimination de p entre celle-ci et l'équation différentielle proposée.

Enfin, pour donner un exemple des solutions particulières de la forme $y = const.$, je prendrai l'équation

$$\frac{dy}{dx} = b(y-a)^m,$$

de laquelle on tire immédiatement

$$\frac{dp}{dy} = mb(y-a)^{m-1}.$$

Cette expression ne peut devenir infinie que quand l'exposant $m-1$ est négatif, et qu'on a en même temps $y = a$, valeur qui ne satisfait à la proposée que lorsque m est positive; il faut donc que l'exposant m soit une fraction positive. Dans ce cas $y = a$ est une solution particulière, tandis que l'intégrale complète est

$$\frac{(y-a)^{1-m}}{1-m} - bx = const.$$

329. En général, parmi les fonctions algébriques, il n'y a que les radicaux qui acquièrent un dénominateur par la différentiation, et qui puissent par conséquent donner $\frac{dp}{dy} = \frac{1}{0}$, lorsque p a une valeur finie; c'est donc dans les radicaux qu'il faut chercher les solutions particu-

lières, en égalant à zéro les fonctions qu'ils affectent, et en s'assurant que les équations résultantes satisfont à la proposée. Par ce procédé, l'équation

$$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = \mathrm{d}y\sqrt{x^2+y^2-a^2},$$

donne immédiatement $x^2+y^2-a^2=0$; et l'équation

$$y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = n\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2},$$

de laquelle on tire

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-xy}{n^2-x^2} \pm \frac{n\sqrt{x^2+y^2-n^2}}{n^2-x^2},$$

conduit à $x^2+y^2-n^2=0$, comme on l'a déjà trouvé de plusieurs manières.

Des méthodes pour résoudre par approximation les équations différentielles.

336. Quand une équation différentielle ne peut s'intégrer par aucun des procédés connus, il faut chercher à la résoudre par approximation; c'est-à-dire, à en tirer la valeur de y en x, au moyen d'une série. On a déjà vu dans le n° 298, comment celle de Taylor pouvait s'appliquer à cet usage; on peut aussi prendre pour y une série à coefficiens indéterminés, ordonnée suivant les puissances de x; mais il faut le plus souvent des artifices particuliers pour déterminer les exposans, lorsqu'ils ne suivent pas la progression des nombres entiers. Quand la forme de cette série est connue, on parvient à trouver ses coefficiens, en la substituant, ainsi que ses différentielles, au lieu de y, $\mathrm{d}y$, d^2y, etc., dans l'équation proposée.

Si l'on avait, par exemple, l'équation

$$\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x = mx^n\mathrm{d}x,$$

on supposerait

$$y = Ax^{\alpha} + Bx^{\alpha+1} + Cx^{\alpha+2} + \text{etc.};$$

mettant cette valeur et sa différentielle dans l'équation proposée, en observant d'assembler les termes de manière qu'on puisse former un nombre suffisant d'équations pour déterminer les exposans et les coefficiens, sans tomber dans des contradictions, on aurait

$$\left.\begin{array}{l} \alpha Ax^{\alpha-1} + (\alpha+1)Bx^{\alpha} + (\alpha+2)Cx^{\alpha+1} + (\alpha+3)Dx^{\alpha+2} + \text{etc.} \\ -mx^{n} + Ax^{\alpha} + Bx^{\alpha+1} + Cx^{\alpha+2} + \text{etc.} \end{array}\right\} = 0,$$

équation qu'on rendrait identique en faisant $n = \alpha - 1$, ou $\alpha = n+1$, et $A = \frac{m}{\alpha}$, $B = \frac{-m}{\alpha(\alpha+1)}$, $C = \frac{m}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}$,

$$D = \frac{-m}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}, \text{ etc.}$$

ce qui donnerait

$$y = m\left[\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{x^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \text{etc.}\right].$$

Cette valeur de y est incomplète, puisqu'elle ne renferme point de constante arbitraire; il en sera de même pour tous les cas où la constante ne peut être isolée de la variable x, dans le développement de l'intégrale; mais, d'après ce qu'on a vu dans le n° 299, on arriverait à un résultat aussi général que l'intégrale complète, si l'on pouvait lui donner une forme telle qu'en y faisant $x = a$, il en résultât $y = b$; or c'est ce qui s'effectue en posant $x = a + t$, $y = b + u$, et prenant

pour représenter u, une série dont tous les termes s'évanouissent quand $t=0$.

L'équation $dy+y\,dx=mx^n dx$ devient par cette transformation $du+(b+u)dt=m(a+t)^n dt$, et faisant

$$u=At^\alpha+Bt^{\alpha+1}+Ct^{\alpha+2}+\text{etc.},$$

on trouvera

$$\left.\begin{array}{l} \alpha At^{\alpha-1}+(\alpha+1)Bt^\alpha+(\alpha+2)Ct^{\alpha+1}+\text{etc.} \\ +b\quad+\quad At^\alpha+\quad Bt^{\alpha+1}+\text{etc.} \\ -ma^n-m\frac{n}{1}a^{n-1}t-m\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}t^2-\text{etc.} \end{array}\right\}=0;$$

il faudra supposer dans cette équation $\alpha-1=0$, ou $\alpha=1$, et il viendra

$$A=ma^n-b,\quad B=\frac{mna^{n-1}-ma^n+b}{2},$$

$$C=\frac{mn(n-1)a^{n-2}-mna^{n-1}+ma^n-b}{2.3},\ \text{etc.}$$

331. L'emploi des séries à coefficiens indéterminés, dans les équations du premier degré et du second ordre, présente quelquefois des circonstances qu'il est à propos de connaître, et dont l'équation très simple

$$d^2y+ax^n y\,dx^2=0$$

offre un exemple remarquable.

Si l'on y suppose

$$y=Ax^\alpha+Bx^{\alpha+\delta}+Cx^{\alpha+2\delta}+\text{etc.}$$

on aura

$$\begin{aligned} d^2y=\{&\alpha(\alpha-1)Ax^{\alpha-2} \\ &+(\alpha+\delta)(\alpha+\delta-1)Bx^{\alpha+\delta-2} \\ &+(\alpha+2\delta)(\alpha+2\delta-1)Cx^{\alpha+2\delta-2}+\text{etc.}\}dx^2. \end{aligned}$$

$$ax^n y dx^2 = \{aAx^{\alpha+n} + aBx^{\alpha+\delta+n} + aCx^{\alpha+2\delta+n} + \text{etc.}\}\, dx^2.$$

On voit d'abord qu'il ne sera possible de faire correspondre les termes

$$\alpha(\alpha-1)Ax^{\alpha-2}, \quad aAx^{\alpha+n},$$

par lesquels commencent respectivement les expressions précédentes, que dans le cas particulier où $n = -2$; mais il suffira de poser

$$\alpha = 0, \quad \text{ou} \quad \alpha = 1,$$

pour faire disparaître le premier terme de la valeur de d^2y ; et le second, dont l'exposant est $\alpha + \delta - 2$, pourra être comparé avec $aAx^{\alpha+n}$: il résultera de là

$$\delta - 2 = n, \quad \text{d'où} \quad \delta = n + 2.$$

A partir de ces termes, les deux séries se correspondront exactement, et pour déterminer les coefficiens, on aura les équations

$$(\alpha+\delta)(\alpha+\delta-1)B + aA = 0,$$
$$(\alpha+2\delta)(\alpha+2\delta-1)C + aB = 0,$$
$$\text{etc.},$$

dans lesquelles A demeure arbitraire.

Si l'on y met successivement les deux valeurs de α avec celle de δ, on obtiendra pour y les deux développemens

$$A - \frac{aAx^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{a^2Ax^{2n+4}}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)} - \frac{a^3Ax^{3n+6}}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)(3n+5)(3n+6)} + \text{etc.},$$

$$Ax - \frac{aAx^{n+3}}{(n+2)(n+3)} + \frac{a^2Ax^{2n+5}}{(n+2)(n+3)(2n+4)(2n+5)}$$
$$- \frac{a^3Ax^{3n+7}}{(n+2)(n+3)(2n+4)(2n+5)(3n+6)(3n+7)} + \text{etc.}$$

Ils ne sont encore que particuliers, puisqu'ils ne contiennent que la constante arbitraire A; mais en écrivant dans le dernier A_1, à la place de A, et prenant ensuite leur somme, on aura, à cause de la forme particulière de l'exemple proposé (309), l'expression générale de y.

332. En terminant ici ce qui regarde l'intégration approchée des équations différentielles, je dois dire que les méthodes exposées ci-dessus, ne donnant que bien rarement des séries convergentes, et seulement pour des valeurs très limitées de la variable indépendante, ne sont guère en usage. Dans les problèmes physico-mathématiques auxquels s'appliquent les approximations du Calcul intégral, il ne s'agit le plus souvent que de déterminer les petites corrections qu'il faut faire à une première valeur approchée, connue d'ailleurs, et considérée comme un état moyen. La vraie valeur cherchée ne s'en écartant que par des fonctions dont on peut négliger d'abord le quarré et les puissances supérieures, on réduit au premier degré les équations différentielles qui déterminent ces fonctions, et l'on y applique ensuite des procédés qui sont encore trop variés pour pouvoir entrer dans les élémens, aussi les trouvet-on toujours développés dans les divers traités spéciaux où l'on s'en est servi.

Résolution de quelques problèmes géométriques, dépendans des équations différentielles.

333. La mise en équation des problèmes géométriques, dépendans des équations différentielles, ne reposant que sur les propriétés des tangentes, des normales, des rayons de courbure, ne présente pas plus de difficultés que les autres traductions analytiques, lorsqu'on connaît les expressions des lignes qu'il faut considérer; aussi n'en donnerai-je que quelques exemples.

J'observerai d'abord que l'intégration des équations différentielles du premier ordre s'appelle aussi *Méthode inverse des tangentes*, parce que toute équation différentielle de cet ordre, donnant l'expression de $\frac{dy}{dx}$ en x et en y, fait connaître la relation qui existe entre les coordonnées et la soutangente, ou la tangente, ou la normale, etc. dans la courbe qu'elle représente. En effet, si de l'équation proposée, on tire $\frac{dy}{dx}=p$, la soutangente aura pour expression $\frac{y}{p}$, la tangente $\frac{y\sqrt{1+p^2}}{p}$, etc. (66). On inventa le Calcul différentiel pour mener des tangentes aux courbes, c'est-à-dire, pour résoudre le *Problème direct des tangentes :* on s'occupa ensuite du Calcul intégral, pour parvenir aux équations primitives des courbes par les propriétés de leurs tangentes; mais les progrès et les nombreuses applications de ce Calcul ont fait abandonner la dénomination de *Méthode inverse des tangentes*, qui ne convenait qu'à un seul de ses usages.

Dans les premiers temps on chercha à déterminer par les aires, ou même par les arcs de quelques courbes connues, l'ordonnée de la courbe demandée; depuis,

on a laissé ces constructions de côté, parce que, quelque élégantes qu'elles fussent dans la théorie, elles étaient toujours moins commodes et surtout moins exactes, dans la pratique, que les formules approximatives qui ont pris leur place.

Une équation différentielle ne peut se construire en général que lorsqu'on en a séparé les variables, parce qu'alors l'expression de l'une d'elles ne dépend plus que de la quadrature d'une courbe dont l'équation primitive est connue.

334. Je prends, pour exemple, la construction des courbes dans lesquelles la soutangente est égale à une fonction donnée de l'abscisse x; l'équation différentielle de cette courbe sera $\frac{y\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = X$, X désignant la fonction donnée. Les variables se séparent sur-le-champ, dans cette équation, et il vient $\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{X}$. Multipliant alors les deux membres par une quantité constante m, on a $\frac{m\mathrm{d}y}{y} = \frac{m\mathrm{d}x}{X}$; et désignant par $\mathrm{L}y$ le logarithme de y, pris dans le système dont le module est m, l'intégration donne

$$\mathrm{L}y = \int \frac{m\mathrm{d}x}{X} = \frac{1}{m}\int \frac{m^2\mathrm{d}x}{X}.$$

En construisant d'abord la courbe DN, *fig.* 56, telle que FIG. 56. l'ordonnée correspondante à l'abscisse AP, soit $PN = \frac{m^2}{X}$, l'aire $ADNP$ donnera la valeur de $\int \frac{m^2\mathrm{d}x}{X}$. On réduira cette aire à un rectangle FQ, dont le côté AF soit m; l'autre côté, AQ, exprimera $\frac{1}{m}\int \frac{m^2\mathrm{d}x}{X}$; dé-

crivant ensuite, sur le module m, la logarithmique ER, dont les ordonnées soient perpendiculaires à l'axe AC, et élevant par le point Q la perpendiculaire RQ, on aura $\mathrm{L}.RQ = AQ$ (112), ou $\mathrm{L}.RQ = \frac{1}{m}\int\frac{m^2dx}{X}$; RQ sera donc égale à l'ordonnée PM de la courbe cherchée.

Il faut bien remarquer que cette construction n'exige pas que l'on ait l'expression analytique de la fonction X; on pourrait prendre à sa place l'ordonnée d'une courbe quelconque rapportée à l'axe AB, et effectuer sur cette ordonnée et sur la ligne arbitraire m, les opérations graphiques indiquées par les formules ci-dessus. On voit aussi que la ligne m n'a été introduite que pour rendre ces formules homogènes, et peut être supposée égale à l'unité.

335. Je vais encore rapporter la solution d'un problème célèbre dans les premiers temps où l'on s'est occupé du Calcul intégral, du *problème des trajectoires*. Il a pour objet de *déterminer la courbe qui coupe, sous un angle donné, toutes celles d'une espèce donnée*. On entend ici par courbes d'une espèce donnée, les diverses courbes particulières qu'on obtient en assignant successivement à l'une des constantes d'une équation primitive, toutes les valeurs possibles. Si, par exemple, on fait varier le paramètre d'une parabole, il en résultera une suite de paraboles rapportées au même axe, ayant même sommet, et dont les extrêmes seront d'une part l'axe, et de l'autre la ligne qui lui est perpendiculaire et qui passe par le sommet : la courbe qui coupera toutes celles-ci sous un angle donné, en sera la trajectoire (*).

(*) On donne aussi en Mécanique le nom de *trajectoire*, à la courbe décrite par un corps sollicité par des forces quelconques;

Soient D_1N_1, DN, $D'N'$, etc., *fig.* 57, les courbes coupées et MZ la courbe coupante, ou la trajectoire cherchée; si par l'un quelconque M de ses points on lui mène une tangente Mt, et qu'on tire aussi celle de la courbe coupée qui passe par ce point, l'angle TMt, d'après l'énoncé de la question, doit être égal à l'angle donné. Je désigne par x', y', les coordonnées des courbes coupées, par x, y, celles de la courbe coupante, et par a, la tangente trigonométrique de l'angle constant TMt, qui est égal à la différence des angles MTP, MtP, dont les tangentes respectives ont pour expression $\frac{dy'}{dx'}$ et $\frac{dy}{dx}$ (66); la relation

FIG. 57.

$$\text{tang } TMt = \text{tang}(MtP - MTP),$$

donne ensuite

$$a = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{dy'}{dx'}}{1 + \frac{dy}{dx}\frac{dy'}{dx'}} \quad (Trig.\ 26).$$

Je supposerai ici que l'on connaisse l'équation primitive des courbes coupées; on en tirera par la différentiation $dy' = p\,dx'$, et l'équation ci-dessus deviendra

$$a\left(1 + p\frac{dy}{dx}\right) + p - \frac{dy}{dx} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (A).$$

Il faudra écrire partout x et y, au lieu de x' et de y', parce qu'au point M, la courbe coupée et la courbe coupante ont les mêmes coordonnées. Cela fait, si l'on élimine, entre l'équation (A) et l'équation primitive des

mais il ne saurait être question de cette espèce de trajectoire dans un ouvrage consacré uniquement à l'Analyse et à la Géométrie.

courbes coupées, la constante dont les différentes valeurs particularisent chacune de ces courbes, on aura un résultat qui embrassera toutes leurs intersections successives avec la trajectoire, et en sera par conséquent l'équation.

Soit, pour exemple, les paraboles ayant même axe et même sommet, et dont l'équation est $y'^n = \alpha x'^m$; il viendra $p = \frac{m\alpha x'^{m-1}}{n y'^{n-1}}$. On pourra chasser immédiatement de cette expression, au moyen de l'équation proposée, le paramètre α qui particularise chaque parabole d'un même degré; substituant le résultat dans l'équation (A), après avoir changé x' et y' en x et en y, et divisant ensuite par $x^{m-1}y^{n-1}$, on trouvera

$$a(nxdx + mydy) + mydx - nxdy = 0.$$

Cette équation étant homogène, peut se traiter par le procédé du n° 283. Lorsqu'on a $m = n = 1$, elle devient intégrable en la divisant par $x^2 + y^2$, puisque

$$\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \mathrm{d.l}\sqrt{x^2 + y^2},$$

et que $\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \mathrm{d.arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{x}{y}\right)$ (279); on a donc

$$a\mathrm{l}\sqrt{x^2 + y^2} + \mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{x}{y}\right) = C,$$

ou

$$a\mathrm{l}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{c} = \mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{y}{x}\right),$$

en changeant la constante arbitraire. Si l'on fait

$$\sqrt{x^2 + y^2} = u, \quad \mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{y}{x}\right) = t,$$

on retombera sur l'équation des spirales logarithmiques,

qui ont la propriété de couper leur rayon vecteur sous un angle constant (128) : en effet, dans le cas actuel les courbes coupées ne sont autre chose que toutes les lignes droites menées par l'origine des coordonnées, et dont l'équation est $y' = \alpha x'$.

Si l'on voulait que l'angle TMt fût droit, il faudrait supposer a infini, et par conséquent ne tenir compte que des termes qu'il multiplie; l'équation ci-dessus se réduirait à $nx\,dx + my\,dy = 0$, dont l'intégrale $nx^2 + my^2 = c$, montre que la courbe qui coupe à angles droits toutes les paraboles proposées, est une ellipse décrite sur le même axe que ces courbes et ayant pour centre leur sommet commun. Les trajectoires où l'angle TMt est droit, s'appellent *trajectoires orthogonales*, et la supposition de a infini, dans l'équation (A), donne $1 + p\frac{dy}{dx} = 0$ pour leur équation différentielle.

336. Les considérations géométriques, comme on l'a annoncé dans le n° 298, établissent aussi la possibilité des équations différentielles à deux variables. En effet, quand il s'agit d'une équation du premier ordre, on n'en tire que la valeur de $\frac{dy}{dx}$ qui exprime la tangente trigonométrique de l'angle que fait avec la ligne des abscisses, la tangente de la courbe relative à cette équation; prenant donc arbitrairement les coordonnées $AP = a$, $PM = b$, d'un premier point M, *fig.* 58, on mènera la ligne MT, faisant avec MQ, parallèle à AB, un angle $M'MQ$, dont la tangente soit égale à la valeur correspondante de $\frac{dy}{dx}$: cette droite touchera au point M la courbe cherchée. En regardant la courbe et sa tangente, comme confondues

ensemble, dans les environs du point de contact, la droite MT déterminera, pour un point P', infiniment proche de P, l'ordonnée $P'M'$ avec laquelle on calculera, par l'équation différentielle proposée, la tangente de l'angle $M''M'Q'$, relatif à la tangente $M'T'$ consécutive à MT. La continuation de ce procédé donnera un polygone qui, à mesure qu'on en multipliera les côtés, différera d'autant moins de la courbe à laquelle appartient l'équation proposée. Il résulte aussi de cette construction, qu'une équation différentielle du premier ordre représente une infinité de courbes, puisqu'on peut prendre le premier point M où l'on voudra.

Dans les équations du second ordre, qui ne donnent que la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$, on substitue les paraboles osculatrices aux tangentes. Ayant pris arbitrairement un premier point dont l'abscisse et l'ordonnée soient $x=a$ et $y=b$, on forme l'équation

$$y-b=A(x-a)+B(x-a)^2,$$

qui appartient à une parabole passant par ce point. En la différentiant deux fois de suite et faisant $x=a$, on en tire

$$\frac{dy}{dx}=A, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=2B;$$

le coefficient A demeure arbitraire, mais B est déterminé en mettant dans l'équation proposée, a, b, A, au lieu de x, y, $\frac{dy}{dx}$: on construit donc en premier lieu une parabole MN, *fig.* 59, qui passe par le point M_1 et dont la tangente à ce point fasse, avec l'abscisse, un angle ayant A pour tangente trigonométrique. On calcule la valeur de l'ordonnée $P'M'$ de cette courbe et celle de $\frac{dy}{dx}$, correspondantes à un

fig. 59.

point P', pris très près du point P, sur l'axe des abscisses; puis mettant ces valeurs dans l'équation différentielle proposée, on en déduit une nouvelle valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$. En représentant celle-ci par $2B_1$, et par b_1 et A_1 celles de $P'M'$ et de $\frac{dy}{dx}$, on forme l'équation

$$y - b_1 = A_1(x - a_1) + B_1(x - a_1)^2,$$

de la seconde parabole osculatrice $M'N'$ avec laquelle on en déterminerait une troisième, et ainsi de suite.

On modifierait aisément ce procédé pour y remplacer la parabole osculatrice par le cercle osculateur, ou pour l'étendre à tous les ordres.

337. Le problème suivant va montrer comment les considérations géométriques conduisent à la théorie des solutions particulières, que j'ai exposée dans le n° 323. *Trouver une courbe telle, que toutes les perpendiculaires abaissées d'un point donné, sur les tangentes de cette courbe, soient égales?* Pour parvenir à l'équation différentielle, il faut se rappeler qu'en nommant x et y les coordonnées d'une courbe, x' et y' celles de sa tangente, l'équation de cette droite est $y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x)$ (68); prenant pour origine des coordonnées le point connu, duquel doivent être abaissées toutes les perpendiculaires, chacune d'elles aura pour équation $y' = -\frac{dx}{dy}x'$ (*Trig.* 90), et sa longueur sera exprimée par $\sqrt{x'^2 + y'^2}$. En mettant pour x' et pour y', les coordonnées du point où elle rencontre la tangente qui lui correspond, et dont les valeurs s'obtiennent par les deux équations ci-dessus (*Trig.* 92), on aura, en vertu de ces équations,

$$x' = \frac{(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}, \quad y' = -\frac{(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2},$$

et
$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}} = n;$$

l'équation différentielle de la courbe cherchée sera donc

$$x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = n\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}.$$

Cela posé, il est facile de voir que le cercle dont le rayon $= n$, et dont le centre est à l'origine des coordonnées, satisfait à la question. Ce cercle ayant pour équation $y^2 + x^2 = n^2$, est précisément la solution particulière trouvée n° 297; mais toute ligne droite située, par rapport à l'origine des coordonnées, de manière que sa plus courte distance à ce point, soit égale à n, résout également le problème proposé; et comme il y a une infinité de lignes droites qui peuvent remplir cette condition, c'est dans l'équation qui les comprend toutes que réside l'intégrale complète de l'équation différentielle trouvée ci-dessus, et qui est en effet

$$y - cx = n\sqrt{1 + c^2} \quad (297).$$

Une circonstance digne de remarque, et qui s'aperçoit sur-le-champ, c'est que toutes les lignes droites dont on vient de parler seront nécessairement touchées par le cercle représentant la solution particulière, puisqu'il a pour rayon la perpendiculaire abaissée sur chacune d'elles.

La même relation a lieu entre les diverses courbes que représente l'intégrale complète d'une équation différentielle du premier ordre, et celle qui résulte d'une solution particulière de cette équation : la dernière touche toutes les autres. En effet, l'équation différentielle ne détermine que la direction de la tangente,

et toute courbe qui, dans un point quelconque, aura la même tangente que l'une des courbes déduites de l'intégrale complète, y satisfera nécessairement ; or, c'est ce qui arrive à la courbe qui touche toutes celles-ci.

Il suit de là, que la développée d'une courbe n'est autre chose que la solution particulière de l'équation différentielle qui représente toutes les normales de cette courbe (80), et que celle-ci, c'est-à-dire la développante, est pareillement la solution particulière de l'équation différentielle commune à tous ses cercles osculateurs, mais avec la différence que les contacts sont du second ordre.

La liaison établie dans le n° 323, entre les intégrales complètes et les solutions particulières, se déduit aussi des considérations géométriques ; car chaque point du cercle de l'exemple précédent, peut être regardé comme l'intersection de deux tangentes consécutives, c'est-à-dire comme l'intersection de deux droites fournies par deux valeurs consécutives données à la constante c ; l'abscisse et l'ordonnée de cette intersection dépendent des valeurs de c, qui par conséquent est à son tour fonction de ces quantités, ou de x et de y. Il est évident que, pour former l'équation d'une ligne consécutive à celle que représente l'équation

$$y - cx = n\sqrt{1 + c^2},$$

il faut différentier celle-ci en faisant varier c ; et puisqu'on ne cherche que l'intersection de ces deux lignes, point où leurs coordonnées sont communes, on doit regarder x et y comme constans : cette intersection sera donc déterminée par les deux équations

$$y - cx = n\sqrt{1 + c^2},$$

$$-x = \frac{nc}{\sqrt{1 + c^2}},$$

si l'on assigne à c une valeur particulière. Mais si l'on élimine c, le résultat, ne désignant plus aucune intersection en particulier, embrassera tous les points résultans des rencontres des droites fournies par toutes les valeurs de c, et combinées deux à deux consécutivement, c'est-à-dire, le cercle qui est la solution particulière, et qui se déduit encore ici de la variation attribuée à la constante arbitraire de l'intégrale complète. Les mêmes remarques se vérifient sur les développées, lorsque l'on considère ces courbes comme produites par les intersections des normales consécutives de la développante (80).

De l'intégration des équations différentielles contenant trois ou un plus grand nombre de variables.

Des équations différentielles totales.

338. Les fonctions qui dépendent de deux ou d'un plus grand nombre de variables, diffèrent de celles d'une seule, en ce qu'elles ont pour chaque ordre plusieurs coefficiens différentiels. Si z, par exemple, est une fonction de deux variables, il aura, pour le premier ordre, deux coefficiens différentiels, savoir, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, l'un pris en faisant varier x seul, et l'autre en faisant varier y seul. Dans le second ordre, le nombre de coefficiens différentiels s'élève à trois, et s'accroît ainsi successivement d'ordre en ordre (44). Pour remonter des coefficiens différentiels d'une fonction de deux ou d'un plus grand nombre de variables à cette fonction, il se présente plusieurs cas : 1°. on peut avoir tous ses coefficiens différentiels d'un même ordre, exprimés par les variables indépendantes, ce qui donne

explicitement les différentielles totales de la fonction cherchée, à laquelle on parvient par les procédés exposés dans les n°s 278 — 280; 2°. la fonction elle-même peut entrer avec les variables indépendantes, dans les expressions des coefficiens différentiels, ce qui fournit une équation différentielle totale; 3°. enfin, on peut n'avoir qu'une relation entre ces coefficiens, la fonction dont ils dérivent et les variables indépendantes.

339. Je m'occuperai d'abord du second cas, en considérant l'équation

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

Elle s'intégrerait par le procédé du n° 280, si le premier membre était une différentielle exacte à trois variables; mais s'il ne l'est pas, il est susceptible de le devenir, par le moyen d'un facteur convenable, quand cette équation dérive d'une équation primitive $u = c$: cela se voit comme pour le cas de deux variable (289). En effet, l'équation différentielle proposée doit alors s'accorder avec

$$\frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy + \frac{du}{dz}\,dz = 0,$$

c'est-à-dire que les valeurs de dz, tirées de l'une et de l'autre, doivent être identiques, indépendamment de dx et de dy (136); or, ces valeurs étant respectivement

$$dz = -\frac{P}{R}dx - \frac{Q}{R}dy, \quad dz = -\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dz}}dx - \frac{\frac{du}{dy}}{\frac{du}{dz}}dy,$$

il s'ensuit que

$$\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dz}} = \frac{P}{R}, \quad \frac{\frac{du}{dy}}{\frac{du}{dz}} = \frac{Q}{R}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\frac{du}{dx}}{P} = \frac{\frac{du}{dy}}{Q} = \frac{\frac{du}{dz}}{R};$$

et nommant μ les quotiens indiqués, il viendra

$$du = \mu P dx + \mu Q dy + \mu R dz.$$

Cela posé, pour que cette différentielle soit exacte, il faut encore qu'elle vérifie les conditions

$$\frac{d.\mu P}{dy} = \frac{d.\mu Q}{dx}, \quad \frac{d.\mu R}{dx} = \frac{d.\mu P}{dz}, \quad \frac{d.\mu Q}{dz} = \frac{d.\mu R}{dy},$$

dont le développement fournit les équations

$$\left.\begin{aligned} \mu\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) + P\frac{d\mu}{dy} - Q\frac{d\mu}{dx} = 0 \\ \mu\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\frac{d\mu}{dx} - P\frac{d\mu}{dz} = 0 \\ \mu\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\frac{d\mu}{dz} - R\frac{d\mu}{dy} = 0 \end{aligned}\right\} (A).$$

On aperçoit bientôt que la fonction μ disparaît quand on multiplie la première de ces équations par R, la seconde par Q, la troisième par P, et qu'on ajoute les produits; car la somme, étant divisible par μ, se réduit à

$$R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) = 0 \ (B),$$

équation de condition qui doit d'abord être satisfaite par la proposée, pour que celle-ci puisse devenir différentielle exacte, au moyen d'un facteur, et qu'elle puisse par conséquent dériver d'une équation primitive à trois variables, ou, ce qui est la même chose, être vérifiée par une fonction de deux.

Cette dernière considération mène aussi à l'équation

(*B*), par l'application immédiate du théorème du n° 278; car si l'on avait l'expression primitive de z en x et en y, et qu'on la substituât dans celle de dz tirée de l'équation

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

il en résulterait nécessairement une différentielle exacte à deux variables, et de la forme

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad \text{où} \quad \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}.$$

Mais dans le cas actuel, où

$$p = -\frac{P}{R}, \quad q = -\frac{Q}{R},$$

P, Q, R renfermant z, il faut, dans les différentiations indiquées, le faire varier aussi, et mettre en conséquence p et q à la place de $\frac{dz}{dx}$ et de $\frac{dz}{dy}$; alors, au lieu de $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}$, il viendra,

$$\frac{dp}{dy} + q\frac{dp}{dz} = \frac{dq}{dx} + p\frac{dq}{dz},$$

ou

$$\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx} + q\frac{dp}{dz} - p\frac{dq}{dz} = 0. \quad (C).$$

Si l'on substitue $-\frac{P}{R}$, $-\frac{Q}{R}$, à la place de p et de q, on aura, après les réductions,

$$P\frac{dR}{dy} - R\frac{dP}{dy} + R\frac{dQ}{dx} - Q\frac{dR}{dx} + Q\frac{dP}{dz} - P\frac{dQ}{dz} = 0,$$

c'est-à-dire l'équation (*B*) du n° précédent.

Pendant long-temps on a appelé *équations absurdes*, et l'on regardait comme insignifiantes, celles qui ne satisfaisaient pas à l'équation (*B*); mais Monge a fait voir

que toutes les équations différentielles à trois variables avaient une signification réelle, et que tandis que celles dont l'intégrale était exprimée par une seule équation entre les trois variables, appartenaient à des surfaces courbes, chacune des autres représentait une infinité de courbes à double courbure, jouissant d'une propriété commune. Je m'occuperai d'abord des premières.

340. Quand l'équation (B) est satisfaite, deux quelconques des équations (A) suffisent pour déterminer le facteur μ, et l'on va voir que l'intégration de la proposée se ramène à celle des équations à deux variables.

Pour cela, soit μ le facteur qui rend intégrable la différentielle

$$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y,$$

lorsque l'on y regarde z comme constant; en posant

$$\int(\mu P\mathrm{d}x + \mu Q\mathrm{d}y) = U,$$

on aura pour l'intégrale cherchée

$$U + Z = 0,$$

où Z désigne une fonction de z seul. Si maintenant on différentie cette intégrale, en y faisant tout varier, et en observant que

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = \mu P, \quad \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y} = \mu Q,$$

on aura l'équation

$$\mu P\mathrm{d}x + \mu Q\mathrm{d}y + \left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z} + \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}z}\right)\mathrm{d}z = 0,$$

dont la comparaison avec la proposée donnera

$$\mu R = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z} + \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}z},$$

ou

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}z} = \mu R - \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z};$$

mais, pour que la détermination de Z puisse avoir lieu suivant l'hypothèse établie, il faudra que le second membre de cette dernière équation se réduise à une fonction de z et de Z, au moins après qu'on en aura chassé y, par sa valeur prise dans l'équation $U+Z=0$: considérant donc alors y comme une fonction de x et de Z, on aura l'équation de condition

$$\frac{d\left(\mu R-\frac{dU}{dz}\right)}{dx}+\frac{d\left(\mu R-\frac{dU}{dz}\right)}{dy}\frac{dy}{dx}=0,$$

ou, en développant,

$$\mu\frac{dR}{dx}+R\frac{d\mu}{dx}-\frac{d^2U}{dxdz}+\left(\mu\frac{dR}{dy}+R\frac{d\mu}{dy}-\frac{d^2U}{dzdy}\right)\frac{dy}{dx}=0.$$

Or, l'équation différentielle proposée, étant mise sous la forme

$$dy=-\frac{P}{Q}dx-\frac{R}{Q}dz,$$

donne

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{P}{Q};$$

on a aussi

$$\frac{d^2U}{dxdz}=\frac{d.\mu P}{dz}=\mu\frac{dP}{dz}+P\frac{d\mu}{dz},$$

$$\frac{d^2U}{dydz}=\frac{d.\mu Q}{dz}=\mu\frac{dQ}{dz}+Q\frac{d\mu}{dz};$$

de plus, le facteur μ, rendant exacte la différentielle $\mu Pdx+\mu Qdy$, satisfait à l'équation

$$P\frac{d\mu}{dy}-Q\frac{d\mu}{dx}+\mu\left(\frac{dP}{dy}-\frac{dQ}{dx}\right)=0 \quad (290);$$

et si l'on tire de cette dernière, la valeur de $\frac{d\mu}{dx}$, pour la substituer, avec celles de

$$\frac{d^2U}{dxdz},\quad \frac{d^2U}{dydz},\quad \frac{dy}{dx},$$

dans l'équation de condition trouvée plus haut, le résultat, étant réduit avec soin, sera précisément l'équation (B): ainsi quand elle est vérifiée, l'intégration de l'équation différentielle proposée à trois variables, ne dépend que de celle des équations à deux variables.

341. Lorsque les différentielles dx, dy et dz montent au-delà du premier degré dans l'équation proposée, elle ne peut s'intégrer par ce qui précède, que quand elle satisfait à une nouvelle condition que je vais faire connaître sur l'équation

$$Pdx^2+Qdy^2+Rdz^2+2Sdxdy+2Tdxdz+2Vdydz=0.$$

Pour quelle puisse résulter d'une équation primitive $u=c$, il faut, avant tout, qu'elle se ramène à la forme

$$P'dx+Q'dy+R'dz=0 \quad (339).$$

ou, ce qui est la même chose, qu'en la résolvant par rapport à l'une des différentielles dx, dy, dz, les deux autres sortent des radicaux : or, c'est ce qui n'arrive pas toujours; car on a

$$dz=\frac{1}{R}\left\{-Tdx-Vdy \pm\sqrt{(T^2-PR)dx^2+2(TV-RS)dxdy+(V^2-QR)dy^2}\right\},$$

et si la quantité qui est sous le radical, n'est pas un

quarré parfait, ou du moins si l'on n'a pas

$$(TV-RS)^2=(T^2-PR)\,(V^2-QR),$$

les différentielles dx et dy resteront engagées sous ce radical. En général, quel que soit le degré de l'équation proposée, par rapport à dz, dx, dy, il faut qu'étant ordonnée suivant les puissances de dz, elle puisse se décomposer en facteurs de la forme

$$dz-pdx-qdy=0.$$

Des équations différentielles totales qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité.

342. J'ai fait voir, dans le n° 339, qu'une équation différentielle du premier ordre à trois variables, de la forme $Pdx+Qdy+Rdz=0$, ne pouvait être satisfaite par une fonction de deux variables, qu'autant que l'équation

$$P\frac{dR}{dy}-R\frac{dP}{dy}+R\frac{dQ}{dx}-Q\frac{dR}{dx}+Q\frac{dP}{dz}-P\frac{dQ}{dz}=0,$$

était identique par elle-même; mais en établissant une dépendance quelconque entre x, y, z, on changera l'équation proposée, dans une autre qui ne contiendra plus que deux de ces variables, et déterminera par conséquent l'une de celles-ci en fonction de l'autre.

Si l'on avait, par exemple, l'équation

$$\frac{dz}{z-c}=\frac{xdx+ydy}{x(x-a)+y(y-b)},$$

qui ne peut remplir la condition énoncée ci-dessus, tant que a et b ne sont pas nuls, et qu'on y fît $y=\varphi(x)$, φ désignant une fonction quelconque, elle se changerait en

$$\frac{dz}{z-c} = \frac{[x+\varphi(x)\varphi'(x)]dx}{x(x-a)+\varphi(x)[\varphi(x)-b]},$$

et donnerait autant de relations différentes entre z et x, que l'on assignerait de formes particulières à la fonction φ.

En prenant $\varphi(x)=x$, on aurait

$$\frac{dz}{z-c} = \frac{2xdx}{x(x-a)+x(x-b)} = \frac{2dx}{2x-a-b},$$

d'où l'on tirerait $z-c=C(2x-a-b)$, C étant une constante arbitraire; et la proposée serait satisfaite par le système des équations

$$\left.\begin{array}{c} y=x \\ z-c=C(2x-a-b) \end{array}\right\}.$$

Newton, dans son Traité des Fluxions (*), avait déjà indiqué cette manière de résoudre les équations différentielles qui contenaient plus de deux variables; mais elle a l'inconvénient d'exiger une intégration pour chaque résultat qu'on veut obtenir, et Monge a remarqué, en 1784, qu'on pouvait, par l'introduction d'une fonction arbitraire, parvenir à un système général d'équations qui en donnât une infinité de particuliers, satisfaisant tous à la proposée.

343. Le procédé que l'on doit suivre pour intégrer l'équation

$$Pdx+Qdy+Rdz=0,$$

par une seule équation primitive, lorsque la chose est possible (340), conduit aussi à la solution la plus générale que l'on puisse obtenir pour cette équation, dans le cas contraire. En effet, si on l'intègre d'abord, en regar-

(*) *Newtoni Opuscula*, t. I, p. 83, édition de 1744.

dant une des variables qu'elle renferme comme constante, z, par exemple, que l'on représente par $U = C$, l'équation primitive qui répond à $Pdx + Qdy = 0$, que l'on différentie cette équation primitive, en faisant varier à la fois x, y, z et C, et que l'on compare le résultat à la proposée, on arrivera à l'équation

$$\frac{dC}{dz} = \frac{dU}{dz} - \mu R,$$

μ étant le facteur qui rend $Pdx + Qdy$ une différentielle exacte. A la vérité, le second membre ne se réduira plus à une fonction de z seul, comme cela arrive dans le cas où la condition d'intégrabilité est remplie, et ne pourra donner C, comme l'exige cette condition; mais il est évident qu'en supposant toujours que C soit une fonction de z, l'équation proposée sera satisfaite par l'équation primitive $U = C$, si l'on a en même temps

$$\frac{dC}{dz} = \frac{dU}{dz} - \mu R:$$

faisant donc $C = \varphi(z)$, le système des équations

$$\left.\begin{aligned} U &= \varphi(z) \\ \frac{dU}{dz} - \mu R &= \varphi'(z) \end{aligned}\right\}$$

satisfera à la proposée, quelle que soit la forme de la fonction φ, et pourra se particulariser d'une infinité de manières, en prenant φ arbitrairement.

En appliquant ceci à l'équation

$$\frac{dz}{z - c} = \frac{x dx + y dy}{x(x - a) + y(y - b)},$$

que j'ai prise pour exemple dans le n° précédent, on aura

$$Pdx+Qdy=\frac{xdx+ydy}{x(x-a)+y(y-b)},\quad R=-\frac{1}{z-c};$$

et faisant

$$\mu=x(x-a)+y(y-b),$$

on trouvera $U=x^2+y^2$: on obtiendra par conséquent les équations

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=\phi(z)\\ \frac{x(x-a)+y(y-b)}{z-c}&=\varphi(z)\end{aligned}\right\}.$$

Intégration des équations différentielles partielles du premier ordre.

344. Je vais passer au troisième cas de la recherche des fonctions de deux ou d'un plus grand nombre de variables. Dans ce cas, on n'a pour déterminer la fonction inconnue que quelques-uns de ses coefficiens différentiels d'un certain ordre, ou une seule équation entre eux. Il constitue ce que l'on appelle *Calcul intégral aux différences partielles*, et qu'on devrait nommer, d'après les remarques du n° 43, *Calcul intégral aux différentielles partielles*; car, les coefficiens différentiels, considérés isolément, ne font connaître que les différentielles partielles, et non pas les différences qui sont l'objet d'un calcul à part, qu'on trouvera dans l'*Appendice* qui termine cet ouvrage. Le coefficient différentiel $\frac{d^{m+n}z}{dx^m dy^n}$, étant multiplié par $dx^m dy^n$, devient $\frac{d^{m+n}z}{dx^m dy^n}dx^m dy^n$, et exprime alors la différentielle $m^{ième}$, par rapport à x, de la différentielle $n^{ième}$ de z, par rapport à y, *et vice versâ*.

345. Les équations différentielles partielles les plus

simples sont celles qui ne renferment qu'un seul coefficient différentiel exprimé par les variables indépendantes : telles sont celles du 2e et du 3e ordre qui ont été traitées dans les nos 271, 277. Au premier ordre, si l'on a $\frac{dz}{dx} = R$, R ne contenant point z, on multipliera par dx, pour obtenir $\frac{dz}{dx}dx = Rdx$, ou $dz = Rdx$; et en intégrant par rapport à x seulement, il viendra

$$z = \int R dx + C.$$

Dans ce résultat, C n'indique pas une simple constante arbitraire, mais une fonction absolument indéterminée, de toutes les variables autres que x, que pourrait contenir la fonction z. Si, par exemple, z dépendait en même temps de x et de y, on aurait $z = \int R dx + \varphi(y)$, en désignant par φ une fonction arbitraire composée d'une manière quelconque de la variable y mêlée avec des constantes. En général, pour un nombre quelconque de variables indépendantes s, t, u, x, y, etc., l'intégrale de $\frac{dz}{dx} = R$, sera $z = \int R dx + \varphi(s, t, u, y, \text{etc.})$, parce qu'il est évident que la fonction $\varphi(s, t, u, y, \text{etc.})$, quelle qu'elle soit, ne variant point quand x varie, on a toujours $\frac{dz}{dx} = R$.

Lorsque z entre dans R, l'équation

$$\frac{dz}{dx} - R = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{dz}{dx}dx - Rdx = 0,$$

tombe alors dans le cas général des équations différentielles à deux variables z et x; si on peut l'inté-

grer par quelqu'une des méthodes précédentes, et que l'on désigne son intégrale par $V = const.$, on aura

$$V = \varphi(s, t, u, y, \text{etc.})$$

pour l'équation primitive de laquelle dépend la fonction z. En effet, si l'on différentie cette équation en ne faisant varier que x et z, le résultat sera de la forme

$$P\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}x = 0,$$

et tel que $-\frac{Q}{P} = R$, ce qui donne $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = R$.

346. Si, pour abréger, on pose

$$\mathrm{d}z = p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y \quad (1),$$

l'équation

$$Pp + Qq = R \quad (2),$$

dans laquelle P, Q, R contiennent à la fois, x, y et z, est la plus générale qu'il soit possible d'avoir entre les coefficiens différentiels du premier ordre p et q, lorsqu'ils ne passent pas le premier degré. En prenant la valeur de p dans cette équation, pour la substituer dans (1), la question sera ramenée à intégrer l'équation

$$P\mathrm{d}z - R\mathrm{d}x = q(P\mathrm{d}y - Q\mathrm{d}x) \quad (3),$$

où le coefficient q est encore indéterminé. Il se présente ici deux cas : 1°. la composition de P, Q et R, peut être telle, que la fonction $P\mathrm{d}z - R\mathrm{d}x$ ne renferme que les variables z et x dont elle contient les différentielles, tandis que la fonction $P\mathrm{d}y - Q\mathrm{d}x$ ne renferme que x et y; 2°. l'une ou l'autre de ces fonctions, ou même toutes deux, peuvent renfermer les trois variables x, y et z.

Dans le premier cas, il existe un facteur μ qui

rend $P\mathrm{d}y - Q\mathrm{d}x$ différentielle exacte (289), et un facteur μ' qui opère la même chose sur $P\mathrm{d}z - R\mathrm{d}x$; en désignant ces différentielles par $\mathrm{d}M$ et $\mathrm{d}N$, on a

$$P\mathrm{d}y - Q\mathrm{d}x = \frac{1}{\mu}\mathrm{d}M, \quad P\mathrm{d}z - R\mathrm{d}x = \frac{1}{\mu'}\mathrm{d}N,$$

et l'équation (3) devient $\mathrm{d}N = \frac{q\mu'}{\mu}\mathrm{d}M$, qui ne peut être intégrable à moins que $\frac{q\mu'}{\mu}$ ne soit une fonction quelconque de M. On posera donc $\frac{q\mu'}{\mu} = \varphi'(M)$, d'où $\mathrm{d}N = \varphi'(M)\mathrm{d}M$, et en intégrant, il viendra $N = \varphi(M)$, résultat dans lequel φ désigne toujours une fonction arbitraire, ce qui s'accorde avec ce qu'on a vu sur la formation des équations différentielles partielles (140).

Pour donner un exemple de ce cas, je prends l'équation

$$px + qy = nz ;$$

on en tire

$$P = x, \quad Q = y, \quad R = nz,$$
$$P\mathrm{d}y - Q\mathrm{d}x = x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x,$$
$$P\mathrm{d}z - R\mathrm{d}x = x\mathrm{d}z - nz\mathrm{d}x ;$$

on trouve par l'intégration des équations

$$x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 0, \quad x\mathrm{d}z - nz\mathrm{d}x = 0,$$

que les facteurs μ et μ' sont respectivement $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^{n+1}}$, et que par conséquent $M = \frac{y}{x}$, $N = \frac{z}{x^n}$: il s'ensuit donc

$$\frac{z}{x^n} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \text{ ou } z = x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

c'est-à-dire, que z est une fonction homogène en x et y, du degré n. En effet, l'équation $px + qy = nz$

n'est autre chose que le théorème des fonctions homogènes donné n° 292, et dont ce qui précède fournit encore une démonstration pour le cas de deux variables.

347. Quand les variables x, y et z sont mêlées indistinctement dans les fonctions $P\mathrm{d}y - Q\mathrm{d}x$, $P\mathrm{d}z - R\mathrm{d}x$, il n'est plus possible de rendre ces fonctions intégrables, chacune en particulier, par le moyen de facteurs, parce qu'on ne saurait intégrer isolément les équations

$$P\mathrm{d}y - Q\mathrm{d}x = 0, \quad P\mathrm{d}z - R\mathrm{d}x = 0;$$

car il faut bien remarquer que z ne doit pas être supposé constant dans la première, ni y dans la seconde; mais on peut encore transformer l'équation (3) en une autre qui soit une différentielle exacte de la forme..... $\mathrm{d}N = \varphi'(M)\mathrm{d}M$, pourvu qu'on regarde les fonctions M et N comme contenant à la fois les trois variables x, y, z.

Dans cet état de choses, l'équation

$$\mathrm{d}N = \varphi'(M)\mathrm{d}M,$$

se développe en

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y + \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z = \varphi'(M)\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y + \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z\right),$$

qui doit s'accorder avec l'équation (3). Tirant de l'une et de l'autre la valeur de $\mathrm{d}z$, et égalant les coefficiens des différentielles $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}x$ (339), on trouve

$$-q = \frac{\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}y} - \varphi'(M)\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}}{\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}z} - \varphi'(M)\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}}, \quad \frac{qQ-R}{P} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} - \varphi'(M)\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}}{\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}z} - \varphi'(M)\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}}.$$

La première de ces équations laisse arbitraire la

fonction $\varphi'(M)$, puisque q est indéterminé ; mais en le chassant de la seconde équation, on change celle-ci en

$$-\frac{Q}{P}\left(\frac{dN}{dy}-\varphi'(M)\frac{dM}{dy}\right)-\frac{R}{P}\left(\frac{dN}{dz}-\varphi'(M)\frac{dM}{dz}\right)=\left(\frac{dN}{dx}-\varphi'(M)\frac{dM}{dx}\right);$$

et comme il y a deux fonctions inconnues M et N, on pourra partager cette dernière équation en deux autres, en égalant séparément à zéro la partie qui est multipliée par $\varphi'(M)$. On aura de cette manière

$$\frac{dM}{dx}+\frac{Q}{P}\frac{dM}{dy}+\frac{R}{P}\frac{dM}{dz}=0,$$
$$\frac{dN}{dx}+\frac{Q}{P}\frac{dN}{dy}+\frac{R}{P}\frac{dN}{dz}=0;$$

or, d'après ce qu'on a vu dans le n° 321, les équations ci-dessus établissent que $M=a$, $N=b$ sont les intégrales du système d'équations différentielles

$$dy-\frac{Q}{P}dx=0,\quad dz-\frac{R}{P}dx=0,$$

qui revient à

$$Pdy-Qdx=0,\quad Pdz-Rdx=0 \quad (4)\text{ :}$$

c'est donc à l'intégration de ce système que se réduit ici la détermination des fonctions M et N.

Prenons pour exemple l'équation

$$xp+zq=-y;$$

on en tire d'abord

$$xdy-zdx=0,\quad xdz+ydx=0 \quad (4');$$

équations dont aucune n'est intégrable en particulier ; mais, comme l'a remarqué Monge, il n'est pas nécessaire de descendre jusqu'au second ordre pour en déduire des différentielles exactes : il suffit d'éliminer dx,

ce qui donne

$$ydy + zdz = 0 \quad \text{et} \quad y^2 + z^2 = a.$$

Prenant dans cette dernière la valeur de y, on change la deuxième des équations (4') en

$$xdz + dx\sqrt{a - z^2} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{dz}{\sqrt{a - z^2}} + \frac{dx}{x} = 0,$$

dont l'intégrale est

$$\operatorname{arc}\left(\sin = \frac{z}{\sqrt{a}}\right) + lx = lb;$$

remettant pour a sa valeur, et passant aux nombres, on obtient

$$e^{\operatorname{arc}\left(\sin = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)} x = b,$$

d'où l'on conclut

$$e^{\operatorname{arc}\left(\sin = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)} x = \varphi(y^2 + z^2),$$

pour l'intégrale de l'équation différentielle partielle proposée.

348. On facilite beaucoup, dans un grand nombre de cas, l'intégration des équations différentielles partielles du premier ordre, à trois variables, en les partageant en deux autres, par l'introduction d'une quantité indéterminée, ainsi qu'on va le voir dans l'exemple suivant.

Soit l'équation $f(p, x) = F(q, y)$; si l'on fait $f(p, x) = \omega$, on aura en même temps $F(q, y) = \omega$, et l'on en tirera les équations

$$p = f_1(\omega, x), \quad q = F_1(\omega, y),$$

$f_{,}$ et $F_{,}$ étant des fonctions déduites de celles que désignent f et F. L'équation $dz = pdx + qdy$, deviendra

$$dz = dx f_{,}(\omega, x) + dy F_{,}(\omega, y);$$

mais si l'on représente les intégrales

$$\int dx f_{,}(\omega, x), \quad \int dy F_{,}(\omega, y),$$

prises en n'ayant égard qu'aux variables x et y, par P et Q, ces dernières quantités étant aussi des fonctions de ω, il viendra

$$dx f_{,}(\omega, x) = \frac{dP}{dx} dx = dP - \frac{dP}{d\omega} d\omega,$$
$$dy F_{,}(\omega, y) = \frac{dQ}{dy} dy = dQ - \frac{dQ}{d\omega} d\omega,$$

et par conséquent

$$dz = dP + dQ - \left(\frac{dP}{d\omega} + \frac{dQ}{d\omega}\right) d\omega.$$

Cette dernière équation ne peut devenir différentielle exacte, que par la supposition de

$$\frac{dP}{d\omega} + \frac{dQ}{d\omega} = \varphi'(\omega),$$

d'où il suit

$$\int \left(\frac{dP}{d\omega} + \frac{dQ}{d\omega}\right) d\omega = \varphi(\omega):$$

on aura donc

$$z + \varphi(\omega) = P + Q, \quad \varphi'(\omega) = \frac{dP}{d\omega} + \frac{dQ}{d\omega},$$

équations entre lesquelles il faudra éliminer ω, lorsque la fonction arbitraire $\varphi(\omega)$ sera déterminée.

Il suffit souvent de substituer dans l'équation

$$dz = pdx + qdy,$$

la valeur de p ou de q, tirée immédiatement de la proposée, et d'intégrer ensuite par parties. Lorsqu'on a, par exemple, $p = f(q)$ (161), il vient

$$dz = dxf(q) + qdy ;$$

on trouve

$$z = xf(q) + qy - \int [xf'(q) + y]\, dq ;$$

et comme l'intégration indiquée ne peut s'effectuer qu'en posant $xf'(q) + y = \varphi'(q)$, il en résulte

$$z + \varphi(q) = xf(q) + qy, \quad \varphi'(q) = xf'(q) + y \ (*).$$

(*) Monge a lié, par des considérations très ingénieuses, l'intégration des équations différentielles partielles avec la génération des surfaces. (*Voyez* sa *Géométrie analytique.*) L'analogie des deux sujets se montre aussi par les formes d'intégrales sur lesquelles nous sommes tombés dans ce qui précède. L'équation $N = \varphi(M)$ (347) se rapporte au mode de génération indiqué dans le n° 141 ; $M = a$, $N = \varphi(a) = b$, sont les équations des lignes dont se composent les surfaces correspondantes à l'équation différentielle partielle proposée, et qui se succèdent suivant la loi exprimée par la forme de la fonction φ.

La seconde forme d'intégrale obtenue dans le n° précédent, répond au mode assigné dans le n° 162, pour la génération des surfaces développables, auxquelles se rapporte le second exemple... $p = f(q)$. L'intégrale étant alors exprimée par deux équations de la forme

$$V = 0, \quad \frac{dV}{d\omega} = 0,$$

représente les intersections successives d'une suite de surfaces tirées de l'équation $V = 0$, par la variation de la quantité ω, et appartient par conséquent à la limite de toutes ces intersections : cette limite est donc formée de lignes dont la nature est donnée par les deux équations qui composent l'intégrale, lorsqu'on a particularisé la fonction arbitraire. Monge nomme ces lignes *caractéristiques*, et appelle *surfaces enveloppes*, celles qui résultent du système d'équations considéré en dernier lieu.

De l'intégration des équations différentielles partielles des ordres supérieurs au premier.

349. Au second ordre, les coefficiens différentiels sont au nombre de trois pour une fonction de deux variables, et une équation différentielle partielle du même ordre exprime en général une relation entre les variables indépendantes, la fonction cherchée et ses coefficiens différentiels, tant du second ordre que du premier. Dans un ordre quelconque, cette relation peut embrasser, avec les variables, tous les coefficiens différentiels depuis le premier ordre jusqu'à celui de l'équation inclusivement. J'en rapporterai d'abord quelques-unes qui s'abaissent à des ordres inférieurs.

1°. Toute équation à trois variables qui est de la forme

$$f\left\{x, y, \frac{d^n z}{dy^n}, \frac{d^{n+1}z}{dx dy^n}, \frac{d^{n+2}z}{dx^2 dy^n}, \ldots \frac{d^{n+m}z}{dx^m dy^n}\right\} = 0,$$

s'abaisse sur-le-champ, de l'ordre $m+n$ à l'ordre m, en faisant $\frac{d^n z}{dy^n} = v$, parce qu'elle se change en

$$f\left\{x, y, v, \frac{dv}{dx}, \frac{d^2 v}{dx^2}, \ldots \frac{d^m v}{dx^m}\right\} = 0.$$

On y doit supposer alors y constant, puisque tous les coefficiens différentiels de v qui s'y trouvent sont relatifs à x, et elle peut par conséquent se traiter comme n'étant qu'entre les deux variables x et v; mais il est évident que pour donner à l'expression de v toute la généralité dont elle est susceptible, il sera nécessaire de remplacer les m constantes arbitraires qu'elle doit renfermer, par autant de fonctions arbitraires de la

variable y, prise d'abord pour constante. Ayant obtenu v, on remonte à z, par le moyen de l'équation $\frac{d^n z}{dy^n} = v$, dans laquelle on doit alors regarder x comme constant, et qui, devenant par là une équation de l'ordre n entre deux variables seulement, pourra se traiter ainsi que les équations de ce genre, en observant néanmoins de changer en fonctions arbitraires de x, les n constantes arbitraires introduites par cette nouvelle intégration.

2°. Les équations de la forme

$$f\left(x,\ y,\ z,\ \frac{dz}{dx},\ \frac{d^2z}{dx^2},\ \ldots\ldots\ \frac{d^nz}{dx^n}\right) = 0,$$

$$f\left(x,\ y,\ z,\ \frac{dz}{dy},\ \frac{d^2z}{dy^2},\ \ldots\ldots\ \frac{d^nz}{dy^n}\right) = 0,$$

peuvent toujours être traitées immédiatement, comme s'il n'y entrait que deux variables, savoir, x et z dans la première, y et z dans la seconde; et après l'intégration, on substituera aux constantes, dans l'une, des fonctions de y, et dans l'autre, des fonctions de x.

Les équations du second ordre,

$$\frac{d^2z}{dxdy} + P\frac{dz}{dx} = Q, \quad \frac{d^2z}{dxdy} + P\frac{dz}{dy} = Q,$$

dans lesquelles P et Q ne contiennent que x et y, se rapportent à la première forme. En faisant $\frac{dz}{dx} = v$, la première devient $\frac{dv}{dy} + Pv = Q$, équation du premier degré et du premier ordre, par rapport aux variables v et y, et dont l'intégrale est

$$v = e^{-\int P dy}\left(\int e^{\int P dy} Q dy + C\right) \quad (285).$$

Si l'on met pour v sa valeur $\frac{dz}{dx}$, et qu'on change C en $\varphi(x)$, on aura

$$\frac{dz}{dx} = e^{-\int P dy}\left[\int e^{\int P dy} Q dy + \varphi(x)\right];$$

en intégrant cette fois, par rapport à z et à x seuls, on trouvera

$$z = \int dx e^{-\int P dy}\left[\int e^{\int P dy} Q dy + \varphi(x)\right] + \psi(y);$$

en traitant de même la seconde équation, on arriverait à

$$z = \int dy e^{-\int P dx}\left[\int e^{\int P dx} Q dx + \varphi(y)\right] + \psi(x).$$

Lorsqu'on aura $P = 0$, les résultats ci-dessus se réduiront à

$$z = \int dx \int Q dy + \int dx \varphi(x) + \psi(y),$$

dans un cas, et dans l'autre à

$$z = \int dy \int Q dx + \int dy \varphi(y) + \psi(x);$$

mais comme la fonction φ est arbitraire, on écrira simplement

$$z = \int dx \int Q dy + \varphi(x) + \psi(y),$$
$$z = \int dy \int Q dx + \varphi(y) + \psi(x).$$

J'observerai que ces derniers cas ne dépendent que de l'intégration des fonctions d'une seule variable, et ont été traités sous ce point de vue, dans le n° 271.

On a des exemples de la seconde forme générale dans les deux équations

$$\frac{d^2z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx} = Q, \quad \frac{d^2z}{dy^2} + P\frac{dz}{dy} = Q;$$

la première doit être traitée comme une équation du second ordre, entre les variables x et z; les cons-

tantes arbitraires dues à son intégration seront des fonctions de y : on opérera de la même manière sur la deuxième, par rapport aux variables y et z, et on changera les constantes arbitraires en fonctions de x. Pour ne donner que le cas le plus simple, je réduirai les équations proposées à

$$\frac{d^2z}{dx^2} = Q, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = Q,$$

et je supposerai que Q ne contienne que x et y; les formules du n° 241 donneront immédiatement

$$z = \int dx \int Q dx + Cx + C', \quad z = \int dy \int Q dy + Cy + C',$$

d'où l'on conclura

$$z = \int dx \int Q dx + x\varphi(y) + \psi(y), \quad z = \int dy \int Q dy + y\varphi(x) + \psi(x).$$

350. Dans le second ordre, je considérerai seulement les équations où tous les coefficiens différentiels de cet ordre ne sont qu'au premier degré; et pour simplifier les calculs, je ferai usage des dénominations suivantes :

$$dz = p dx + q dy,$$
$$dp = r dx + s dy, \quad dq = s dx + t dy,$$
$$d^2z = dp dx + dq dy = r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2,$$

déjà employées dans le n° 144.

L'équation différentielle partielle du second ordre et à trois variables, considérée dans le cas général, ne peut donner que l'expression de l'un des coefficiens r, s, t, en fonction des deux autres et des quantités p, q, x, y, z, ce qui ne suffit pas pour déterminer les différentielles dp et dq. On peut aussi, au moyen de ces différentielles, éliminer de l'équation proposée, deux des trois coefficiens r, s, t, et le résultat sera la

relation que cette équation suppose entre dp et dq : c'est ce procédé que Monge a suivi.

Je l'appliquerai à l'équation

$$Rr + Ss + Tt = V,$$

où je supposerai que les quantités R, S, T et V renferment, d'une manière quelconque, x, y, z, p et q. En y substituant les valeurs de r et de t, tirées des équations

$$dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy,$$

et qui sont

$$r = \frac{dp - s\,dy}{dx}, \quad t = \frac{dq - s\,dx}{dy},$$

on trouve

$$R\,dp\,dy + T\,dq\,dx - V\,dx\,dy = s(R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2),$$

équation dont il semble qu'il faudrait intégrer séparément les deux membres, à cause du coefficient différentiel indéterminé s, qui multiplie le second ; mais ici, comme dans le n° 347, il suffit de parvenir à deux équations primitives $M = a$, $N = b$, qui satisfassent en même temps aux équations

$$\begin{aligned} R\,dp\,dy + T\,dq\,dx - V\,dx\,dy &= 0, \\ R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2 &= 0; \end{aligned}$$

l'intégrale de la proposée sera encore $N = \varphi(M)$.

Pour le démontrer, je transforme d'abord les équations précédentes en d'autres où les différentielles ne montent qu'au premier degré, et pour cela je fais $dy = m\,dx$. La seconde de ces équations devenant, après la substitution,

$$Rm^2 - Sm + T = 0 \ldots\ldots (A),$$

détermine la quantité m; mettant ensuite pour dy sa valeur dans $Rdpdy + Tdqdx - Vdxdy = 0$, on aura pour chacune des valeurs dont m est susceptible, un système d'équations de la forme

$$\left.\begin{aligned} dy - mdx &= 0 \\ Rmdp + Tdq - Vmdx &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1),$$

auquel il faudra joindre l'équation

$$dz = pdx + qdy,$$

qui exprime la relation qu'ont avec la fonction z, les coefficiens p et q.

Cela posé, si les équations $M = a$, $N = b$ satisfont aux équations (1), et que dans leurs différentielles

$$\frac{dM}{dx}dx + \frac{dM}{dy}dy + \frac{dM}{dz}dz + \frac{dM}{dp}dp + \frac{dM}{dq}dq = 0,$$
$$\frac{dN}{dx}dx + \frac{dN}{dy}dy + \frac{dN}{dz}dz + \frac{dN}{dp}dp + \frac{dN}{dq}dq = 0,$$

on mette au lieu de dz sa valeur $pdx + qdy$, et au lieu de dy et de dq, celles que donnent les équations (1), les résultantes

$$\left(\frac{dM}{dx} + m\frac{dM}{dy} + (p + qm)\frac{dM}{dz} + \frac{Vm}{T}\frac{dM}{dq}\right)dx + \left(\frac{dM}{dp} - \frac{Rm}{T}\frac{dM}{dq}\right)dp = 0,$$
$$\left(\frac{dN}{dx} + m\frac{dN}{dy} + (p + qm)\frac{dN}{dz} + \frac{Vm}{T}\frac{dN}{dq}\right)dx + \left(\frac{dN}{dp} - \frac{Rm}{T}\frac{dN}{dq}\right)dp = 0,$$

devront être identiques, chacune en particulier, et se partager par conséquent dans les suivantes :

$$\frac{dM}{dx}+m\frac{dM}{dy}+(p+qm)\frac{dM}{dz}+\frac{Vm}{T}\frac{dM}{dq}=0,$$
$$\frac{dM}{dp}-\frac{Rm}{T}\frac{dM}{dq}=0,$$
$$\frac{dN}{dx}+m\frac{dN}{dy}+(p+qm)\frac{dN}{dz}+\frac{Vm}{T}\frac{dN}{dq}=0,$$
$$\frac{dN}{dp}-\frac{Rm}{T}\frac{dN}{dq}=0.$$

L'équation $N=\varphi(M)$ étant différentiée, donne

$$dN=\varphi'(M)\,dM,$$

ou

$$\frac{dN}{dx}dx+\frac{dN}{dy}dy+\frac{dN}{dz}dz+\frac{dN}{dp}dp+\frac{dN}{dq}dq=$$
$$\varphi'(M)\left\{\frac{dM}{dx}dx+\frac{dM}{dy}dy+\frac{dM}{dz}dz+\frac{dM}{dp}dp+\frac{dM}{dq}dq\right\};$$

si l'on substitue, dans cette dernière, les valeurs de

$$\frac{dM}{dx},\ \frac{dM}{dp},\ \frac{dN}{dx},\ \frac{dN}{dp},$$

prises dans les quatre précédentes, et qu'on change dz en $pdx+qdy$, on obtiendra

$$\left(\frac{dN}{dy}+q\frac{dN}{dz}\right)(dy-mdx)$$
$$+\frac{1}{T}\frac{dN}{dq}(Rmdp+Tdq-Vmdx)=$$
$$\varphi'(M)\left\{\left(\frac{dM}{dy}+q\frac{dM}{dz}\right)(dy-mdx)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{T}\frac{dM}{dq}(Rmdp+Tdq-Vmdx)\right\},$$

ce qui revient à

$$Rmdp+Tdq-Vmdx=\omega\,(dy-mdx),$$

en faisant

$$\omega = -\frac{\frac{dN}{dy} + q\frac{dN}{dz} - \varphi'(M)\left(\frac{dM}{dy} + q\frac{dM}{dz}\right)}{\frac{1}{T}\left(\frac{dN}{dq} - \varphi'(M)\frac{dM}{dq}\right)}.$$

Si l'on remet $r\,dx + s\,dy$ et $s\,dx + t\,dy$, pour dp et dq, et que l'on égale à zéro ce qui multiplie chacune des différentielles indépendantes dx et dy, on obtiendra

$$Rmr + Ts - Vm = -\omega m, \quad Rms + Tt = \omega;$$

puis en tirant de ces équations les valeurs des coefficiens différentiels r et t, pour les substituer dans la proposée, elle deviendra, après les réductions,

$$s(Rm^2 - Sm + T) = 0,$$

et, en vertu de l'équation (A), elle sera satisfaite indépendamment des quantités ω et s.

Le théorème démontré ci-dessus, ainsi que ses analogues dans les ordres supérieurs, n'a pas la même généralité que celui du n° 347; car il faut bien remarquer que les équations (1) peuvent renfermer à la fois les cinq variables x, y, z, p et q, et qu'en y joignant même l'équation $dz = p\,dx + q\,dy$, on ne saurait parvenir, par l'élimination, qu'à une résultante contenant trois variables, laquelle par conséquent ne pourrait dériver d'une seule équation primitive, que sous certaines conditions (339). On se tromperait néanmoins si l'on concluait de là que quand les conditions dont on vient de parler ne sont pas remplies, l'équation différentielle partielle proposée ne peut elle-même dériver d'une seule équation primitive; mais pour parvenir à son intégrale, il faut avoir recours à d'autres

procédés, et le plus souvent on n'arrive qu'à un développement en série, comme on le verra plus loin (352, 353).

351. Soit, pour exemple, l'équation

$$Ar + Bs + Ct = V,$$

dans laquelle A, B et C sont constans, et V est une fonction de x et de y. L'équation (A) devient pour ce cas $Am^2 - Bm + C = 0$; ses racines que je désignerai par m' et m'', étant constantes, fournissent deux systèmes d'équations (1) qui donnent, par l'intégration,

$$\left.\begin{aligned} y - m'x &= a \\ Am'p + Cq - m'\int V\,dx &= b \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} y - m''x &= a' \\ Am''p + Cq - m''\int V\,dx &= b' \end{aligned}\right\},$$

et où l'intégrale $\int V\,dx$ ne dépend que d'une seule variable parce qu'on peut chasser y de V, au moyen de sa valeur prise dans la première équation de chaque système : on a donc en même temps les deux intégrales premières de la proposée,

$$Am'p + Cq - m'\int V\,dx = \varphi(y - m'x),$$
$$Am''p + Cq - m''\int V\,dx = \psi(y - m''x);$$

et en intégrant l'une quelconque de ces équations, on arrive à l'intégrale seconde.

Si l'on prend la première, par exemple, elle donne

$$p = -\frac{C}{Am'}q + \frac{1}{A}\int V\,dx + \varphi(y - m'x);$$

on peut, pour simplier, mettre m'' au lieu de $\frac{C}{Am'}$, puisqu'en vertu de l'équation (A), $m'm'' = \frac{C}{A}$; et en

substituant dans $dz = p\,dx + q\,dy$, on trouvera

$$dz - \frac{dx}{A}\int V\,dx - dx\varphi(y - m'x) = q(dy - m''dx);$$

les équations à intégrer (347) seront donc

$$dy - m''dx = 0, \quad dz - \frac{dx}{A}\int V\,dx - dx\varphi(y - m'x) = 0.$$

On tire de l'une, $y - m''x = a'$, ce qui change l'autre en

$$dz - \frac{dx}{A}\int V\,dx - dx\varphi[a' + (m'' - m')x] = 0;$$

mais le dernier terme de cette équation peut être mis sous la forme

$$(m'' - m')dx\varphi'[a' + (m'' - m')x],$$

parce que la fonction φ est arbitraire; et l'on voit alors que l'intégrale de ce terme est $\varphi[a' + (m'' - m')x]$, φ désignant une nouvelle fonction arbitraire dépendante de φ'. Par ce moyen, l'équation précédente s'intègre et donne

$$z - \frac{1}{A}\int dx\int V\,dx - \varphi(y - m'x) = b',$$

lorsqu'on remet pour a' sa valeur. Il faut bien remarquer que pour obtenir $\int dx\int V\,dx$, on doit intégrer une première fois par rapport à x, en substituant au lieu de y sa valeur, tirée de l'équation $y - m'x = a$, comme il a été dit plus haut; mais lorsqu'on sera parvenu au résultat, on remettra au lieu de a sa valeur $y - m'x$, et avant d'effectuer la seconde intégration, on changera y en $a' + m''x$, ainsi que l'exige l'équation $y - m''x = a'$, trouvée en dernier lieu. En général, quand on aura plusieurs de ces intégrations successives à effectuer, on ne pourra jamais employer

à leur simplification que les équations qui doivent avoir lieu en même temps. Avec ces attentions, l'intégrale seconde de l'équation proposée, $Ar+Bs+Ct=V$. sera

$$z-\frac{1}{A}\int dx\int V\,dx=\varphi(y-m'x)+\psi(y-m''x).$$

Si l'on avait $A=1$, $B=0$, $C=-c^2$ et $V=0$, ce qui changerait l'équation proposée en

$$r-c^2t=0, \quad \text{ou} \quad \frac{d^2z}{dx^2}=c^2\frac{d^2z}{dy^2}\ (*),$$

l'intégrale deviendrait

$$z=\varphi(y-cx)+\psi(y+cx).$$

352. Non-seulement la méthode précédente n'embrasse pas tous les cas de l'équation du premier degré et du second ordre

$$Ar+Bs+Ct+Dp+Eq+Fz=U,$$

lors même qu'on y suppose constans les coefficiens du premier membre, mais elle échoue sur l'équation très simple

$$r=q, \quad \text{ou} \quad \frac{d^2z}{dx^2}=\frac{dz}{dy},$$

qu'elle fait dépendre de l'intégration des équations simultanées

$$dy=0, \quad dp-q\,dx=0 \quad (350);$$

car, la seconde, qui renferme trois variables, p, q et x, ne saurait devenir une différentielle exacte (339).

Il ne faut pourtant pas conclure de là que l'équation

(*) Cette équation est celle des cordes vibrantes.

différentielle partielle proposée ne puisse pas être intégrée, et même d'une manière très générale. Si d'abord l'on y fait $z = Ae^{mx+ny}$, les lettres A, m et n désignant des constantes indéterminées, le coefficient A et l'exponentielle disparaîtront, et il ne restera que l'équation à deux inconnues

$$m^2 = n,$$

à laquelle on pourra satisfaire d'une infinité de manières. Si l'on se donne m, on en déduira l'expression

$$z = Ae^{mx+m^2y},$$

qui vérifie l'équation proposée, quelles que soient les valeurs de A et de m: si donc on prend pour ces quantités une suite infinie de valeurs

$$A_1,\ m_1,\ A_2,\ m_2,\ A_3,\ m_3,\ \text{etc.},$$

on trouvera autant d'expressions, dont la somme satisfera encore à la proposée (309), en sorte qu'on aura

$$z = Ae^{mx+m^2y} + A_1e^{m_1x+m_1^2y} + A_2e^{m_2x+m_2^2y} + \text{etc.},$$

série à laquelle on pourra donner autant de termes qu'on voudra.

Si l'on avait pris m pour inconnue, il en serait résulté

$$m = \pm\sqrt{n} \quad \text{et} \quad z = Ae^{\pm x\sqrt{n}+ny},$$

d'où l'on aurait pu déduire pour z deux séries différentes en apparence, savoir,

$$z = Ae^{x\sqrt{n}+ny} + A_1e^{x\sqrt{n_1}+n_1y} + \text{etc.},$$
$$z = Ae^{-x\sqrt{n}+ny} + A_1e^{-x\sqrt{n_1}+n_1y} + \text{etc.};$$

mais ces résultats ne sont pas plus généraux que le

premier, puisqu'on peut donner à m des valeurs négatives aussi bien que des valeurs positives.

353. Laplace avait cru d'abord que l'équation proposée ne pouvait admettre de fonctions arbitraires dans son intégrale ; M. Paoli a le premier reconnu le contraire, lorsque cette intégrale était développée en série, suivant les puissances de y. En effet, si l'on pose

$$z = P + Qy + Ry^2 + Sy^3 + \text{etc.},$$

P, Q, R, S désignant des fonctions de x, on aura

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2P}{dx^2} + \frac{d^2Q}{dx^2}\,y + \frac{d^2R}{dx^2}\,y^2 + \text{etc.},$$

$$\frac{dz}{dy} = Q + 2Ry + 3Sy^2 + \text{etc.},$$

d'où l'on conclura

$$Q = \frac{d^2P}{dx^2}, \quad R = \frac{1}{2}\frac{d^2Q}{dx^2} = \frac{1}{2}\frac{d^4P}{dx^4}, \quad \text{etc.};$$

et comme rien ne détermine P, on peut le supposer égal à une fonction arbitraire de x : on aura ainsi

$$z = \varphi(x) + \varphi''(x)\frac{y}{1} + \varphi^{IV}(x)\frac{y^2}{1.2} + \text{etc.},$$

où

$$\varphi''(x) = \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}, \quad \varphi^{IV}(x) = \frac{d^4\varphi(x)}{dx^4}, \quad \text{etc.}$$

Si l'on développait l'intégrale suivant les puissances de x, en posant

$$z = P + Qx + Rx^2 + Sx^3 + \text{etc.},$$

P, Q, R, S, etc. désignant alors des fonctions de y, les deux premiers coefficiens P, Q resteraient indéterminés, et l'on pourrait par conséquent introduire

dans l'expression de z, deux fonctions arbitraires; mais M. Poisson a montré que ce second résultat n'était pas plus général que le premier, et que la même circonstance s'offrait dans toute équation qui ne contenait pas en même temps les deux coefficiens différentiels de son ordre, pris par rapport à x seule et à y seul (*).

354. Ce qui précède suffit pour prouver qu'on ne doit pas établir une analogie complète entre les fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations différentielles partielles, et les constantes des intégrales des équations différentielles ordinaires (298). Le nombre des premières n'est pas toujours égal à l'exposant de l'ordre de l'équation différentielle partielle proposée.

Cette remarque peut se faire directement sur l'élimination des fonctions arbitraires, entre les équations primitives et leurs différentielles partielles (140); car soit $u=0$, une équation contenant, avec les variables x, y, z, deux fonctions arbitraires $\varphi(s)$, $\psi(t)$ des quantités s et t données en x, y, z; si l'on passe aux différentielles premières et secondes, suivant ce qui a été prescrit dans le n° 137, on trouvera cinq nouvelles équations, savoir,

$$\frac{du}{dx}=0, \quad \frac{du}{dy}=0,$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=0, \quad \frac{d^2u}{dx\,dy}=0, \quad \frac{d^2u}{dy^2}=0,$$

et l'on aura introduit les quatre fonctions

$$\frac{d\varphi(s)}{ds}=\varphi'(s), \quad \frac{d\psi(t)}{dt}=\psi'(t),$$

$$\frac{d^2\varphi(s)}{ds^2}=\varphi''(s), \quad \frac{d^2\psi(t)}{dt^2}=\psi''(t):$$

(*) *Voyez* le Traité in-4°, t. II, p. 639.

on aura donc à éliminer six fonctions inconnues, c'est-à-dire autant qu'on a d'équations, ce qui ne pourra se faire que dans le cas où, par la forme particulière de l'équation $u = 0$, deux de ces fonctions disparaîtront en même temps.

355. Les fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations différentielles partielles, se déterminent, en supposant que la fonction z prenne des formes particulières, lorsqu'on assigne des relations entre les variables y et x. Voici deux exemples de cette détermination, dans les cas les plus simples.

1°. Si l'on a $1 = M\varphi(V)$, M et V désignant des fonctions données en x, y et z, et qu'on veuille déterminer la fonction représentée par la caractéristique φ, de manière qu'en posant $F(x, y, z) = 0$, on ait en même temps $f(x, y, z) = 0$, les caractéristiques F et f désignant des fonctions connues, on fera $V = t$, et l'on combinera les trois équations

$$V = t, \quad F(x, y, z) = 0, \quad f(x, y, z) = 0,$$

pour en tirer des valeurs de x, y et z, en t; substituant ces valeurs dans M, qui deviendra une fonction de t, que je désigne par T, on aura

$$1 = T\varphi(t), \quad \text{ou} \quad \varphi(t) = \frac{1}{T},$$

et la fonction φ sera par conséquent déterminée, si l'on remet dans cette dernière équation pour t et T, leur valeur en x, y et z.

2°. Soit

$$1 = M\varphi(V) + N\psi(V);$$

comme il y a deux fonctions à déterminer, il faut qu'il y ait deux conditions : on doit supposer que

$$F(x, y, z) = 0 \text{ donne } f(x, y, z) = 0,$$

et que $F'(x, y, z) = 0$ donne $f'(x, y, z) = 0$.

Faisant toujours $V = t$, et tirant des trois équations

$$V = t, \quad F(x, y, z) = 0, \quad f(x, y, z) = 0,$$

les valeurs de x, y, z en t, on changera M, N en fonctions de t; et désignant par T et θ ces fonctions, on aura

$$1 = T\varphi(t) + \theta\psi(t) \ldots\ldots (1).$$

On combinera ensuite les équations

$$V = t, \quad F'(x, y, z) = 0, \quad f'(x, y, z) = 0,$$

pour en déduire des valeurs de x, y, z en t, afin de transformer encore M et N en fonctions de cette seule variable; et si les résultats sont représentés par T' et θ', il viendra

$$1 = T'\varphi(t) + \theta'\psi(t) \ldots\ldots (2).$$

Au moyen des équations (1) et (2) on déterminera les fonctions φ et ψ en t, puis on remettra à la place de t sa valeur V (*).

De la méthode des variations.

Recherche de la variation d'une fonction quelconque.

356. Toutes les applications du Calcul différentiel présentées précédemment, supposent que la dépendance des variables demeure constamment la même dans le cours de la question; mais il y a divers genres de pro-

(*) La détermination des fonctions arbitraires revient à faire passer par des courbes données, les surfaces qui représentent les équations proposées; et ces courbes peuvent être continues ou discontinues, ainsi que les fonctions elles-mêmes. Si les fonctions φ et ψ dépendaient de quantités différentes, on ne pourrait plus procéder comme ci-dessus. (*Voyez* le Traité in-4°, t. III, p. 228.)

blèmes pour lesquels il faut concevoir que cette dépendance change : en voici un exemple. Quand V désigne une fonction contenant x, y et les coefficiens différentiels de y, l'intégrale $\int V\mathrm{d}x$ est susceptible, entre les mêmes valeurs de x, d'une infinité de valeurs qui dépendent de la relation établie entre x et y; en sorte qu'on peut demander quelle est, parmi toutes les relations possibles, celle qui fait prendre à l'intégrale $\int V\mathrm{d}x$, entre les limites données, la plus grande ou la plus petite valeur. L'intégrale $\int V\mathrm{d}x$, lorsqu'on ne particularise pas la relation de y à x, exprimant la mesure d'une propriété commune à toutes les courbes, on demande alors pour quelle courbe cette propriété est un *maximum* ou un *minimum*. Il est visible que si CE, *fig.* 60, représente cette courbe, il faudra que pour toute autre, $\gamma\varepsilon$, l'intégrale $\int V\mathrm{d}x$ ait une valeur plus petite dans le premier cas, et plus grande dans le second. Pour satisfaire à cette condition, la première chose à chercher est la différence qu'un changement quelconque dans la relation de y à x, ou dans la nature de la courbe qui représente cette relation, produit sur l'intégrale $\int V\mathrm{d}x$. Ce changement s'exprime en faisant varier y indépendamment de x; car lorsque l'on considère deux courbes CE et $\gamma\varepsilon$, la même abscisse AP répond à deux ordonnées PM et $P\mu$, et leur différence $M\mu$ doit être distinguée des différences $M'R$ et $\mu'\rho$, qui ont lieu entre deux ordonnées consécutives prises sur la même courbe. FIG. 60.

Lagrange, qui marqua le commencement de sa carrière par la découverte du Calcul des variations, en a fait aussi à la mécanique une application de la plus haute importance, dont on saisira facilement le but, si l'on observe qu'on peut considérer les coordonnées des différens

points d'un corps qui se meut, soit pour comparer au même instant deux points de ce corps, soit pour comparer deux positions consécutives du même point. Dans l'un de ces cas, il n'y a entre les coordonnées, de dépendance que celle qui résulte des surfaces qui terminent le corps; dans l'autre, les coordonnées changent suivant les conditions du mouvement établi, et avec une variable nouvelle qui est la mesure du temps: voilà donc encore deux manières de faire varier les mêmes quantités, qu'il est à propos de marquer par des signes distincts. Celle de ces manières qui succède à l'autre, constitue le *Calcul des Variations*, dont on ne peut embrasser les divers usages qu'en le regardant comme *ayant pour but de différentier sous un nouveau point de vue, des quantités qui ont déjà été différentiées sous un autre :* on établit ensuite dans le second mode de différentiation, l'hypothèse convenable à la nature des questions qu'on se propose de résoudre (*).

357. C'est par la caractéristique δ que Lagrange désigne la nouvelle différentiation, et cet usage a été adopté. Pour ne pas sortir des limites de mon sujet, je me bornerai à développer les principes de l'application du calcul des variations aux questions géométriques.

Dans ces questions, la caractéristique d s'emploie pour le passage d'un point à un autre sur la même courbe, et la caractéristique δ est appliquée au changement de courbe: ainsi $M'R$ étant représenté par dy (60), $M\mu$ sera δy; et il suit de là que

$$P'M' = y + \mathrm{d}_0 y, \quad P\mu = y + \delta y.$$

(*) *Voyez* la *Mécanique analytique*, 2e édit., p. 80 du t. I.

En passant du point M' au point μ', puis tirant μr parallèle à MM', on verra que

$$\mu' r = \mu' \rho - M' R = \mathrm{d}.P\mu - \mathrm{d}.PM$$

est le changement de $\mathrm{d}y$, d'une courbe à l'autre, et l'on aura

$$\begin{aligned} P'\mu' &= P\mu + \rho r + \mu' r = y + \delta y + \mathrm{d}y + \delta \mathrm{d}y \\ &= y + \mathrm{d}y + \delta(y + \mathrm{d}y); \end{aligned}$$

mais le point μ' étant consécutif au point μ, sur la courbe $y\varepsilon$, on aura aussi

$$P'\mu' = y + \delta y + \mathrm{d}(y + \delta y) = y + \delta y + \mathrm{d}y + \mathrm{d}\delta y,$$

et la comparaison de ces deux expressions donnera

$$\delta \mathrm{d}y = \mathrm{d}\delta y.$$

La même chose peut aussi se prouver sans la considération des courbes, en représentant par $\varphi(x)$ l'état primitif de y, et par une autre fonction $\psi(x)$ son état après la variation (*). Alors $\delta y = \psi(x) - \varphi(x)$ sera une

(*) Afin de donner une origine commune aux fonctions φ et ψ, Euler, qui s'empressa d'adopter et d'éclaircir le calcul des variations, regardait la valeur primitive de y, ou $\varphi(x)$, comme déduite d'une autre fonction, contenant, avec la variable x, une nouvelle variable t, et se changeant en $\varphi(x)$ lorsque $t = 0$. (*Novi Comm. Acad. Petrop.*, t. XVI, p. 35.) Par ce moyen, $y + \delta y$ devient $y + \frac{dy}{dt}\,dt$, et $\frac{dy}{dt}$ étant pris dans l'hypothèse de $t = 0$, représente, tant qu'on ne particularise point la composition de y en t, une fonction arbitraire de x. La valeur générale de y serait exprimée par la série

$$y + \frac{dy}{dt}\frac{dt}{1} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt^2}{1.2} + \text{etc.},$$

la variable t étant supposée égale à zéro dans y et ses coefficiens différentiels; et en prenant les coefficiens différentiels de cette série par rapport à x, on formerait toutes les quantités qu'il faut substituer pour obtenir l'état varié de l'intégrale $\int V \mathrm{d}x$, ordonné suivant les

certaine fonction de x, et par conséquent une fonction de y, à cause de la liaison primitive de ces variables : désignant donc par π cette dernière fonction, on aura

$$\delta y = \pi(y).$$

D'après cette loi, et faisant pour abréger $y + \mathrm{d}y = y'$, on aura pareillement

$$\delta y' = \pi(y');$$

d'où l'on conclura

$$\delta y' - \delta y = \pi(y') - \pi(y) = \mathrm{d}.\pi(y) = \mathrm{d}\delta y ;$$

mais comme

$$\mathrm{d}y = y' - y,$$

il viendra, en prenant les variations,

$$\delta \mathrm{d}y = \delta y' - \delta y = \pi(y') - \pi(y),$$

ce qui donne encore

$$\delta \mathrm{d}y = \mathrm{d}\delta y.$$

Il suit de là que $\delta \mathrm{d}^2 y = \mathrm{d}\delta \mathrm{d}y = \mathrm{d}^2 \delta y$; et en continuant ainsi, on obtiendra le théorème fondamental

$$\delta \mathrm{d}^n y = \mathrm{d}^n \delta y,$$

en vertu duquel *on peut transporter la caractéristique* δ *après la caractéristique* d.

Pour donner plus de symétrie au calcul, ainsi que pour embrasser des circonstances relatives aux limites des intégrales, et dont on verra plus loin quelques exemples, on fait varier x aussi bien que y ; mais le théorème ci-dessus ne cesse pas d'avoir lieu pour cela, parce que la loi de la variation étant constante, quoi-

puissances de dt. C'est sous cette forme que Lagrange, dans la dernière édition de ses *Leçons sur le Calcul des Fonctions*, présente celui des variations, à l'égard duquel il entre dans beaucoup de détails très intéressans. (*Voyez* le Traité in-4°, t. II, page 723.)

que arbitraire, δx est une fonction de x, de laquelle se tire $\delta x'$, en y changeant x en x' : il en résulte $\delta \mathrm{d}x = \mathrm{d}\delta x$, et pareillement $\delta \mathrm{d}V = \mathrm{d}\delta V$, pour toute fonction V dépendante de x, de y et de leurs différentielles.

358. Il existe un théorème analogue par rapport au signe $\int$. En effet, si l'on représente $\int U$ par U_1, il viendra

$$\mathrm{d}U_1 = U, \quad \text{puis} \quad \delta \mathrm{d}U_1 = \delta U;$$

transposant la caractéristique δ après la caractéristique d, et passant ensuite aux intégrales, on trouvera successivement

$$\mathrm{d}\delta U_1 = \delta U, \quad \delta U_1 = \int \delta U;$$

puis remettant pour U_1 sa valeur, on aura enfin

$$\delta \int U = \int \delta U.$$

359. Cela posé, on voit que pour obtenir la variation d'une fonction quelconque U, contenant x, y et leurs différentielles des ordres quelconques, il faut supposer que x et y se changent respectivement en $x + \delta x$, $y + \delta y$, et regarder δx et δy comme des fonctions arbitraires l'une de x, l'autre de y. En se bornant aux termes où les variations ne passent pas le premier degré, l'opération revient à différentier par le procédé ordinaire la fonction U, tant par rapport à x et à y, que par rapport à leurs différentielles considérées comme des variables distinctes, mais en marquant par la caractéristique δ la dernière différentiation. Il est visible en effet que, dans cette hypothèse, les différentielles de

$$x, \quad y, \quad \mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}y, \quad \text{etc.},$$

sont

$$\delta x, \quad \delta y, \quad \delta \mathrm{d}x, \quad \delta \mathrm{d}y, \quad \text{etc.}$$

Si donc la différentielle ordinaire de U est

$$\mathrm{d}U = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}^2x + P\mathrm{d}^3x + Q\mathrm{d}^4x + \text{etc.}$$
$$+ m\mathrm{d}y + n\mathrm{d}^2y + p\mathrm{d}^3y + q\mathrm{d}^4y + \text{etc.},$$

il suffira d'y changer le dernier d en δ, et il viendra

$$\delta U = M\delta x + N\delta\mathrm{d}x + P\delta\mathrm{d}^2x + Q\delta\mathrm{d}^3x + \text{etc.}$$
$$+ m\delta y + n\delta\mathrm{d}y + p\delta\mathrm{d}^2y + q\delta\mathrm{d}^3y + \text{etc.}$$

Quand la fonction U sera sous la forme $V\mathrm{d}x$, V ne contenant alors que

$$x,\ y,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p,\quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = q,\ \text{etc.},$$

on aura

$$\mathrm{d}V = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + \text{etc.},$$

et la variation de V sera

$$\delta V = M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.},$$

en observant que les quantités p, q, r, etc. doivent y être regardées comme renfermant deux variables indépendantes, x et y (n° précéd.), et que par conséquent on peut prendre leur variation dans deux hypothèses différentes, savoir, en ne faisant varier qu'une de ces quantités, ou en les faisant varier toutes les deux. J'opérerai ici sous ce dernier point de vue, parce que, comme je l'ai déjà dit; il est plus général, et que d'ailleurs on en tire les résultats qui conviennent au premier, en supprimant les termes relatifs à celle des variables que l'on veut traiter comme constante. En différentiant par la caractéristique δ, les fractions

$$\left.\begin{aligned} p&=\frac{dy}{dx}\\ q&=\frac{dp}{dx}\\ r&=\frac{dq}{dx}\end{aligned}\right\}\text{ on trouve }\left\{\begin{aligned} \delta p&=\frac{dx\delta dy-dy\delta dx}{dx^2}=\frac{d\delta y-pd\delta x}{dx},\\ \delta q&=\frac{dx\delta dp-dp\delta dx}{dx^2}=\frac{d\delta p-qd\delta x}{dx},\\ \delta r&=\frac{dx\delta dq-dq\delta dx}{dx^2}=\frac{d\delta q-rd\delta x}{dx},\end{aligned}\right.$$

etc. etc.,

et à l'aide de ces formules on obtient la variation d'une expression quelconque, renfermant x, y et leurs différentielles de quelque ordre que ce soit.

360. Lorsqu'il s'agit d'une formule intégrale $\int U$, dans laquelle U est, comme ci-dessus, une fonction de x, y et de leurs différentielles, on a $\delta\int U=\int\delta U$ (358), et par le n° précédent,

$$\int\delta U=\int(M\delta x+N\delta dx+P\delta d^2x+Q\delta d^3x+\text{etc.})$$
$$+\int(m\delta y+n\delta dy+p\delta d^2y+q\delta d^3y+\text{etc.}).$$

Cette expression n'est pas réduite à la forme la plus simple qu'elle puisse avoir : il faut faire en sorte qu'il ne reste sous le signe $\int$ aucun terme contenant à la fois les caractéristiques d et δ appliquées l'une sur l'autre; et c'est à quoi l'on parvient, en transposant d'abord la caractéristique δ après la caractéristique d, et en intégrant ensuite par parties, comme on le voit ci-dessous,

$$\int M\delta x=\int M\delta x,$$
$$\int N\delta dx=\int Nd\delta x=N\delta x-\int dN\delta x,$$
$$\int P\delta d^2x=\int Pd^2\delta x=Pd\delta x-\int dPd\delta x=Pd\delta x-dP\delta x+\int d^2P\delta x,$$
$$\int Q\delta d^3x=\int Qd^3\delta x=Qd^2\delta x-\int dQd^2\delta x=Qd^2\delta x-dQd\delta x+\int d^2Qd\delta x$$
$$=Qd^2\delta x-dQd\delta x+d^2Q\delta x-\int d^3Q\delta x,$$

etc. etc.

On aura pareillement

$$\int m\delta y = \int m\delta y,$$
$$\int n\delta\mathrm{d}y = \int n\mathrm{d}\delta y = n\delta y - \int \mathrm{d}n\delta y,$$
$$\int p\delta\mathrm{d}^2y = \int p\mathrm{d}^2\delta y = p\mathrm{d}\delta y - \mathrm{d}p\delta y + \int \mathrm{d}^2p\delta y,$$
$$\int q\delta\mathrm{d}^3y = \int q\mathrm{d}^3\delta y = q\mathrm{d}^2\delta y - \mathrm{d}q\mathrm{d}\delta y + \mathrm{d}^2q\delta y - \int \mathrm{d}^3q\delta y,$$

etc.,

et en substituant, il viendra

$$\begin{aligned}\int \delta U = {} & (N - \mathrm{d}P + \mathrm{d}^2Q - \text{etc.})\delta x + (P - \mathrm{d}Q + \text{etc.})\mathrm{d}\delta x \\ & + (Q - \text{etc.})\mathrm{d}^2\delta x + \text{etc.} \\ & + (n - \mathrm{d}p + \mathrm{d}^2q - \text{etc.})\delta y + (p - \mathrm{d}q + \text{etc.})\mathrm{d}\delta y \\ & + (q - \text{etc.})\mathrm{d}^2\delta y + \text{etc.} \\ & + \int (M - \mathrm{d}N + \mathrm{d}^2P - \mathrm{d}^3Q + \text{etc.})\delta x \\ & + \int (m - \mathrm{d}n + \mathrm{d}^2p - \mathrm{d}^3q + \text{etc.})\delta y.\end{aligned}$$

Ce résultat est composé de deux parties semblables, l'une produite par la variation de x, et l'autre par celle de y; et il est aisé de voir qu'on l'étendrait à une fonction d'un nombre quelconque de variables, en y ajoutant, pour chacune, des termes pareils à ceux qu'a fournis la variable x ou la variable y.

361. Lorsque l'expression $\int U$ est mise sous la forme $\int V\mathrm{d}x$, c'est-à-dire qu'il n'entre dans V que les variables x, y et les coefficiens différentiels de y, le calcul du développement de la variation paraît un peu plus compliqué, mais il mène à des conséquences remarquables. Il faut d'abord observer que

$$\delta\int V\mathrm{d}x = \int \delta(V\mathrm{d}x) = \int V\mathrm{d}\delta x + \int \mathrm{d}x\delta V,$$
$$\int V\mathrm{d}\delta x = V\delta x - \int \mathrm{d}V\delta x,$$

et que par conséquent

$$\delta\int V\mathrm{d}x = V\delta x + \int (\mathrm{d}x\delta V - \mathrm{d}V\delta x).$$

La quantité $\mathrm{d}x\delta V - \mathrm{d}V\delta x$ se forme en écrivant pour δV et $\mathrm{d}V$, les valeurs rapportées dans le n° 359,

et il vient

$$\mathrm{d}x\delta V - \mathrm{d}V\delta x = N(\mathrm{d}x\delta y - \mathrm{d}y\delta x) + P(\mathrm{d}x\delta p - \mathrm{d}p\delta x) + Q(\mathrm{d}x\delta q - \mathrm{d}q\delta x) + \text{etc.};$$

puis mettant $p\mathrm{d}x$ pour $\mathrm{d}y$, dans ce qui multiplie N, et la valeur de δp (359), dans ce qui multiplie P, on trouvera

$$\mathrm{d}x\delta y - \mathrm{d}y\delta x = \mathrm{d}x(\delta y - p\delta x),$$
$$\mathrm{d}x\delta p - \mathrm{d}p\delta x = \mathrm{d}\delta y - p\mathrm{d}\delta x - \mathrm{d}p\delta x = \mathrm{d}(\delta y - p\delta x),$$

d'où il suit

$$\mathrm{d}x\delta p - \mathrm{d}p\delta x = \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}x\delta y - \mathrm{d}y\delta x}{\mathrm{d}x}\right).$$

Si l'on change y en p et p en q, on obtiendra de même

$$\mathrm{d}x\delta q - \mathrm{d}q\delta x = \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}x\delta p - \mathrm{d}p\delta x}{\mathrm{d}x}\right),$$

et ainsi de suite : faisant donc

$$\delta y - p\delta x = \omega,$$

il en résultera

$$\mathrm{d}x\delta y - \mathrm{d}y\delta x = \omega\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}x\delta p - \mathrm{d}p\delta x = \mathrm{d}\omega,$$
$$\mathrm{d}x\delta q - \mathrm{d}q\delta x = \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}x}, \quad \text{etc.},$$

et par conséquent

$$\int(\mathrm{d}x\delta V - \mathrm{d}V\delta x) = \int N\omega\mathrm{d}x + \int P\mathrm{d}\omega + \int Q\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}x} + \text{etc.}$$

En intégrant par parties, dans le second membre de cette équation, chacun des termes où il y a des différentiations indiquées sur la quantité ω, on aura

$$\int P\,d\omega = P\omega - \int \frac{dP}{dx}\cdot\omega\,dx,$$

$$\int Q\,d\frac{d\omega}{dx} = Q\frac{d\omega}{dx} - \int \frac{dQ}{dx}\,d\omega$$

$$= Q\frac{d\omega}{dx} - \frac{dQ}{dx}\omega + \int \frac{1}{dx}\,d\frac{dQ}{dx}\cdot\omega\,dx,$$

etc. ;

et avec ces expressions, on obtiendra

$$\delta\int V\,dx = V\delta x + \left\{P - \frac{dQ}{dx} + \text{etc.}\right\}\omega$$

$$+ \left\{Q - \text{etc.}\right\}\frac{d\omega}{dx}$$

$$+ \text{etc.}$$

$$+ \int\left\{N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx}\,d\frac{dQ}{dx} - \text{etc.}\right\}\omega\,dx.$$

On étendrait sans peine ce résultat à un plus grand nombre de variables dépendantes de x, en ajoutant pour chacune des termes pareils à ceux qu'on a trouvés, en ne considérant que y ; mais ce qu'il importe d'observer, c'est que si l'on remet pour ω sa valeur $\delta y - p\delta x$, la partie affectée du signe $\int$ prend la forme

$$\int\left\{N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx}\,d\frac{dQ}{dx} - \text{etc.}\right\}dx\delta y$$

$$-\int\left\{N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx}\,d\frac{dQ}{dx} - \text{etc.}\right\}p\,dx\delta x\,;$$

et l'on voit que dans ce cas, le coefficient de δy et celui de δx ont une relation qu'on n'aperçoit point dans le n° précédent : en désignant le premier de ces coefficiens par $\downarrow$, le second sera $-\downarrow p$.

362. Une remarque non moins digne d'attention, c'est que si, dans le développement de $\delta\int U$ (360), on avait

$$M - \mathrm{d}N + \mathrm{d}^2P - \mathrm{d}^3Q + \text{etc.} = 0,$$
$$m - \mathrm{d}n + \mathrm{d}^2p - \mathrm{d}^3q + \text{etc.} = 0,$$

la variation $\int\delta U$ serait entièrement délivrée du signe $\int$; mais ces équations sont précisément celles qui doivent avoir lieu pour que la fonction U soit intégrable par elle-même. Cette proposition, annoncée dans le n° 280, se prouve *à priori*, en appliquant à la recherche de ces conditions la méthode même des variations.

En effet, soit U la différentielle d'une fonction U_1; on aura $U = \mathrm{d}U_1$, et par conséquent

$$\delta U = \delta\mathrm{d}U_1 = \mathrm{d}\delta U_1,$$

d'où il suit que, si U est une différentielle exacte, δU en doit être pareillement une; et par conséquent lorsqu'on a fait sortir du signe $\int$, dans l'expression de $\int\delta U$, tous les termes qui peuvent s'intégrer, il faut que l'ensemble de ceux qui restent soit nul par lui-même, sans qu'on ait besoin de supposer aucune relation entre x, y, δx et δy.

Le développement de $\delta\int V\mathrm{d}x$ ne fournissant que la seule condition

$$N - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} - \text{etc.} = 0,$$

montre que celle qui se rapporte à la variable x, devient inutile quand la fonction U est ramenée à la forme $V\mathrm{d}x$, V ne contenant que x, y et des coefficiens différentiels de y (*).

(*) Cette transformation n'est pas toujours possible. Soient, par exemple, les deux fonctions

363. Ces remarques ne se bornent pas à l'expression de $\int U$: elles s'étendent également à celles de $\iint U$, $\iiint U$, etc., quel que soit le nombre des signes d'intégration ; et en cherchant aussi la variation de ces dernières formules, on trouve les équations de condition, qui doivent avoir lieu pour que la quantité U soit la différentielle exacte d'une fonction U_1 d'un ordre immédiatement inférieur, d'une fonction U_2 d'un ordre inférieur de deux unités, et ainsi de suite.

En effet, puisque

$$U_2 = \int U_1, \quad U_1 = \int U,$$

il viendra

$$\delta U_2 = \delta \int U_1 = \int \delta U_1 = \int \delta \int U ;$$

et l'on obtiendra δU_2 en intégrant de nouveau $\delta \int U$. Or, par le n° 360,

$$\begin{aligned}\delta \int U = {} & (N - \mathrm{d}P + \mathrm{d}^2 Q - \text{etc.})\delta x + (P - \mathrm{d}Q + \text{etc.})\mathrm{d}\delta x \\ & + (Q - \text{etc.})\mathrm{d}^2 \delta x + \text{etc.} \\ & + (n - \mathrm{d}p + \mathrm{d}^2 q - \text{etc.})\delta y + (p - \mathrm{d}q + \text{etc.})\mathrm{d}\delta y \\ & + (q - \text{etc.})\mathrm{d}^2 \delta y + \text{etc.} \\ & + \int (M - \mathrm{d}N + \mathrm{d}^2 P - \mathrm{d}^3 Q + \text{etc.})\delta x \\ & + \int (m - \mathrm{d}n + \mathrm{d}^2 p - \mathrm{d}^3 q + \text{etc.})\delta y :\end{aligned}$$

on aura donc

$$\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}^2 y + \mathrm{d}y\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}^2 y - \mathrm{d}y\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}x^2} ;$$

si l'on y change

$$\mathrm{d}y \text{ en } p\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}^2 y \text{ en } q\mathrm{d}x^2 + p\mathrm{d}^2 x \quad (131),$$

$\mathrm{d}^2 x$ ne disparaît que dans la seconde : on ne peut donc pas, dans la première, regarder y comme dépendant immédiatement de x. (*Voyez* le Traité in-4°, t. I, p. 217.)

$$\begin{aligned}\delta U_2 = &\int(N - dP + d^2Q - \text{etc.})\delta x + \int(P - dQ + \text{etc.})d\delta x \\ &+ \int(Q - \text{etc.})d^2\delta x + \text{etc.} \\ &+ \int(n - dp + d^2q - \text{etc.})\delta y + \int(p - dq + \text{etc.})d\delta y \\ &+ \int(q - \text{etc.})d^2\delta y + \text{etc.} \\ &+ \iint(M - dN + d^2P - d^3Q + \text{etc.})\delta x \\ &+ \iint(m - dn + d^2p - d^3q + \text{etc.})\delta y;\end{aligned}$$

et intégrant par parties, les termes qui contiennent encore des différentielles de δx ou de δy, on trouvera

$$\begin{aligned}\delta U_2 = &(P - 2dQ + 3d^2R - \text{etc.})\delta x + (Q - 2dR + \text{etc.})d\delta x \\ &+ (R - \text{etc.})d^2\delta x + \text{etc.} \\ &+ (p - 2dq + 3d^2r - \text{etc.})\delta y + (q - 2dr + \text{etc.})d\delta y \\ &+ (r - \text{etc.})d^2\delta y + \text{etc.} \\ &+ \int(N - 2dP + 3d^2Q - 4d^3R + \text{etc.})\delta x \\ &+ \int(n - 2dp + 3d^2q - 4d^3r + \text{etc.})\delta y \\ &+ \iint(M - dN + d^2P - d^3Q + d^4R - \text{etc.})\delta x \\ &+ \iint(m - dn + d^2p - d^3q + d^4r - \text{etc.})\delta y.\end{aligned}$$

Telle est la variation demandée, qui ne sera délivrée des deux signes $\int$ que quand les équations

$$\begin{aligned}N - 2dP + 3d^2Q - 4d^3R + \text{etc.} &= 0, \\ n - 2dp + 3d^2q - 4d^3r + \text{etc.} &= 0, \\ M - dN + d^2P - d^3Q + d^4R - \text{etc.} &= 0, \\ m - dn + d^2p - d^3q + d^4r - \text{etc.} &= 0,\end{aligned}$$

seront identiques; alors $\delta^2 U_2$, étant intégré une seule fois, par rapport aux variations, donnera U_2, ou l'intégrale seconde de la proposée.

Soit, pour exemple,

$$U = x d^2y + 2dx dy + y d^2x;$$

on a

$$\begin{aligned}\delta U = &d^2y\delta x + 2dy d\delta x + y d^2\delta x \\ &+ d^2x\delta y + 2dx d\delta y + x d^2\delta y,\end{aligned}$$

$$M = d^2y, \quad N = 2dy, \quad P = y,$$
$$m = d^2x, \quad n = 2dx, \quad p = x,$$

et les équations de condition ci-dessus deviennent

$$2dy - 2dy = 0,$$
$$2dx - 2dx = 0,$$
$$d^2y - 2d^2y + d^2y = 0,$$
$$d^2x - 2d^2x + d^2x = 0 :$$

la fonction proposée est donc immédiatement intégrable. La partie $y\delta x + x\delta y$, délivrée du signe $\int$, donne, en l'intégrant par rapport aux variations, $U_2 = xy$.

La marche des calculs précédens montre que la première intégration d'une fonction différentielle de m variables, exige m conditions, quand ces variables sont considérées comme indépendantes, et que pour un nombre n d'intégrations successives, il y aurait mn équations de condition. Il y en aurait seulement $m-1$ pour la première intégration, et $n(m-1)$ pour toutes ensemble, si la fonction proposée était sous la forme $\int^n V dx^n$, V ne contenant que des coefficiens différentiels.

Des maximums *et des* minimums *des formules intégrales indéterminées.*

364. On peut appeler *intégrales indéterminées*, les expressions telles que $\int y dx$, $\int \sqrt{dx^2 + dy^2}$, lorsqu'on n'assigne aucune forme à la fonction y; mais pour être susceptibles de *maximum* ou de *minimum*, ces intégrales doivent être *définies* (229), puisque ce

n'est qu'entre des limites données qu'elles auront une valeur fixe, quand y sera déterminé en x.

Les principes exposés dans le n° 155, à l'égard des fonctions dont la forme est donnée, s'appliquent aussi, avec le secours du calcul des variations, aux intégrales indéterminées. En effet, d'après la marche tracée dans le n° 45, le résultat de la substitution de

$$x+\delta x,\quad y+\delta y,\quad dx+\delta dx,\quad dy+\delta dy,\ \text{etc.},$$

à la place des quantités

$$x,\quad y,\quad dx,\quad dy,\ \text{etc.},$$

dans une fonction quelconque u de ces quantités, pourra s'ordonner suivant les puissances des variations,

$$\delta x,\quad \delta y,\quad \delta dx,\quad \delta dy,\ \text{etc.},$$

et δu contiendra tous les termes de ce développement, dans lesquels les variations ne montent qu'au premier degré. Ces termes, changeant de signe en même temps que les variations, doivent, suivant la théorie rappelée ci-dessus, s'anéantir lors du *maximum* et du *minimum*, quelles que soient les variations δx et δy; il faut donc que $\delta u = 0$. Lorsque $u = fU$, il vient $\delta u = f\delta U$ (358): au *maximum* et au *minimum* de fU, on a donc $f\delta U = 0$, en observant que c'est entre les limites assignées à fU, que $f\delta U$ doit s'évanouir.

Il résulte aussi de la même théorie, que la condition $\delta u = 0$ n'entraîne pas nécessairement l'existence du *maximum* ou du *minimum*, parce qu'il faut en outre que les termes où les variations s'élèvent au second degré, conservent toujours le même signe; la discussion de ces dernières conditions est trop compliquée et trop délicate pour trouver place ici.

365. Le développement de $f\delta U$ est composé de

deux parties bien distinctes (360), puisque l'une est délivrée du signe $\int$, et l'autre y demeure soumise; on peut représenter la première par

$$\alpha\delta x + \beta\delta y + \alpha_1 \mathrm{d}\delta x + \beta_1 \mathrm{d}\delta y + \text{etc.},$$

et la seconde par

$$\int\{\chi\delta x + \psi\delta y\}.$$

Ces parties ne sauraient être comparées entre elles, puisque la dernière n'est point intégrable, tant que δx et δy conservent l'indépendance qu'exige la nature du problème; et dans cet état on ne peut la faire évanouir qu'en posant séparément les équations

$$\chi = 0, \quad \psi = 0,$$

dont le nombre est généralement égal à celui des variations indépendantes; mais lorsqu'il n'y a que deux variables, et que U peut prendre la forme $V\mathrm{d}x$, le développement de la variation de $\int V\mathrm{d}x$, dans le n° 361, fait voir que $\chi = -\psi p$, et que par conséquent... $\chi\mathrm{d}x + \psi\mathrm{d}y = 0$, condition d'ailleurs facile à vérifier en particulier sur chaque exemple. Il en résulte que l'une des équations $\chi = 0$, $\psi = 0$ ayant lieu, l'autre s'ensuit, et qu'il n'y a, entre x et y, qu'une seule relation qu'on aurait également obtenue en posant $\delta x = 0$, c'est-à-dire en ne faisant point varier x; mais cette hypothèse restreindrait beaucoup, comme on va le voir, les propriétés de la partie délivrée du signe $\int$, dans la variation.

Il suit de ce qui précède, que les équations indiquées dans le n° 362, comme exprimant les conditions qui rendent intégrables les formules $\int U$ et $\int V\mathrm{d}x$, et qui sont alors identiques, déterminent, quand elles cessent de l'être, la relation de y à x, par laquelle les in-

tégrales proposées deviennent un *maximum* ou un *minimum*. On reconnaît aisément que ces équations peuvent s'élever jusqu'à l'ordre dont l'exposant est double de celui de la plus haute différentielle contenue, soit dans U, soit dans V.

366. Après l'évanouissement de la partie affectée du signe $\int$, il reste

$$\alpha\delta x + \beta\delta y + \alpha_1 d\delta x + \beta_1 d\delta y + \text{etc.},$$

expression que, pour abréger, je représenterai par φ : on aura donc $\int\delta U = \varphi + const.$, et la valeur complète de cette intégrale s'obtiendra en prenant la différence de celles que reçoit la quantité φ, à chacune des deux limites (229); en sorte que *si* φ' désigne cette valeur pour la première limite, et φ'' pour la dernière, on aura $\int\delta U = \varphi'' - \varphi'$; d'où il résultera encore, pour le *maximum* et le *minimum* de l'intégrale $\int U$, la condition

$$\varphi'' - \varphi' = 0;$$

mais il faut bien remarquer que cette équation ne contient plus que des quantités qui se rapportent aux limites de l'intégrale $\int U$, et qu'alors les variations δx, δy, δdx, δdy, etc., peuvent être nulles, ou seulement liées entre elles par des relations données, selon que ces limites seront fixes ou variables. L'explication géométrique de ces diverses circonstances, les éclaircira suffisamment.

La première a lieu lorsque la courbe qui rend *maximum* ou *minimum*, l'intégrale proposée, doit être prise entre toutes les courbes assujetties à passer par deux points dont les coordonnées sont déterminées, ainsi que tout ce qui s'y rapporte, et que l'intégrlae doit commencer à l'un de ces points, et finir à l'autre. Si x' et y' désignent les coordonnées du premier, x'' et y''

celles du second, ces quantités, appartenant à toutes les courbes qu'on pourra considérer dans la question dont il s'agit, n'éprouveront aucune variation : quand donc on changera x et y en x' et en y', puis en x'' et en y'', il faudra faire

$$\delta x' = 0, \quad \delta y' = 0, \quad \delta x'' = 0, \quad \delta y'' = 0.$$

Alors les termes affectés de ces variations disparaîtront d'eux-mêmes de l'équation $\varphi'' - \varphi' = 0$, qui sera par conséquent vérifiée si elle ne contient que ces termes; et la courbe déduite de l'équation $\chi = 0$, résoudra complètement le problème, pourvu qu'on l'assujettisse à passer par les deux points donnés; ce qui s'effectuera en général, par la détermination des constantes arbitraires comprises dans l'intégrale de l'équation citée, qui sera alors du second ordre.

Si l'équation $\varphi'' - \varphi' = 0$ contenait de plus les termes affectés de $\delta \mathrm{d}x'$, $\delta \mathrm{d}y'$, $\delta \mathrm{d}x''$, $\delta \mathrm{d}y''$, et qu'outre la condition précédente, les tangentes de la courbe cherchée dussent avoir, aux limites de l'intégrale, une inclinaison donnée, ces termes disparaîtraient aussi d'eux-mêmes, parce que les différentielles $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ n'éprouvant aucun changement aux limites, les variations $\delta \mathrm{d}x'$, $\delta \mathrm{d}y'$, $\delta \mathrm{d}x''$, $\delta \mathrm{d}y''$, seraient zéro, et feraient évanouir les produits où elles entrent : mais pour assujettir la courbe cherchée à cette condition, par rapport aux tangentes de ses points extrêmes, il faudrait que son équation contînt deux constantes arbitraires de plus que dans le cas précédemment examiné, et que par conséquent l'équation différentielle $\chi = 0$ fût du quatrième ordre. En voilà assez pour montrer comment doit se vérifier l'équation $\varphi'' - \varphi' = 0$, lorsque les coordonnées des limites et leurs coefficiens différentiels ont des valeurs fixes : je

passe aux cas où les limites doivent être regardées comme variables.

367. On peut demander que la courbe douée du *maximum* ou du *minimum* de la propriété proposée, soit prise, non parmi toutes les courbes qui passent par deux points donnés, mais parmi toutes celles qui seraient menées entre deux courbes données AA' et BB', *fig.* 61, sans déterminer les points où ces der- FIG. 61.
nières sont coupées par celle qu'on cherche. Il est visible qu'en passant alors de la courbe AB, à une autre $A'B'$, les extrémités A et B se meuvent; les abscisses qui répondent au commencement et à la fin de l'intégrale, après qu'elle a varié, ne sont plus celles qui convenaient à son état primitif, et les ordonnées qui s'y rapportent ont changé suivant la loi établie par les courbes AA' et BB'. Dans cette circonstance, les variations des ordonnées et celles de leurs abscisses doivent avoir les mêmes relations que les différentielles relatives aux courbes AA', BB', relations exprimées par les équations de ces courbes, qui sont données : il est donc nécessaire de les introduire dans l'équation $\varphi'' - \varphi' = 0$; et pour la vérifier ensuite, il faudra égaler séparément à zéro les coefficiens des variations qui resteront indépendantes.

A mesure que la fonction fU contiendra des différentielles d'un ordre plus élevé, le nombre de termes de l'équation $\varphi'' - \varphi' = 0$, augmentant; on pourra ajouter de nouvelles conditions aux limites; supposer, par exemple, que la courbe AB doit être prise parmi toutes celles qui touchent à la fois les deux courbes AA' et BB'. Par cette dernière condition, non-seulement les coordonnées x et y doivent avoir, aux limites de l'intégrale, les relations exprimées par les équations

de ces courbes; mais il en doit être de même de leurs différentielles : ainsi les variations $\delta dx'$, $\delta dy'$, $\delta dx''$, $\delta dy''$, ne sont plus indépendantes et doivent coïncider avec les différentielles secondes relatives aux courbes proposées. On pourra, par ces relations, éliminer quelques-unes des variations $\delta dx'$, $\delta dy'$, $\delta dx''$, $\delta dy''$, de l'équation $\varphi'' - \varphi' = 0$; et ensuite on la vérifiera en égalant séparément à zéro, les coefficiens des variations restantes, lesquelles seront entièrement arbitraires.

Les équations qu'on se procurera par ce moyen, établissant des relations entre les coordonnées des points extrêmes de la courbe proposée, porteront nécessairement sur les constantes introduites par l'intégration de l'équation $\chi = 0$, et serviront à les déterminer.

368. On doit ensuite remarquer que puisqu'il y a des circonstances où il faut avoir égard aux variations des limites des intégrales, si les coordonnées x', y', x'', y'', de ces limites, entraient dans l'expression de U, il serait nécessaire de les y faire varier, aussi bien que x et y, et d'augmenter par conséquent δU des termes

$$A'\delta x + B'\delta y' + A''\delta x'' + B''\delta y'' + A'_1 d\delta x' + B'_1 d\delta y' + A''_1 d\delta x'' + B''_1 d\delta y'' + \text{etc.}$$

Or comme les variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta x''$, $\delta y''$ sont indépendantes des coordonnées indéterminées x et y, elles passeraient hors du signe $\int$, tandis que les fonctions A', A'', etc., A'_1, A''_1, etc., y resteraient soumises: il faudrait donc introduire dans la première partie de la variation $\int \delta U$, les termes

$$\delta x' \int A' + \delta y' \int B' + \delta x'' \int A'' + \delta y'' \int B'' + d\delta x' \int A'_1 + d\delta y' \int B'_1 + d\delta x'' \int A''_1 + d\delta y'' \int B''_1 + \text{etc.},$$

en ayant soin de prendre ces intégrales entre les mêmes limites que la proposée.

On ne voit pas tout de suite ce que deviendraient les termes précédens, si l'une des limites était en même temps l'origine des coordonnées. On évite cette difficulté, en faisant d'abord

$$x = X - x', \quad y = Y - y',$$

et en concevant que l'origine des coordonnées X, Y, soit fixe, mais que les quantités x' et y' soient variables; il vient alors

$$\delta x = \delta X - \delta x', \quad \delta y = \delta Y - \delta y'.$$

Quant aux différentielles dx, dy, etc., elles ne dépendent point des quantités x' et y', et ne prennent par conséquent aucune variation: l'expression de δU devient donc seulement

$$M(\delta X - \delta x') + N\delta dX + \text{etc.}$$
$$+ m(\delta Y - \delta y') + n\delta dY + \text{etc.}$$

Il est permis de faire ensuite x', y' égaux à zéro, pourvu qu'on laisse subsister les variations $\delta x'$, $\delta y'$, qui peuvent être considérées comme le premier degré de grandeur de ces quantités; alors X et Y redeviennent x et y, et le changement de l'expression de $\int \delta U$ se réduit aux termes $-\delta x' \int M - \delta y' \int m$, dont il faut prendre les intégrales dans les limites primitives.

369. Soit proposé de déterminer y en x, pour que l'intégrale $\int \sqrt{dx^2 + dy^2}$, prise entre deux limites données, devienne un *minimum*, ou, ce qui est la même chose, *trouver la plus courte ligne qu'on puisse mener entre deux points, sur un plan.* On a

$$\delta U = \delta \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dx\delta dx + dy\delta dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}},$$

et $$\int \delta U = \int \frac{dx}{ds} d\delta x + \int \frac{dy}{ds} d\delta y,$$

en faisant $\sqrt{dx^2 + dy^2} = ds$, et en transposant la caractéristique δ. Intégrant ensuite par parties, on trouve

$$\int \delta U = \frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y - \int \left(d\frac{dx}{ds}\delta x + d\frac{dy}{ds}\delta y \right),$$

et la partie affectée du signe $\int$ donne (365)

$$d\frac{dx}{ds} = 0, \text{ d'où } \frac{dx}{ds} = C, \frac{dy}{dx} = C', y = C'x + C''.$$

Ce résultat, ainsi qu'on devait s'y attendre, désigne la ligne droite, et les constantes qu'il renferme serviront à remplir les conditions relatives aux points entre lesquels elle doit être menée.

La partie qui est délivrée du signe $\int$, ou φ (366), ne contenant que les variations des coordonnées des points extrêmes, s'évanouit quand ils sont fixes, et les constantes C' et C'' se déterminent alors en assujettissant la droite proposée à passer par ces points. Quand ils ne sont pas fixes, mais qu'ils doivent seulement se trouver sur des courbes données, il faut que les quantités x' et y', x'' et y'', qui sont inconnues, satisfassent, ainsi que leurs variations, à l'équation $\varphi'' - \varphi' = 0$, qui devient

$$\frac{dx''}{ds''}\delta x'' + \frac{dy''}{ds''}\delta y'' - \frac{dx'}{ds'}\delta x' - \frac{dy'}{ds'}\delta y' = 0,$$

et aux équations des courbes données, dont je représenterai les différentielles par

$$dy = m dx, \quad dy = n dx:$$

on aura donc (367),

$$\delta y' = m'\delta x', \quad \delta y'' = n''\delta x'',$$
$$\left(\frac{dx''}{ds''} + n''\frac{dy''}{ds''}\right)\delta x'' - \left(\frac{dx'}{ds'} + m'\frac{dy'}{ds'}\right)\delta x' = 0.$$

A cause de l'indépendance des variations $\delta x''$ et $\delta x'$, cette équation se partage dans les suivantes :

$$dx'' + n''dy'' = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{dy''}{dx''} = -\frac{1}{n''},$$
$$dx' + m'dy' = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{dy'}{dx'} = -\frac{1}{m'},$$

qui expriment que la droite proposée doit être normale à chacune des courbes données.

D'après l'équation $y = C'x + C''$, on a $dy = C'dx$ pour tous les points de la droite, et les équations précédentes deviennent en conséquence

$$1 + C'n'' = 0, \quad 1 + C'm' = 0;$$

mais la constante C' dépend des coordonnées des points extrêmes, puisque l'équation de la droite menée par ces points, étant

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x'), \text{ donne } C' = \frac{y' - y''}{x' - x''};$$

et substituant cette valeur de C', il en résulte les équations

$$x' - x'' + n''(y' - y'') = 0, \quad x' - x'' + m'(y' - y'') = 0,$$

dont la combinaison avec celles des courbes données détermine les points par où passe la plus courte distance de ces courbes, et complète la solution du problème proposé.

On arriverait aux mêmes équations, en supposant d'abord que les points extrêmes soient fixes, circonstance dans laquelle on a, entre x et y, l'équation

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x').$$

En effet, par cette relation, l'intégrale $\int\sqrt{dx^2+dy^2}$ devient, entre les abscisses x' et x'',

$$(x'-x'')\sqrt{1+\left(\frac{y'-y''}{x'-x''}\right)^2}=\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2};$$

et la seule application du Calcul différentiel suffit pour déterminer le *minimum* de cette expression, en ayant égard à la dépendance qu'établissent entre x' et y', x'' et y'', les équations des courbes données.

C'est ainsi qu'on pouvait achever, sans le secours de l'équation $\varphi''-\varphi'=0$, que les méthodes de Bernoulli et d'Euler ne donnaient pas la solution des problèmes semblables au précédent, toutes les fois que l'on savait obtenir l'intégrale proposée; mais en considérant que cette intégrale est une fonction implicite des quantités qui se rapportent à ses limites, M. Poisson, au moyen de la différentiation sous le signe $\int$ (281), a cherché immédiatement, par rapport à ces quantités, les conditions du *maximum* absolu de l'intégrale proposée, et est parvenu à l'équation $\varphi''-\varphi'=0$, telle qu'elle résulte de la méthode des variations (*).

370. Le problème du n° précédent étant transporté dans l'espace, conduit à déterminer z et y, en fonctions de x, dans l'expression $\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$. En faisant $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=ds$, il vient

$$\int\delta\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\int\frac{dx}{ds}d\delta x+\int\frac{dy}{ds}d\delta y+\int\frac{dz}{ds}d\delta z=$$
$$\frac{dx}{ds}\delta x+\frac{dy}{ds}\delta y+\frac{dz}{ds}\delta z-\int\left(d\frac{dx}{ds}\delta x+d\frac{dy}{ds}\delta y+d\frac{dz}{ds}\delta z\right).$$

(*) *Voyez* le Traité in-4°, t. II, p. 742.

La partie affectée du signe $\int$ fournit les trois équations

$$d\frac{dx}{ds} = 0, \quad d\frac{dy}{ds} = 0, \quad d\frac{dz}{ds} = 0,$$

dont toutes les combinaisons 2 à 2 s'accordent à donner

$$\frac{dz}{dx} = const., \quad \frac{dz}{dy} = const.,$$

et montrent que la ligne cherchée est droite.

Si cette droite doit être menée entre un point fixe et une surface courbe dont l'équation différentielle soit

$$dz = pdx + qdy,$$

il faudra qu'à la dernière limite, $\delta z'' = p''\delta x'' + q''\delta y''$. La première étant fixe, rendra $\varphi' = 0$, et la valeur de $\delta z''$ changera $\varphi'' = 0$ en

$$(dx'' + p''dz'')\delta x'' + (dy'' + q''dz'')\delta y'' = 0;$$

égalant à zéro les coefficiens des variations indépendantes, il viendra

$$dx'' + p''dz'' = 0, \quad dy'' + q''dz'' = 0,$$

d'où l'on verra, par le n° 150, que la droite cherchée est normale à la surface donnée.

Si cette plus courte ligne doit être tout entière sur une surface courbe donnée, il faudra que les variations δx, δy, δz, sous le signe $\int$, satisfassent à l'équation différentielle de cette surface, que je représenterai par $dz = pdx + qdy$: on fera donc

$$\delta z = p\delta x + q\delta y$$

dans $\int \delta U$, qui deviendra, par cette substitution,

$$\left(\frac{dx}{ds} + p\frac{dz}{ds}\right)\delta x + \left(\frac{dy}{ds} + q\frac{dz}{ds}\right)\delta y$$
$$- \int \left\{ \left(d\frac{dx}{ds} + pd\frac{dz}{ds} \right)\delta x + \left(d\frac{dy}{ds} + qd\frac{dz}{ds} \right)\delta y \right\}.$$

De la partie affectée du signe $\int$, on tire les équations

$$d\frac{dx}{ds}+pd\frac{dz}{ds}=0, \quad d\frac{dy}{ds}+qd\frac{dz}{ds}=0,$$

dont une seule suffit (361), conjointement avec celle de la surface donnée, pour déterminer la nature de la ligne la plus courte qu'on puisse mener sur cette surface, entre deux de ses points.

En supposant que cette ligne doive être menée entre un point fixe et une courbe prise sur la même surface, on aura d'abord $\varphi'=0$; et désignant par $dy=ndx$, l'équation différentielle de la projection sur le plan des xy, de la courbe donnée, il viendra $\delta y''=n''\delta x''$; puis l'équation $\varphi''=0$, se changeant en

$$dx''+p''dz''+(dy''+q''dz'')n''=0,$$

exprimera que les deux courbes dont il s'agit se coupent à angle droit.

371. Je vais encore chercher la relation de x à y, propre à rendre *minimum* l'expression $\int\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{2(y-Y)}}$, dans laquelle je considérerai Y comme une fonction des coordonnées x' et y', x'' et y'', relatives aux limites (*).

Pour résoudre la question dans toute sa généralité, il faut faire varier Y, aussi bien que y (368). Soit

$$\sqrt{2(y-Y)}=u, \quad \sqrt{dx^2+dy^2}=ds;$$

il viendra

$$\delta u=\frac{\delta y-\delta Y}{u}, \quad \delta ds=\frac{dx}{ds}d\delta x+\frac{dy}{ds}d\delta y$$

(*) Ce problème est celui de la Brachystochrone, courbe le long de laquelle un corps descend dans le moins de temps possible, d'un point à un autre.

$$\text{et } \int \delta\frac{ds}{u} = -\int \frac{ds}{u^3}(\delta y - \delta Y) + \int \frac{dx}{uds}\,d\delta x + \int \frac{dy}{uds}\,d\delta y$$

$$= \delta Y \int \frac{ds}{u^3} + \frac{dx}{uds}\,\delta x + \frac{dy}{uds}\,\delta y$$

$$-\int \left\{ d\frac{dx}{uds}\,\delta x + \left(\frac{ds}{u^3} + d\frac{dy}{uds}\right)\delta y \right\}$$

On tire des termes affectés du signe $\int$, les équations

$$d\frac{dx}{uds} = 0, \quad \frac{ds}{u^3} + d\frac{dy}{uds} = 0;$$

la première, qui est la plus simple, donne

$$\frac{dx}{uds} = C, \quad \text{d'où} \quad \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = C\sqrt{2(y-Y)}.$$

Ce résultat indique une cycloïde (114); car si l'on y fait $y - Y = z$, on en déduira

$$dx = \frac{dz\sqrt{2C^2}\cdot\sqrt{z}}{\sqrt{1-2C^2z}} = \frac{z\,dz}{\sqrt{\frac{1}{2C^2}z - z^2}}.$$

Lorsque $\delta Y = 0$, la quantité φ donne, pour les limites, les équations

$$dx''\delta x'' + dy''\delta y'' = 0, \quad dx'\delta x' + dy'\delta y' = 0,$$

d'après lesquelles on reconnaîtra, comme dans le n° 369, que, si la courbe cherchée est menée entre deux autres, elle doit les rencontrer à angle droit.

Quand δY n'est pas nul, il faut calculer la valeur de $\int \frac{ds}{u^3}$, entre les limites de l'intégrale proposée; or, l'équation

$$\frac{ds}{u^3} + d\frac{dy}{uds} = 0,$$

fournie par le coefficient de δy sous le signe $\int$, donne

$$\int \frac{ds}{u^3} = -\frac{dy}{uds} + const.;$$

et en observant que δY, ne dépendant point des variables indéterminées x et y, ne doit pas changer d'une limite à l'autre, l'équation $\varphi'' - \varphi' = 0$; devient

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{dy''}{u''ds''}\delta Y + \frac{dx''}{u''ds''}\delta x'' + \frac{dy''}{u''ds''}\delta y'' \\ &+\frac{dy'}{u'ds'}\delta Y - \frac{dx'}{u'ds'}\delta x' - \frac{dy'}{u'ds'}\delta y' \end{aligned}\right\} = 0.$$

Si l'on prend seulement $Y = y'$, d'où il suit $\delta Y = \delta y'$, on aura, en réduisant et séparant les variations relatives à chaque limite,

$$\frac{dx''}{u''ds''}\delta x'' + \frac{dy''}{u''ds''}\delta y'' = 0, \quad \frac{dx'}{u'ds'}\delta x' + \frac{dy''}{u''ds''}\delta y' = 0;$$

puis faisant, comme dans le n° 369,

$$\delta y'' = n''\delta x'', \quad \delta y' = m'\delta x',$$

et se rappelant que $\frac{dx}{uds} = C$, les équations ci-dessus prendront la forme

$$C + \frac{dy''}{u''ds''}n'' = 0, \quad C + \frac{dy''}{u''ds''}m' = 0,$$

d'après laquelle $n'' = m'$. Ce résultat fait voir qu'aux points où la courbe cherchée rencontre les courbes données, celles-ci doivent avoir leurs tangentes parallèles. De plus, l'équation relative à la dernière limite, revenant à

$$dx''\delta x'' + dy''\delta y'' = 0,$$

montre encore que la courbe cherchée doit couper à angle droit la seconde courbe donnée.

372. Les problèmes précédens se rapportent à des *maximums* ou à des *minimums* absolus; en voici un où il s'agit de *maximums* et de *minimums* relatifs : *Parmi toutes les relations que peuvent avoir entre elles les variables* x, y, *et qui donnent une même valeur à l'intégrale indéterminée* $\int U_1$, *prise depuis* $x = x'$ *jusqu'à* $x = x''$, *trouver celle qui rend la formule* $\int U$ *un* maximum *ou un* minimum, *dans les mêmes circonstances*. Ce problème se résout en égalant à zéro la variation de la fonction $\int U + a\int U_1$, a étant un coefficient constant indéterminé. Ce n'est pas ici le lieu de démontrer en détail cette règle; on conçoit d'ailleurs que si la fonction ci-dessus est un *maximum* ou un *minimum*, et que l'on fasse $\int U_1 = A$, l'intégrale $\int U$ aura toujours la plus grande ou la plus petite des valeurs qu'elle pourrait prendre dans cette hypothèse (*). Le coefficient indéterminé a sert à remplir la condition $\int U_1 = A$.

Si, par exemple, on demandait *la courbe qui, sous un périmètre donné, renferme le plus grand ou le plus petit espace*, on aurait

$$\int U + a\int U_1 = \int \left\{ y\,dx + a\sqrt{dx^2 + dy^2} \right\};$$

en faisant $\sqrt{dx^2 + dy^2} = ds$, la partie de la variation affectée du signe $\int$ serait

$$-\int \left\{ \left(dy + a\,d\frac{dx}{ds} \right) \delta x - \left(dx - a\,d\frac{dy}{ds} \right) \delta y \right\}$$

et donnerait les équations

$$dy + a\,d\frac{dx}{ds} = 0, \quad dx - a\,d\frac{dy}{ds} = 0,$$

(*) *Voyez* le Traité in-4°, t. II, p. 803.

dont une seule suffit pour déterminer la courbe cherchée (365) ; mais le calcul est plus simple lorsqu'on les emploie toutes deux. Leurs intégrales

$$y + a\frac{dx}{ds} = C', \quad x - a\frac{dy}{ds} = C,$$

étant mises sous la forme

$$y - C' = a\frac{dx}{ds}, \quad x - C = -a\frac{dy}{ds},$$

ensuite élevées au quarré, puis ajoutées membre à membre, conduisent à

$$(y - C')^2 + (x - C)^2 = a^2,$$

ce qui désigne un cercle dont le rayon est a.

Ce rayon se détermine d'après la valeur assignée au périmètre $\int \sqrt{dx^2 + dy^2}$; les constantes C et C' peuvent servir à faire passer le cercle par des limites fixes et données. Il est doué du *maximum* d'aire, lorsqu'il tourne sa concavité vers l'axe des abscisses, et du *minimum*, si le contraire a lieu. Tel est le cas le plus simple du *problème des isopérimètres*, ainsi nommé, parce que l'on n'y considéra d'abord que des courbes de même périmètre.

APPENDICE

AU

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Des différences et des séries.

Du calcul direct des différences.

373. Dans le Calcul différentiel, on n'a fait varier les fonctions que pour considérer la forme des termes de leur développement, ou les limites des rapports de leurs accroissemens à ceux des variables dont elles dépendent, mais sans avoir aucun égard aux valeurs de ces accroissemens. Cette recherche ne portait que sur de nouvelles fonctions dérivées de la première, et non pas sur les valeurs numériques de ses accroissemens; mais l'examen de ces valeurs a montré que, dans un grand nombre de cas, elles suivent des lois plus simples que celle de la fonction elle-même, ou au moins, qu'elles forment souvent des suites décroissantes qui se prêtent plus aisément aux approximations, et auxquelles par conséquent il peut être utile de ramener

les quantités primitives. C'est sous ce point de vue qu'on s'est d'abord occupé du *Calcul aux différences* proprement dit.

On lui a donné le nom de *Calcul aux différences finies*, pour le distinguer du *Calcul aux différences infiniment petites*; mais la dénomination de *Calcul différentiel*, exclusivement affectée à ce dernier, et motivée comme on l'a vu (5), prévenant toute équivoque, il n'est pas nécessaire d'ajouter l'épithète *finies* aux *différences*, qui ne sauraient être confondues avec les *différentielles*.

Le but du Calcul direct aux différences est donc de déterminer les accroissemens en eux-mêmes, en les déduisant, non-seulement de l'expression analytique des fonctions, mais aussi de leurs valeurs numériques ou particulières, lorsque l'expression analytique manque ou serait trop compliquée.

374. En examinant la marche des séries formées par les quarrés et les cubes des termes de la suite naturelle des nombres, on tombe déjà sur des propriétés remarquables et utiles des différences, ainsi que le montrera l'explication des tableaux ci-dessous.

Quarrés.	Différ. 1re.	Différ. 2e.
1		
4	3	
9	5	2
16	7	2
25	9	2
36	11	2
49	13	2
etc.	etc.	etc.

Cubes.	Différ. 1re.	Différ. 2e.	Différ. 3e.
1			
8	7		
27	19	12	
64	37	18	6
125	61	24	6
216	91	30	6
343	127	36	6
etc.	etc.	etc.	etc.

Je n'ai point fait entrer dans ces tableaux la suite naturelle des nombres 1, 2, 3, 4, etc., parce que la différence de l'un à l'autre est toujours égale à l'unité.

A côté des quarrés, le premier tableau contient, dans une seconde colonne, la différence entre chacun de ceux-ci et celui qui le précède; puis, dans une troisième colonne, la différence entre chacun des nombres de la seconde et celui qui le précède. Ces dernières sont nommées *différences secondes*, comme étant les différences des *différences premières*.

Celles-ci, formant une progression par différences, présentent déjà une loi plus simple que les nombres de la première colonne; et les autres, étant constantes, offrent encore une nouvelle simplification. Une conséquence assez importante de l'enchaînement de ces différences, c'est qu'on peut, au moyen des seuls nombres 1, 3, 2, placés respectivement à la tête des trois colonnes du tableau, former, par de simples additions, la colonne des quarrés, car en ajoutant 2 à 3, on aura 5, puis 2 à 5, on aura 7, et l'on formera ainsi la seconde colonne : ajoutant ensuite 3 avec 1, on aura 4, 5 avec 4, on aura 9, et ainsi des autres quarrés.

La première colonne du second tableau contient les cubes; la deuxième, leurs différences premières; la troisième, leurs différences secondes, qui ne forment plus qu'une progression par différences; et enfin, dans la quatrième colonne, les différences des différences secondes, ou les *différences troisièmes*, qui sont constantes.

Ici, au moyen des quatre nombres 1, 7, 12 et 6 placés respectivement en tête des diverses colonnes du tableau, *on pourra former toutes ces colonnes, en commençant par celle de la droite, et en ajoutant chacun des nombres d'une même colonne avec celui qui se trouve sur une ligne plus haut, dans la colonne à gauche.*

Cette règle, qui n'est encore établie que sur une simple induction, et pour deux séries de nombres seulement, sera bientôt démontrée et étendue à un nombre infini de fonctions, pour lesquelles on obtient ainsi des déterminations rigoureuses.

D'un autre côté, que dans une table de logarithmes on prenne les différences premières entre ceux des nombres consécutifs, elles auront une marche fort inégale, si l'on opère dans le commencement de la table, où la fonction varie beaucoup; mais, en passant aux différences secondes, troisièmes, etc., on en trouvera qui deviendront fort petites, et finiront par rester les mêmes dans un intervalle plus ou moins grand. Les logarithmes suivront donc sensiblement, pendant cet intervalle, une loi analogue à celle que nous avons fait remarquer ci-dessus, par rapport aux quarrés et aux cubes, et dont on peut faire usage pour simplifier la construction de cette table.

375. Quand on a vu le parti qu'on peut tirer de la considération des différences successives, poussées jus-

qu'à l'ordre où elles sont constantes, soit rigoureusement, soit à très peu près, il paraît tout simple de chercher l'expression générale de leurs relations. Pour cela, soit

$$u, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \ldots\ldots u_n,$$

une série de valeurs consécutives que reçoit une quantité, en vertu des variations qu'elle éprouve par elle-même, ou par l'effet de celles qui arrivent à une autre dont elle dépend; les chiffres inférieurs sont ici des *indices* qui font connaître le rang qu'occupe chaque valeur dans la série, en marquant le nombre de celles qui la précèdent, en sorte que la première, u, est censée répondre à l'indice o. On fait ensuite

$$\left.\begin{array}{l} u_1-u \quad =\Delta u \\ u_2-u_1 \quad =\Delta u_1 \\ u_3-u_2 \quad =\Delta u_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n-u_{n-1}=\Delta u_{n-1} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

en se servant de la caractéristique Δ, pour indiquer l'opération de prendre la différence entre deux valeurs consécutives d'une même quantité.

Lorsque cette quantité varie par des degrés égaux, les différences Δu, Δu_1, Δu_2, etc. sont toutes égales; mais si le contraire a lieu, on fait, par analogie,

$$\left.\begin{array}{l} \Delta u_1-\Delta u \quad =\Delta\Delta u \quad =\Delta^2 u \\ \Delta u_2-\Delta u_1 \quad =\Delta\Delta u_1 \quad =\Delta^2 u_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta u_n-\Delta u_{n-1}=\Delta\Delta u_{n-1}=\Delta^2 u_{n-1} \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u = \Delta\Delta^2 u = \Delta^3 u \\ \Delta^2 u_2 - \Delta^2 u_1 = \Delta\Delta^2 u_1 = \Delta^3 u_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta^2 u_n - \Delta^2 u_{n-1} = \Delta\Delta^2 u_{n-1} = \Delta^3 u_{n-1} \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

En poursuivant de cette manière, on tire des valeurs $u, u_1, u_2, \ldots u_n$, une suite de différences dont le nombre des ordres est, au plus, égal à celui de ces valeurs, diminué de l'unité.

376. Il est visible que, suivant la notation ci-dessus, la différence d'une expression quelconque s'indiquera en plaçant devant chacun de ses termes la caractéristique Δ, en sorte que

$$\Delta(u + v - w) = u_1 + v_1 - w_1 - (u + v - w)$$
$$= \Delta u + \Delta v - \Delta w,$$

de même que

$$\mathrm{d}(u + v - w) = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v - \mathrm{d}w \quad (10).$$

On a aussi

$$\Delta(au) \quad \text{ou} \quad \Delta . au = a(u_1 - u) = a\Delta u,$$

de même que $\mathrm{d} . au = a\mathrm{d}u$; et les constantes isolées des variables disparaissent quand on prend la différence d'une fonction (7).

377. Au moyen de ces règles et des équations (1), on obtient pour les valeurs $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n$, des expressions qui ne dépendent que de la valeur primordiale u et de ses différences Δu, $\Delta^2 u$, etc.; car puisque

$$\Delta u_1 = \Delta(u + \Delta u) = \Delta u + \Delta^2 u,$$

il en résulte

$$u_2 = u_1 + \Delta u_1 = u + \Delta u + \Delta(u + \Delta u)$$
$$= u + 2\Delta u + \Delta^2 u,$$

et de même

$$\begin{aligned} u_3 &= u_2 + \Delta u_2 \\ &= u + 2\Delta u + \Delta^2 u + \Delta(u + 2\Delta u + \Delta^2 u) \\ &= u + 3\Delta u + 3\Delta^2 u + \Delta^3 u. \end{aligned}$$

La forme de ces expressions, dont les coefficiens numériques sont les mêmes que ceux du quarré et du cube du binome, conduit par analogie à

$$u_n = u + \frac{n}{1}\Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u + \text{etc.};$$

ce qu'on peut vérifier aisément au moyen de l'équation

$$u_{n+1} = u_n + \Delta u_n,$$

dont le développement montre que la loi ayant lieu pour l'ordre n, a nécessairement lieu pour l'ordre $n+1$.

378. On peut aussi exprimer immédiatement la différence d'un ordre quelconque par les termes de la série primitive, qui ont concouru à former cette différence.

Ayant d'abord

$$\Delta u = u_1 - u \quad \text{et} \quad \Delta^2 u = \Delta u_1 - \Delta u,$$

on observera que Δu_1 doit être composé avec u_1 et u_2, comme Δu l'est avec u et u_1, c'est-à-dire qu'il suffit d'augmenter de l'unité les indices, pour passer à $\Delta u_1 = u_2 - u_1$, et l'on obtiendra

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= u_2 - u_1 - (u_1 - u) \\ &= u_2 - 2u_1 + u; \end{aligned}$$

puis augmentant de l'unité les indices, dans ce dernier résultat, pour former $\Delta^2 u_1$, il viendra

$$\begin{aligned} \Delta^3 u = \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u &= u_3 - 2u_2 + u_1 \\ &\quad - (u_2 - 2u_1 + u) \\ &= u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u, \end{aligned}$$

et par analogie

$$\Delta^n u = u_n - \frac{n}{1} u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} u_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} u_{n-3} + \text{etc.},$$

loi qui se vérifierait par le développement de l'équation $\Delta^{n+1} u = \Delta^n u_1 - \Delta^n u$.

Ce résultat et le précédent reviennent à

$$u_n = (1 + \Delta u)^n, \quad \Delta^n u = (u - 1)^n,$$

pourvu que l'on change dans le développement de l'un, les exposans des puissances de Δu en exposans de la caractéristique Δ ; et dans celui de l'autre, les exposans de u en indices; on peut même poser tout de suite

$$u_n = (1 + \Delta)^n u,$$

et il n'y aura rien à changer dans le développement.

379. Lorsqu'une fonction est donnée, rien n'est plus facile que d'en obtenir les différences successives; je prendrai pour exemple la fonction x^m. En faisant $u = x^m$, et supposant que x augmente de la quantité h, on aura $u_1 = (x+h)^m$, et par conséquent

$$\Delta u = (x+h)^m - x^m = mx^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2}h^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^{m-3}h^3 + \text{etc.}$$

Pour passer aux différences ultérieures $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, etc., il faut faire varier x de nouveau, ce qui présente deux hypothèses. L'une consiste à supposer que la quantité x prenne toujours des accroissemens égaux, et l'autre que ces accroissemens soient eux-mêmes variables : je ne m'occuperai ici que de la première. En substituant $x+h$ au lieu de x dans Δu, on aura

$$\Delta u_1 = m(x+h)^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{1.2} (x+h)^{m-2}h^2 + \text{etc.}$$

Il est visible que si l'on développe l'expression de Δu_1, et que l'on en retranche celle de Δu, le résultat ordonné par rapport aux puissances de h, sera de la forme

$$\Delta^2 u = m(m-1)x^{m-2}h^2 + M_3 x^{m-3}h^3 + M_4 x^{m-4}h^4 + \text{etc.},$$

M_3, M_4, etc. désignant des coefficiens dépendans de l'exposant m.

Par une nouvelle substitution de $x+h$ dans cette dernière équation, on parviendrait à $\Delta^2 u_1$, et en observant que $\Delta^3 u = \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u$, on obtiendrait

$$\Delta^3 u = m(m-1)(m-2)x^{m-3}h^3 + M'_4 x^{m-4}h^4 + \text{etc.}$$

La loi des premiers termes de chacun de ces développemens est évidente, et l'on voit que l'expression de $\Delta^n u$ doit commencer par

$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}h^n.$$

On voit aussi que, quand l'exposant m est entier et positif, le nombre des termes du développement de $\Delta^n u$, ordonné suivant les puissances de x, diminue de l'unité lorsque n augmente de cette quantité, et que quand $n=m$, il vient

$$\Delta^m u = m(m-1)(m-2)\ldots 1.h^m.$$

Cette différence étant constante, il s'ensuit que celles des ordres supérieurs sont nulles.

On parvient facilement au terme général de $\Delta^n u$ en formant l'expression de cette différence par le moyen des valeurs de u, u_1, u_2, u_3, etc., sans passer par celles de Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, etc. (378). Il est évident que dans l'hypothèse présente les valeurs

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \ldots\ldots u_n$$

répondent à

$$x+h, \quad x+2h, \quad x+3h, \ldots\ldots x+nh,$$

et l'on a par conséquent

$$u_1=(x+h)^m, \quad u_2=(x+2h)^m, \ldots u_n=(x+nh)^m;$$

on tirera de là

$$\Delta^n u=[x+nh]^m-\frac{n}{1}[x+(n-1)h]^m$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}[x+(n-2)h]^m$$
$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}[x+(n-3)h]^m+\text{etc.}$$

Si l'on désigne par i l'exposant de h dans le terme général du développement de l'équation ci-dessus, l'expression de ce terme sera

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-i+1)}{1.2.3\ldots\ldots i}x^{m-i}h^i\times$$
$$\left\{n^i-\frac{n}{1}(n-1)^i+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^i-\text{etc.}\right\};$$

mais comme on vient de voir que le développement de $\Delta^n u$ ne pouvait contenir des puissances de h dont l'exposant fût moindre que n, il s'ensuit que la fonction

$$n^i-\frac{n}{1}(n-1)^i+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^i-\text{etc.},$$

composée de $n+1$ termes, est nulle tant que $i<n$. D'un autre côté, le coefficient

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-i+1)}{1.2.3\ldots\ldots i}$$

s'évanouissant lorsque $i=m+1$, il en résulte que la

plus haute puissance de h, dans le développement de $\Delta^n u$, ne peut être que h^m.

380. D'après la propriété du monome x^m, toute fonction rationnelle et entière de x a toujours des différences constantes, savoir, celles dont l'ordre est marqué par l'exposant de la plus haute puissance de x, qui soit dans la fonction proposée. En effet, cette fonction étant de la forme $Ax^\alpha + Bx^\zeta + Cx^\gamma + \text{etc.}$; on aura

$$\Delta^n(Ax^\alpha + Bx^\zeta + Cx^\gamma + \text{etc.}) =$$
$$A\Delta^n.x^\alpha + B\Delta^n.x^\zeta + C\Delta^n.x^\gamma + \text{etc.} \ (*) \ (376);$$

et si α désigne le plus haut exposant de x, il viendra, pour le cas où $n=\alpha$,

$$\Delta^\alpha.x^\alpha = 1.2....\alpha h^\alpha, \quad \Delta^\alpha.x^\zeta = 0, \quad \Delta_\alpha.x = 0, \text{ etc.},$$

en sorte que

$$\Delta^\alpha(Ax^\alpha + Bx^\zeta + Cx^\gamma + \text{etc.}) = 1.2.3.....\alpha Ah^\alpha.$$

381. C'est surtout par rapport aux fonctions transcendantes, dont le calcul approximatif est laborieux, que l'on gagne beaucoup à se servir des différences, ainsi que le fera voir l'exemple suivant, tiré des logarithmes.

Soit $u = lx$; on aura

$$u_1 = l(x+h) = lx + l\left(1 + \frac{h}{x}\right) =$$
$$lx + M\left\{\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \text{etc.}\right\} (29),$$

d'où l'on tirera u_2, u_3, etc., en mettant $2h$, $3h$, etc., au lieu de h, et les formules du n° 378 donneront

(*) Il ne faut pas confondre $\Delta^n.x^\alpha$ avec $\Delta^n x^\alpha$; car la première de ces expressions est la différence de l'ordre n de la fonction x^α, tandis que $\Delta^n x^\alpha = (\Delta^n x)^\alpha$.

$$\Delta u = M\left\{\frac{h}{x} - \frac{1}{2}\frac{h^2}{x^2} + \frac{1}{3}\frac{h^3}{x^3} - \text{etc.}\right\},$$

$$\Delta^2 u = -M\left\{\frac{h^2}{x^2} - \frac{2h^3}{x^3} + \text{etc.}\right\},$$

$$\Delta^3 u = M\left\{\frac{2h^3}{x^3} - \text{etc.}\right\},$$

etc.

On poussera ces suites, selon la grandeur du nombre x, jusqu'à ce que la dernière différence soit assez petite pour être négligée sans erreur sensible.

Si l'on avait, par exemple, $x = 10000$, et $h = 1$, on trouverait pour les logarithmes ordinaires,

$$\Delta u = 0,00004\ 34272\ 76863,$$
$$\Delta^2 u = -0,00000\ 00043\ 42076,$$
$$\Delta^3 u = 0,00000\ 00000\ 00868;$$

et il est évident que si l'on ne voulait avoir les derniers résultats qu'avec dix chiffres seulement, on pourrait, sans craindre d'erreur sensible, négliger long-temps les différences du quatrième ordre; car il faudrait qu'elles fussent répétées un grand nombre de fois, pour influer sur la différence troisième; on formerait donc successivement, suivant la règle du n° 374, les colonnes des différences troisièmes, secondes, premières, et enfin les logarithmes des nombres

$$10001,\quad 10002,\quad 10003,\ \text{etc.},$$

en partant de celui de 10000, qui est égal à

$$4,00000\ 00000\ 00000.$$

Il faudrait faire le calcul avec 15 décimales, afin de reconnaître quand l'accumulation des quantités négligées pourrait commencer à influer sur le dernier chiffre qu'on se propose de conserver, ce dont on s'assure

au moyen de quelques logarithmes calculés rigoureusement à des intervalles éloignés; car lorsque, par la suite des additions successives, on parvient à ces logarithmes, il faut que la méthode des différences les donne tels qu'ils ont été déduits *à priori*, au moins dans les dix premiers chiffres, si c'est à ce nombre que l'on veut s'arrêter. Lorsque le dernier de ces chiffres cesserait d'être exact, ce qui n'aurait pas encore lieu pour le nombre 10050, on calculerait de nouveau *à priori* les différences Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, et l'on se servirait des nouvelles valeurs comme des précédentes, pour obtenir les logarithmes des nombres entiers qui suivent celui auquel on a dû s'arrêter.

Application du calcul des différences à l'interpolation des suites.

382. L'un des principaux usages du calcul des différences, a pour objet l'*interpolation des suites*, opération qui consiste à insérer entre les termes d'une suite, de nouveaux termes assujettis à la même loi que les premiers. Pour cela on regarde les différens termes de cette suite, comme des valeurs particulières que reçoit la fonction qui exprime le terme général, lorsqu'on assigne également des valeurs particulières à la variable d'où dépend ce terme, et qui dépend elle-même du rang qu'il occupe dans la suite proposée. Quand l'expression de ce terme est donnée, on en tire autant de valeurs qu'on veut; mais il n'en est pas ainsi lorsqu'on ne connaît qu'un certain nombre des premiers termes de la suite, ce qui est le cas ordinaire auquel on applique l'interpolation.

Il faudrait alors déduire l'expression analytique d'une fonction, de celle d'un nombre limité de valeurs nu-

mériques, ce qui ne se peut quand la forme de la fonction est inconnue; car on doit observer que ce problème revient à former l'équation d'une courbe passant par les points dont les valeurs de la variable indépendante représentent les abscisses, et celles de la fonction, les ordonnées, et qu'en quelque nombre que soient ces points, ils ne sauraient particulariser la courbe, si elle n'est pas donnée d'espèce. (*Trig.* 168.) Mais comme on ne cherche à interpoler une suite que dans des espaces très resserrés, on conçoit que l'expression de son terme général est développée suivant les puissances ascendantes de sa variable, et qu'il est permis de se borner à un petit nombre des premières puissances de cette variable; par ce moyen, la forme de la fonction, qui est alors rationnelle, se trouve déterminée.

Ainsi, sachant qu'aux valeurs

$$x,\quad x_1,\quad x_2,\quad x_3,\ \text{etc.},$$

d'une variable quelconque, répondent les valeurs

$$u,\quad u_1,\quad u_2,\quad u_3,\ \text{etc.},$$

d'une fonction de cette variable, on suppose que l'on ait pour toute autre valeur x',

$$u' = \alpha + \beta x' + \gamma x'^2 + \delta x'^3 + \text{etc.},$$

et l'on détermine les coefficiens α, β, γ, etc., par la condition que u' devienne successivement u, u_1, u_2, etc., lorsqu'on change x' en x, x_1, x_2, etc.

Cette détermination présente deux cas : le premier, dans lequel les valeurs x, x_1, x_2, x_3, etc. sont *équidifférentes*, se résout immédiatement par l'expression de u_n du n° 377.

En effet, quand on arrête la série

$$u' = \alpha + \beta x' + \gamma x'^2 + \text{etc.},$$

à l'un de ses termes, que je désignerai par $\mu x'^m$, et qu'on prend les valeurs de x' dans la progression x, $x+h$, $x+2h$, etc., la fonction u a, dans l'ordre m, des différences constantes (380), et par conséquent à la valeur $x+nh$ de la variable x', répond

$$u_n = u + \frac{n}{1}\Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots m}\Delta^m u.$$

Dans cette formule, les quantités

$$u, \quad \Delta u, \quad \Delta^2 u, \quad \text{etc.} \quad (374)$$

sont des nombres ; si l'on y fait $x+nh = x'$, d'où il suit $n = \frac{x'-x}{h}$, elle se transformera en une fonction rationnelle et entière de x', du même degré que l'expression de u', et puisqu'elle se change en u, u_1, u_2, etc., lorsqu'on y met 0, 1, 2, etc., pour n, elle prendra les mêmes valeurs quand x' deviendra x, $x+h$, $x+2h$, etc. : elle sera donc la fonction demandée.

On peut la simplifier en faisant $x' = x + h'$, ce qui donne

$$n = \frac{h'}{h} \quad \text{et} \quad u_n = u' =$$
$$u + \frac{h'}{h}\Delta u + \frac{h'(h'-h)}{h.2h}\Delta^2 u + \frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h.2h.3h}\Delta^3 u + \text{etc.}$$

Enfin, si l'on représente $u'-u$ par $\Delta' u$, il viendra

$$\Delta' u = \frac{h'}{h}\Delta u + \frac{h'(h'-h)}{h.2h}\Delta^2 u + \frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h.2h.3h}\Delta^3 u + \text{etc.}$$

383. Je passe maintenant aux applications.

Soit d'abord la suite

3, 7, 19, 39, 67, etc.,

correspondante aux indices

0, 1, 2, 3, 4, etc.;

on a pour ce cas,

$$u=3,\ \Delta u=4,\ \Delta^2 u=8,\ \Delta^3 u=0,\ h=1;$$

l'expression de $\Delta' u$ se réduit à ses deux premiers termes, et l'on obtient par son moyen,

$$\Delta' u=4h'+4h'(h'-1)=4h'^2:$$

ainsi pour l'indice h', il viendra $u'=3+4h'^2$. En prenant $h'=\frac{5}{2}$, par exemple, on trouverait que le terme correspondant à cet indice est 28.

Soit encore la suite

1, 4, 2, 3, 9, 16, etc.;

en prenant les indices comme à l'ordinaire, savoir,

0, 1, 2, 3, 4, 5, etc.,

et formant les différences, on trouvera

$$u=1,\ \Delta u=3,\ \Delta^2 u=-5,\ \Delta^3 u=8,$$
$$\Delta^4 u=-6,\ \Delta^5 u=0,\ h=1,$$

d'où l'on tirera

$$u'=1+3\frac{h'}{1}-5\frac{h'(h'-1)}{1.2}+8\frac{h'(h'-1)(h'-2)}{1.2.3}$$
$$-6\frac{h'(h'-1)(h'-2)(h'-3)}{1.2.3.4}.$$

En réduisant cette expression, et l'ordonnant par rap-

port aux puissances de h', on aura

$$u' = \frac{12 + 116h' - 111h'^2 + 34h'^3 - 3h'^4}{12}.$$

Il faut remarquer que cet exemple et le précédent n'offrent qu'un nombre limité d'ordres de différences. Sur ce pied, l'expression de u', qui est aussi limitée, représente exactement le terme général des séries proposées, et peut servir à les prolonger autant qu'on le voudra. Tous les nombres qu'on en déduira suivront la même loi, par rapport à leurs différences, que les premiers termes desquels on est parti; les séries dériveront ainsi d'une fonction algébrique rationnelle et entière.

384. Lorsqu'il s'agit de fonctions fractionnaires, irrationnelles ou transcendantes, la suite des différences $\Delta u, \Delta^2 u, \Delta^3 u$, etc., ne se termine plus rigoureusement, mais quand elle est décroissante, elle rend convergente l'expression

$$\Delta' u = \frac{h'}{h}\Delta u + \frac{h'(h'-h)}{h.2h}\Delta^2 u + \frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h.2h.3h}\Delta^3 u + \text{etc.},$$

et permet de la réduire à un petit nombre de termes, au moins pour un intervalle peu considérable. En voici un exemple tiré des tables de logarithmes. Je suppose que, par le moyen d'une table contenant les logarithmes depuis 1 jusqu'à 1000, avec dix décimales, on veuille avoir le logarithme de 3,1415926536, nombre très approchant du rapport de la circonférence au diamètre; on regardera alors les logarithmes contenus dans la table comme des valeurs particulières de la fonction u, les nombres comme les indices auxquels répondent ces valeurs, et l'on formera le tableau suivant :

$u=0,4969296481$				
$u_1=0,4983105538$	13809057			
$u_2=0,4996870826$	13765288	—43769		
$u_3=0,5010592622$	13721796	—43492	+277	
$u_4=0,5024271200$	13678578	—43218	+274	—3

dont la première colonne renferme les logarithmes de

3,14, 3,15, 3,16, 3,17, 3,18,

la seconde leurs différences premières, la troisième leurs différences secondes, la quatrième leurs différences troisièmes, et la cinquième leurs différences quatrièmes, qui se réduisent à trois unités du dernier ordre. On aura par ce moyen

$$\Delta u = +0,00138090 57, \quad \Delta^2 u = -0,00000043769,$$
$$\Delta^3 u = +0,0000000277, \quad \Delta^4 u = -0,0000000003,$$

et comme $h=0,01$, $h'=0,0015926536$,

on obtiendra

$$\frac{h'}{h}=0,15926536, \qquad \frac{h'-h}{2h}=\frac{h'}{2h}-\tfrac{1}{2}=-0,42036732,$$
$$\frac{h'-2h}{3h}=\frac{h'}{3h}-\tfrac{2}{3}=-0,61357821,$$
$$\frac{h'-3h}{4h}=\frac{h'}{4h}-\tfrac{3}{4}=-0,71018366:$$

avec ces valeurs il sera très facile de mettre en nombres la formule

$$u'=u+\frac{h'}{h}\Delta u+\frac{h'(h'-h)}{h.2h}\Delta^2 u+\frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h.2h.3h}\Delta^3 u$$
$$+\frac{h'(h'-h)(h'-2h)(h'-3h)}{h.2h.3h.4h}\Delta^4 u,$$

qui donnera $u'=0,4971498726$.

Il existe des moyens plus faciles pour obtenir les logarithmes des nombres exprimés par beaucoup de chiffres, mais le précédent est très propre à servir d'exemple pour la méthode d'interpolation. On doit reconnaître déjà que cette méthode s'étend à beaucoup d'autres cas; elle est surtout d'un très grand usage dans les calculs astronomiques.

385. Lorsque les valeurs x, x_1, x_2, x_3, etc. ne sont pas équidifférentes, on emploie immédiatement la formule

$$u' = \alpha + \beta x' + \gamma x'^2 + \delta x'^3 + \text{etc.},$$

dans laquelle la substitution des valeurs particulières x, x_1, x_2, x_3, fournit les équations

$$\begin{aligned} u &= \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.},\\ u_1 &= \alpha + \beta x_1 + \gamma x^2{}_1 + \delta x^3{}_1 + \text{etc.},\\ u_2 &= \alpha + \beta x_2 + \gamma x^2{}_2 + \delta x^3{}_2 + \text{etc.},\\ u_3 &= \alpha + \beta x_3 + \gamma x^2{}_3 + \delta x^3{}_3 + \text{etc.},\\ &\text{etc.}, \end{aligned}$$

dont le nombre doit être égal à celui des coefficiens indéterminés α, β, γ, etc.; et voici comment on obtient l'expression de ces coefficiens.

En retranchant successivement la première équation de la seconde, celle-ci de la troisième, etc., on parvient à des résultats respectivement divisibles par $x_1 - x$, $x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$, etc.; et d'où l'on tire

$$\begin{aligned} \frac{u_1 - u}{x_1 - x} &= \beta + \gamma(x_1 + x) + \delta(x^2{}_1 + x_1 x + x^2) + \text{etc.},\\ \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} &= \beta + \gamma(x_2 + x_1) + \delta(x^2{}_2 + x_2 x_1 + x^2{}_1) + \text{etc.},\\ \frac{u_3 - u_2}{x_3 - x_2} &= \beta + \gamma(x_3 + x_2) + \delta(x^2{}_3 + x_3 x_2 + x^2{}_2) + \text{etc.},\\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Posant, pour abréger,

$$\frac{u_1-u}{x_1-x}=U,\quad \frac{u_2-u_1}{x_2-x_1}=U_1,\quad \frac{u_3-u_2}{x_3-x_2}=U_2,\ \text{etc.},$$

on aura les équations

$$\begin{aligned}
U &= \beta+\gamma(x_1+x)+\delta(x^2{}_1+x_1x+x^2)+\text{etc.}\\
U_1 &= \beta+\gamma(x_2+x_1)+\delta(x^2{}_2+x_2x_1+x^2{}_1)+\text{etc.}\\
U_2 &= \beta+\gamma(x_3+x_2)+\delta(x^2{}_3+x_3x_2+x^2{}_2)+\text{etc.}\\
&\text{etc.};
\end{aligned}$$

retranchant encore U de U_1, U_1 de U_2, et ainsi de suite, et désignant par U', U'_1, etc., les quantités

$$\frac{U_1-U}{x_2-x},\quad \frac{U_2-U_1}{x_3-x_1},\quad \text{etc.},$$

on trouvera

$$\begin{aligned}
U' &= \gamma+\delta(x_2+x_1+x)+\text{etc.},\\
U'_1 &= \gamma+\delta(x_3+x_2+x_1)+\text{etc.},
\end{aligned}$$

d'où l'on tirera

$$U'_1-U'=\delta(x_3-x)+\text{etc.}$$

Maintenant si l'on fait

$$\frac{U'_1-U'}{x_3-x}=U'',$$

on aura $U''=\delta+\text{etc.}$, et si pour fixer les idées on ne suppose que quatre termes à l'expression de u', l'opération sera terminée à l'équation ci-dessus. Prenant la valeur qu'elle donne pour δ, et remontant à celles de γ, β, α, par le moyen des quantités U', U et u, il viendra

$$\begin{aligned}
\delta &= U'',\\
\gamma &= U'-U''(x_2+x_1+x),\\
\beta &= U-U'(x_1+x)+U''(x_2x_1+x_2x+x_1x),\\
\alpha &= u-Ux+U'x_1x-U''x_2x_1x.
\end{aligned}$$

Substituant ces valeurs dans l'expression de u', on aura

$$\left.\begin{aligned} u' = u &+ U(x'-x) + U'[x'^2-(x_1+x)x'+x_1x] \\ &+ U''[x'^3-(x_2+x_1+x)x'^2+(x_2x_1+x_2x+x_1x)x'-x_2x_1x] \end{aligned}\right\}.$$

Il est facile de voir que les coefficiens de U, U' et U'' sont décomposables en facteurs simples, et que l'on peut mettre u' sous la forme

$$u' = u + U(x'-x) + U'(x'-x)(x'-x_1) + U''(x'-x)(x'-x_1)(x'-x_2).$$

En poursuivant d'après cette méthode, on obtiendrait une formule analogue à la précédente; et quel que fût le nombre des valeurs x, x_1, x_2, ... de l'abscisse x', on aurait en général,

$$u' = u + U(x'-x) + U'(x'-x)(x'-x_1) + U''(x'-x)(x'-x_1)(x'-x_2) + U'''(x'-x)(x'-x_1)(x'-x_2)(x'-x_3) + \text{etc.},$$

en faisant

$$\frac{u_1-u}{x_1-x} = U, \quad \frac{u_2-u_1}{x_2-x_1} = U_1, \quad \frac{u_3-u_2}{x_3-x_2} = U_2, \quad \frac{u_4-u_3}{x_4-x_3} = U_3, \text{ etc.},$$

$$\frac{U_1-U}{x_2-x} = U', \quad \frac{U_2-U_1}{x_3-x_1} = U'_1, \quad \frac{U_3-U_2}{x_4-x_2} = U'_2, \text{ etc.},$$

$$\frac{U'_1-U'}{x_3-x} = U'', \quad \frac{U'_2-U'_1}{x_4-x_1} = U''_1, \text{ etc.},$$

$$\frac{U''_1-U''}{x_4-x} = U''', \text{ etc.},$$

etc.

Quand les valeurs x, x_1, x_2, x_3, etc. sont équidifférentes, on a

$$x_1 = x+h, \quad x_2 = x+2h, \quad x_3 = x+3h, \text{ etc.},$$

d'où l'on déduit

$$U=\frac{\Delta u}{h}, \qquad U_1=\frac{\Delta u_1}{h}, \quad U_2=\frac{\Delta u_2}{h}, \quad U_3=\frac{\Delta u_3}{h}, \text{ etc.},$$

$$U'=\frac{\Delta^2 u}{1.2h^2}, \quad U'_1=\frac{\Delta^2 u_1}{1.2h^2}, \quad U'_2=\frac{\Delta^2 u_2}{1.2h^2}, \text{ etc.},$$

$$U''=\frac{\Delta^3 u}{1.2.3h^3}, \quad U''_1=\frac{\Delta^3 u_1}{1.2.3h^3}, \text{ etc.},$$

$$U'''=\frac{\Delta^4 u}{1.2.3.4h^4}, \text{ etc.},$$

etc.;

faisant ensuite $x'=x+h'$, il en résulte

$$x'-x=h', \quad x'-x_1=h'-h, \quad x'-x_2=h'-2h,$$
$$x'-x_3=h'-3h, \text{ etc.},$$

et l'on voit ainsi que l'expression précédente de u', qui devient alors

$$u'=u+\frac{h'}{h}\Delta u+\frac{h'(h'-h)}{h.2h}\Delta^2 u + \frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h.2h.3h}\Delta^3 u+\text{etc.},$$

rentre dans celle du n° 382, obtenue par une voie bien différente.

386. Lagrange a présenté l'expression de u' sous une forme nouvelle, en observant que puisque les équations

$$u=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{etc.},$$
$$u_1=\alpha+\beta x_1+\gamma x^2_1+\delta x^3_1+\text{etc.},$$
$$u_2=\alpha+\beta x_2+\gamma x^2_2+\delta x^3_2+\text{etc.},$$
$$\text{etc.}$$

sont du premier degré seulement, par rapport à chacune des quantités α, β, γ, etc., u, u_1, u_2, etc., et que u' doit être exprimé en x', de manière qu'en y

faisant successivement $x' = x$, $x' = x_1$, $x' = x_2$, etc., il vienne $u' = u$, $u' = u_1$, $u' = u_2$, on peut écrire

$$u' = Xu + X_1 u_1 + X_2 u_2 + \text{etc.},$$

pourvu que X, X_1, X_2, etc., soient des fonctions de x' telles que par la supposition de $x' = x$, on ait en même temps

$$X = 1, \quad X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \text{ etc.},$$

que par celle de $x' = x_1$, on ait

$$X = 0, \quad X_1 = 1, \quad X_2 = 0, \text{ etc.},$$

que par celle de $x' = x_2$, on ait

$$X = 0, \quad X_1 = 0, \quad X_2 = 1, \text{ etc.},$$

et ainsi de suite, conditions qui seront remplies si l'on prend

$$X = \frac{(x' - x_1)(x' - x_2)(x' - x_3)\ldots}{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots},$$

$$X_1 = \frac{(x' - x)(x' - x_2)(x' - x_3)\ldots}{(x_1 - x)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots},$$

$$X_2 = \frac{(x' - x)(x' - x_1)(x' - x_3)\ldots}{(x_2 - x)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\ldots},$$

etc.

La loi qu'il faut observer dans la formation de ces quantités est on ne peut pas plus simple; leur numérateur contient, ainsi que leur dénominateur, autant de facteurs qu'il y a de quantités x, x_1, x_2, etc., moins une; et si l'on y fait les hypothèses indiquées ci-dessus, non-seulement on se convaincra qu'elles satisfont à la question proposée, mais on verra de plus comment il a été possible de prévoir qu'elles y satisferaient: on a donc cette nouvelle formule d'interpolation,

$$u' = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(x'-x_1)(x'-x_2)(x'-x_3)\ldots}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots}\,u \\ +\dfrac{(x'-x)(x'-x_2)(x'-x_3)\ldots}{(x_1-x)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots}\,u_1 \\ +\dfrac{(x'-x)(x'-x_1)(x'-x_3)\ldots}{(x_2-x)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots}\,u_2 \\ +\text{ etc.} \end{array} \right\},$$

très commode dans la pratique, parce qu'on en peut calculer chaque terme par le moyen des logarithmes. Il ne serait pas difficile de la ramener à celle du n° précédent, et même à celle du n° 382; c'est pourquoi je ne m'y arrêterai pas.

387. Ici il est aisé de voir, d'une manière évidente, que le problème de l'interpolation est indéterminé, quand des considérations particulières ne fixent pas la forme de la fonction qui doit représenter le terme général des nombres donnés.

En effet, les seules conditions auxquelles soient assujetties les inconnues X, X_1, X_2, etc., peuvent être remplies par des fonctions bien différentes de celles que Lagrange a choisies.

On trouve d'abord l'expression très simple

$$\sin m(x'-x_1)\sin n(x'-x_2)\sin p(x'-x_3)\text{ etc.},$$

qui jouit de la propriété de s'évanouir, lorsque

$$x'=x_1,\quad x'=x_2,\quad x'=x_3,\text{ etc.},$$

quels que soient les nombres m, n, p, etc. : on pourra donc poser l'équation

$$X=\frac{\sin m(x'-x_1)\sin n(x'-x_2)\sin p(x'-x_3)\text{ etc.}}{\sin m(x-x_1)\sin n(x-x_2)\sin p(x-x_3)\text{ etc.}},$$

dont le second membre se réduit à l'unité lorsque $x'=x$; et sur ce modèle, on formera aisément les

valeurs de X_1, X_2, etc., dans chacune desquelles on pourra prendre pour les coefficiens m, n, p, etc., tels nombres qu'on voudra.

Si de pareilles expressions s'accordent avec celles du n° précédent pour les valeurs de x' comprises dans la série x, x_1, x_2, etc., elles en diffèrent beaucoup dans les intervalles, dès que les arcs ne sont plus assez petits pour être sensiblement proportionnels à leurs sinus : on peut d'ailleurs substituer les tangentes aux sinus, et les conditions précédentes seront encore remplies.

388. Les formules d'interpolation s'appliquent d'une manière très utile dans la détermination approchée de l'intégrale $\int X dx$, ou de la quadrature des courbes. La première idée qui s'est présentée sur ce sujet, a été de substituer à la courbe proposée une courbe parabolique, assujettie à passer par un nombre donné de points de la première : il est évident que plus ces points seront multipliés et resserrés, plus l'exactitude croîtra.

En prenant d'abord la formule

$$u' = \alpha + \beta x' + \gamma x'^2 + \text{etc.},$$

pour représenter l'ordonnée de la courbe parabolique, l'aire de cette courbe sera exprimée par

$$\int u' dx' = \frac{\alpha x'}{1} + \frac{\beta x'^2}{2} + \frac{\gamma x'^3}{3} + \text{etc.} + const.;$$

quant aux coefficiens α, β, γ, etc., ils se concluront sans peine du développement de l'expression de u', dont on voudra faire usage.

Si l'on emploie celle du n° 382, qu'on y fasse $\frac{h'}{h} = x'$, elle deviendra

$$u' = u + \frac{x'\Delta u}{1} + \frac{x'(x'-1)\Delta^2 u}{1.2} + \frac{x'(x'-1)(x'-2)\Delta^3 u}{1.2.3} + \text{etc.},$$

et il faudra la pousser jusqu'au même nombre de termes que la précédente, c'est-à-dire celui des points par lesquels doit être déterminée la courbe parabolique.

Supposons que ce nombre soit 3 : on ne prendra que les trois premiers termes de la formule ci-dessus; en l'ordonnant suivant les puissances de x', il viendra

$$\alpha = u, \quad \beta = \Delta u - \tfrac{1}{2}\Delta^2 u, \quad \gamma = \tfrac{1}{2}\Delta^2 u,$$

quantités qui ne dépendront que des trois ordonnées consécutives u, u_1, u_2, répondant aux valeurs

$$h'=0, \quad h'=h, \quad h'=2h, \quad \text{ou} \quad x'=0, \quad x'=1 \quad x'=2,$$

et si l'on assigne 0 et 2 pour les limites de $\int u'dx'$, sa valeur sera

$$2u + 2(\Delta u - \tfrac{1}{2}\Delta^2 u) + \tfrac{4}{3}\Delta^2 u$$
$$= 2(u + \Delta u + \tfrac{1}{6}\Delta^2 u).$$

Dans ce cas, u' serait l'ordonnée d'une parabole QR, fig. 62. *fig.* 62, passant par trois points de la courbe proposée DE, et $\int u'dx'$, l'aire du segment de cette parabole, compris entre la première ordonnée PM et la troisième P_2M_2.

En général, cette parabole QR sera alternativement intérieure et extérieure à la proposée, *et vice versâ;* en sorte que l'aire de son segment différera dans une partie par défaut et dans l'autre par excès, de l'aire du segment correspondant de la courbe proposée DE; et alors il pourra s'opérer dans le résultat total une compensation plus ou moins approchée entre ces différences.

La formule précédente devient plus symétrique quand on remplace les différences Δu et $\Delta^2 u$ par leurs valeurs

$$u_1 - u \text{ et } u_2 - 2u_1 + u \quad (378);$$

on obtient, après les réductions,

$$\tfrac{1}{3}(u + 4u_1 + u_2).$$

Si l'on conçoit de même qu'il passe une nouvelle parabole par les points M_2, M_3, M_4, et ainsi de suite, et que l'on réunisse les aires de chacun de leurs segmens, on pourra embrasser une portion aussi grande que l'on voudra de la courbe proposée; et si la dernière ordonnée est représentée par u_m, m étant un nombre pair, on aura

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{3}(u+4u_1+u_2)+\tfrac{1}{3}(u_2+4u_3+u_4)\ldots.\\&\ldots\ldots\ldots\ldots+\tfrac{1}{3}(u_{m-2}+4u_{m-1}+u_m)\\&=\tfrac{1}{3}(u+u_m)+\tfrac{2}{3}(u_2+u_4\ldots.+u_{m-2})\\&\qquad+\tfrac{4}{3}(u_1+u_3\ldots.+u_{m-1}).\end{aligned}$$

Ce résultat, d'une forme assez élégante, ne comprenant que des lignes qu'on peut mesurer sur la figure, peut servir à évaluer des aires renfermées par des courbes dont on n'a pas l'équation, avantage que n'offre point la méthode du n° 233. Au reste, dans l'une et l'autre méthode, il faut calculer à part les portions comprises entre deux points singuliers, et multiplier davantage les ordonnées dans celles où la variation de courbure est le plus considérable.

De l'analogie des différences avec les puissances.

389. Le Calcul différentiel et celui des différences, quoique étant bien distincts, comme on le verra dans la suite, ont néanmoins de grands rapports entre eux, et peuvent s'appliquer l'un à l'autre. Lorsque l'on considère le premier sous le point de vue où l'a présenté Leibnitz, ou par la théorie des limites, il devient un cas particulier du second; on a dû le remarquer au commencement de cet Ouvrage, et pour le confirmer encore, je déduirai la série de Taylor, de l'équation

$$u_n = u + \frac{n}{1}\Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u + \text{etc.} \quad (377).$$

Soit $u = f(x)$, et que la variable x reçoive successivement un nombre n d'accroissemens égaux, représentés par α; la valeur u_n sera celle que prend u quand x devient $x + n\alpha$; faisant ensuite $n\alpha = h$, on aura $n = \frac{h}{\alpha}$ et

$$u_n = u + \frac{h}{\alpha}\Delta u + \frac{h(h-\alpha)}{1.2n\alpha^2}\Delta^2 u + \frac{h(h-\alpha)(h-2\alpha)}{1.2.3\alpha^3}\Delta^3 u + \text{etc.},$$

ce qui peut s'écrire ainsi,

$$f(x+h) = u + \frac{h}{1}\frac{\Delta u}{\alpha} + \frac{h(h-\alpha)}{1.2}\frac{\Delta^2 u}{\alpha^2} + \frac{h(h-\alpha)(h-2\alpha)}{1.2.3}\frac{\Delta^3 u}{\alpha^3} + \text{etc.}$$

Maintenant, si l'on conçoit que, h demeurant constante, α décroisse indéfiniment, ce qui revient à supposer le nombre n de plus en plus grand, le second membre de l'équation ci-dessus tendra vers une limite qui s'obtiendra en faisant $\alpha = 0$, et en observant que les rapports

$$\frac{\Delta u}{\alpha}, \quad \frac{\Delta^2 u}{\alpha^2}, \quad \frac{\Delta^3 u}{\alpha^3}, \quad \text{etc.}$$

ont alors pour limites, les coefficiens différentiels

$$\frac{du}{dx}, \quad \frac{d^2u}{dx^2}, \quad \frac{d^3u}{dx^3}, \quad \text{etc.}:$$

on aura donc encore

$$u+\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$

pour le développement de la fonction u, quand x est devenue $x+h$. C'est à peu près ainsi que Taylor est arrivé au théorème ci-dessus, qui porte son nom.

Lorsqu'une fois on y est parvenu, la théorie analytique du Calcul différentiel n'offre plus aucune difficulté; ainsi ce qui précède suffit pour montrer comment il résulte du Calcul des différences.

390. A l'aide du théorème de Taylor, le développement des différences d'un ordre quelconque pour une fonction quelconque s'obtient sans difficulté. On a premièrement

$$\Delta u=\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.};$$

et si, dans cette équation, on met successivement Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, etc., au lieu de u, on formera les expressions

$$\Delta^2 u=\frac{d\Delta u}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2\Delta u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3\Delta u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.};$$

$$\Delta^3 u=\frac{d\Delta^2 u}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2\Delta^2 u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.},$$

$$\Delta^4 u=\frac{d\Delta^3 u}{dx}\frac{h}{1}+\text{etc.},$$

$$\text{etc.},$$

au moyen desquelles le développement de chaque différence se déduit de celui de la précédente. On obtiendra d'abord

$$\Delta^2 u = \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{2} + \frac{d^4u}{dx^4}\frac{h^4}{2.3} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{2} + \frac{d^4u}{dx^4}\frac{h^4}{2.2} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{d^4u}{dx^4}\frac{h^4}{2.3} + \text{etc.}$$

Il serait facile de trouver la loi que suivent les termes de cette expression, mais on y parvient d'une manière plus générale, au moyen de l'analogie qui existe entre la différentiation des quantités et leur élévation aux puissances, analogie dont le n° 378 renferme les premières traces.

391. On a vu (27) que

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

et il suit de cette formule que

$$e^{\frac{du}{dx}h} = 1 + \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{du^2}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{du^3}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$
$$e^{\frac{du}{dx}h} - 1 = \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{du^2}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{du^3}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Si maintenant on transporte les exposans des puissances de du à la caractéristique d, le second membre de l'équation précédente deviendra

$$\frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

et sera la même chose que Δu : on aura donc

$$\Delta u = e^{\frac{du}{dx}h} - 1,$$

pourvu que dans le développement du second membre

on transporte à la caractéristique d les exposans des puissances de du.

D'après ce résultat, Lagrange a remarqué le premier qu'on avait en général

$$\Delta^n u = \left(e^{\frac{du}{dx}h} - 1\right)^n,$$

en observant toujours de transporter à la caractéristique d les exposans des puissances de du.

Depuis, on a simplifié cette manière d'écrire, en posant

$$\Delta u = \left(e^{\frac{d}{dx}h} - 1\right)u, \quad \Delta^n u = \left(e^{\frac{d}{dx}h} - 1\right)^n u;$$

car il n'y a plus rien à changer dans le développement; mais il faut bien se rappeler que la lettre d exprimant une caractéristique et non pas une quantité, les équations ci-dessus ne deviennent effectives que par le développement de leur second membre. Voici comment Laplace a démontré ce beau résultat.

Il est évident, par ce qui a été dit dans le n° précédent, que, quelle que soit l'expression de $\Delta^n u$, on doit avoir

$$\Delta^n u = \frac{d^n u}{dx^n} h^n + A' \frac{d^{n+1} u}{dx^{n+1}} h^{n+1} + A'' \frac{d^{n+2} u}{dx^{n+2}} h^{n+2} + \text{etc.},$$

A', A'', etc. désignant des coefficiens qui ne dépendent que de n. Cette équation devant subsister pour toutes les formes que peut prendre la fonction u, conviendra nécessairement au cas où $u = e^x$; mais alors

$$\frac{du}{dx} = \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{d^3 u}{dx^3} = \text{etc.} = e^x,$$

$\Delta u = e^{x+h} - e^x = e^x(e^h - 1)$, $\Delta^2 u = (e^{x+h} - e^x)(e^h - 1) = e^x(e^h - 1)^2$, $\Delta^3 u = e^x(e^h - 1)^3$, ... $\Delta^n u = e^x(e^h - 1)^n$.

Substituant cette valeur de $\Delta^n u$, dans le premier membre de l'équation posée plus haut, et celles de

$\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, etc., dans le second, il viendra

$$(e^h - 1)^n = h^n + A'h^{n+1} + A''h^{n+2} + \text{etc.},$$

d'où il suit que les coefficiens A', A'', etc. doivent être les mêmes que ceux du développement de $(e^h - 1)^n$, puisque l'accroissement h doit demeurer indéterminé. Il ne peut d'ailleurs exister aucune difficulté à l'égard des coefficiens différentiels de u, qui se déduisent tous des puissances de du par le changement indiqué dans les exposans.

La même relation entre les puissances et les différences se retrouve dans les fonctions d'un nombre quelconque de variables, et se prouve d'une manière analogue.

392. De $\Delta u = e^{\frac{du}{dx}h} - 1$ on tire $e^{\frac{du}{dx}h} = 1 + \Delta u$; et si l'on prend les logarithmes de part et d'autre, il viendra

$$\frac{du}{dx}h = l(1 + \Delta u).$$

Lagrange a encore reconnu que cette équation serait vraie, si dans le développement de $l(1 + \Delta u)$, on transportait à la caractéristique Δ, les exposans des puissances de Δu; on aurait par ce moyen

$$\frac{du}{dx}h = \Delta u - \tfrac{1}{2}\Delta^2 u + \tfrac{1}{3}\Delta^3 u - \tfrac{1}{4}\Delta^4 u + \text{etc.} \quad (29).$$

Au lieu de m'arrêter à démontrer ce cas particulier, je vais prouver qu'en général

$$\frac{d^n u}{dx^n}h^n = \{l(1 + \Delta u)\}^n,$$

en changeant Δu^2, Δu^3, etc. en $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, etc., ou bien

$$\frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}x^n} h^n = \{\mathrm{l}(1+\Delta)\}^n u,$$

sans rien changer dans le développement.

Il est visible que la question revient à déterminer les coefficiens différentiels $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}$, etc., en fonction des différences successives de u, et que pour cela on a des équations de la forme

$$\Delta^n u = \frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}x^n} h^n + A' \frac{\mathrm{d}^{n+1} u}{\mathrm{d}x^{n+1}} h^{n+1} + A'' \frac{\mathrm{d}^{n+2} u}{\mathrm{d}x^{n+2}} h^{n+2} + \text{etc.},$$

$$\Delta^{n+1} u = \frac{\mathrm{d}^{n+1} u}{\mathrm{d}x^{n+1}} h^{n+1} + A' \frac{\mathrm{d}^{n+2} u}{\mathrm{d}x^{n+2}} h^{n+2} + \text{etc.},$$

$$\Delta^{n+2} u = \frac{\mathrm{d}^{n+2} u}{\mathrm{d}x^{n+2}} h^{n+2} + \text{etc.},$$

etc.,

dans lesquelles les coefficiens différentiels ne montent qu'au premier degré : on peut donc faire

$$\frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}x^n} h^n = \Delta^n u + B' \Delta^{n+1} u + B'' \Delta^{n+2} u + B''' \Delta^{n+3} u + \text{etc.}$$

On obtiendrait facilement la valeur des coefficiens inconnus B', B'', B''', etc., par l'élimination successive de

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1} u}{\mathrm{d}x^{n+1}} h^{n+1}, \quad \frac{\mathrm{d}^{n+2} u}{\mathrm{d}x^{n+2}} h^{n+2}, \text{ etc.};$$

mais puisque l'équation hypothétique doit avoir lieu, quel que soit u, elle subsistera encore lorsqu'on y fera $u = e^x$, ce qui donnera

$$\frac{\mathrm{d}^i u}{\mathrm{d}x^i} = e^x, \text{ et } \Delta^i u = e^x (e^h - 1)^i,$$

quelque valeur qu'ait le nombre entier i ; et l'on trouvera par conséquent

$$h^n = (e^h - 1)^n + B'(e^h - 1)^{n+1} + B''(e^h - 1)^{n+2} + \text{etc.}$$

Pour mettre en évidence l'identité des deux membres de cette équation, il suffit d'observer que

$$h^n = \{l(1+e^h-1)\}^n,$$

parce que le développement de $l(1+e^h-1)$, ordonné suivant les puissances de e^h-1, qui est

$$e^h-1-\tfrac{1}{2}(e^h-1)^2+\tfrac{1}{3}(e^h-1)^3-\tfrac{1}{4}(e^h-1)^4+\text{etc.},$$

étant élevé à la puissance n, deviendra comparable à la série

$$(e^h-1)^n+B'(e^h-1)^{n+1}+B''(e^h-1)^{n+2}+\text{etc.},$$

dont les coefficiens numériques B', B'', etc. seront par conséquent déterminés. Si l'on écrit Δu à la place de e^h-1, et $\frac{d^n u}{dx^n}h^n$ à celle de h^n, on aura l'équation $\frac{d^n u}{dx^n}h^n=\{l(1+\Delta)\}^n u$, posée précédemment.

En faisant, pour abréger, $e^h-1=\omega$, et développant $(\omega-\frac{1}{2}\omega^2+\frac{1}{3}\omega^3-\frac{1}{4}\omega^4+\text{etc.})^n$, suivant les puissances de ω, par la méthode du n° 55, on obtiendra les valeurs de B', B'', etc.

393. La formule du n° 382 se déduit aussi du théorème de Taylor, qui devient une formule d'interpolation, lorsqu'on y remplace les coefficiens différentiels par leur expression en différences, tirée du n° précédent.

En effet l'équation

$$\frac{d^i u}{dx^i}h^i=\Delta^i u+A'\Delta^{i+1}u+A''\Delta^{i+2}u+A'''\Delta^{i+3}u+\text{etc.}$$

donne

$$\frac{d^i u}{dx^i}=\frac{1}{h^i}(\Delta^i u+A'\Delta^{i+1}u+A''\Delta^{i+2}u+\text{etc.}).$$

Si l'on tirait successivement de cette équation les va-

leurs de $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^3u}{dx^3}$, etc., pour les substituer dans la série

$$u+\frac{du}{dx}\frac{h'}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h'^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h'^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$

qui exprime ce que devient u lorsque x devient $x+h'$, on aurait un résultat de la forme

$$u+\frac{h'}{h}\Delta u+\left(B'\frac{h'}{h}+B''\frac{h'^2}{h^2}\right)\Delta^2u + \left(B'_1\frac{h'}{h}+B''_1\frac{h'^2}{h^2}+B'''_1\frac{h'^3}{h^3}\right)\Delta^3u+\text{etc.},$$

B', B'', B'_1, B''_1, B'''_1, etc. étant, ainsi que A', A'', etc., des coefficiens numériques indépendans de h; et désignant par $\Delta'u$ l'accroissement que reçoit la fonction u, dans le passage de x à $x+h'$, il viendrait

$$u+\Delta'u=u+\frac{h'}{h}\Delta u+\left(B'\frac{h'}{h}+B''\frac{h'^2}{h^2}\right)\Delta^2u+\text{etc.}$$

Cette équation devant avoir lieu, quel que soit u, subsiste encore dans le cas où $u=e^v$, et se change alors en

$$e^{h'}=1+\frac{h'}{h}(e^h-1)+\left(B'\frac{h'}{h}+B''\frac{h'^2}{h^2}\right)(e^h-1)^2+\text{etc.},$$

dont on ramène, par le développement, le premier membre à la même forme que le second, en observant que $e^{h'}=[1+(e^h-1)]^{\frac{h'}{h}}$; et comme en remettant dans le second, u, Δu, Δ^2u, etc., à la place des quantités 1, e^h-1, $(e^h-1)^2$, etc., on retombe sur le développement de $u+\Delta'u$, on doit en conclure que

$$u+\Delta'u=(1+\Delta)^{\frac{h'}{h}}u.$$

Ce résultat, aussi simple qu'élégant, a été présenté par Lagrange, comme une conséquence de l'analogie que les différences ont avec les puissances. En effet, il suit de l'équation $e^{\frac{du}{dx}h} = 1 + \Delta u$ (392) que..... $e^{\frac{du}{dx}h'} = (1 + \Delta u)^{\frac{h'}{h}}$, ce qui donne sur-le-champ..... $1 + \Delta' u = (1 + \Delta u)^{\frac{h'}{h}}$, puisque $e^{\frac{du}{dx}h'} = 1 + \Delta' u$.

En développant le second membre de cette dernière équation, et transportant à la caractéristique Δ dans le second membre, les exposans des puissances de Δu on trouvera, comme ci-dessus,

$$\Delta' u = \frac{h'}{h}\Delta u + \frac{h'(h'-h)}{h.2h}\Delta^2 u + \frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h.2h.3h}\Delta^3 u + \text{etc.} \quad (*).$$

Du Calcul inverse des différences, par rapport aux fonctions explicites d'une seule variable.

394. Le Calcul inverse des différences est, à l'égard du Calcul direct, ce qu'est le Calcul intégral, par rapport au Calcul différentiel : il a pour objet de remonter des différences aux fonctions primitives. Je

(*) Ces curieuses analogies des puissances avec les différences et les différentielles, sont développées avec beaucoup d'étendue dans le 3e volume du Traité in-4°. J'y ai indiqué plusieurs Mémoires insérés sur ce sujet, dans les *Transactions philosophiques*, et quelques remarques de M. Herschel, dans l'Appendice qu'il a mis à la suite de la traduction qu'il a bien voulu faire, conjointement avec MM. Babbage et Peacok, de la 2e édition du présent Traité élémentaire.

m'occuperai d'abord des différences qui sont exprimées immédiatement par la variable indépendante, c'est-à-dire où l'on a pour déterminer u_x, une équation de la forme

$$\Delta^r u_x = f(x),$$

l'accroissement de x étant constant et donné : je le représenterai à l'ordinaire par h.

Soit premièrement $r = 1$, d'où $\Delta u_x = f(x)$; pour indiquer l'opération qui doit faire revenir de Δu_x à u_x, on emploie la caractéristique Σ, et l'on écrit en conséquence

$$\Sigma \Delta u_x = u_x = \Sigma f(x),$$

les caractéristiques Δ et Σ indiquant des opérations contraires, qui se détruisent lorsqu'on les effectue l'une après l'autre sur la même fonction.

L'opération indiquée par le signe Σ s'appelle aussi *intégration ;* car $\Sigma f(x)$ désigne une véritable somme. En effet, si l'on ajoute les équations (1) du n° 375, il viendra

$$u_n = u + \Delta u + \Delta u_1 + \Delta u_2 \ldots + \Delta u_{n-1};$$

et si l'on représente par a la première valeur de x, et par u celle de u_x, qui s'y rapporte, on aura, pour une valeur quelconque $x = a + nh$,

$$\Sigma f(x) = u + f(a) + f(a+h) + f(a+2h) \ldots\ldots\ldots\ldots + f[a+(n-1)h].$$

Cette expression, qui augmenterait de $f(a+nh)$ ou de $f(x)$, si l'on ajoutait h à la dernière valeur attribuée à x, et qui a par conséquent pour différence $f(x)$, se compose ainsi de la somme de toutes les valeurs que prend $f(x)$ depuis $x = a$ inclusivement jusqu'à..... $x = a + (n-1)h$, plus de la première valeur de u

qui est indéterminée, et qui tient ici la place de la constante arbitraire que le passage de u_x à Δu_x a pu faire disparaître.

Pour revenir de $\Delta^r u_x = f(x)$ à u_x, il est évident qu'il faut effectuer autant d'intégrations qu'il y a eu de différentiations, ce qu'on indiquerait ainsi.

$$\Sigma^r \Delta^r u_x = u_x = \Sigma^r f(x).$$

A chacune de ces opérations, il faudrait ajouter une nouvelle constante, ce qu'on peut voir aussi en observant que l'équation $\Delta^r u_x = f(x)$, ne donnant les différences de la fonction qu'à commencer de l'ordre r, laisse indéterminées les r quantités

$$u, \quad \Delta u, \quad \Delta^2 u, \ldots \Delta^{r-1} u,$$

et par conséquent les r premiers termes de l'expression

$$u_n = u + \frac{n}{1} \Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^2 u + \text{etc.} \quad (377),$$

au moyen de laquelle on passe de la valeur u relative à $x = a$, à celle qui se rapporte à $x = a + nh$.

395. On voit donc qu'ici, comme pour les différentielles, l'intégration introduit un nombre de constantes arbitraires égal à l'exposant de l'ordre; mais il y a cette différence, que les quantités qui disparaissent quand on passe aux différentielles, sont absolument constantes, au lieu que, pour se détruire quand on prend les différences, il suffit qu'une quantité demeure la même lorsqu'on passe de x à $x + h$: et il en existe de telles; car il est visible que l'expression

$$\varphi\left(\sin \frac{2\pi x}{h}, \cos \frac{2\pi x}{h}\right),$$

qui devient alors

$$\varphi\left[\sin\left(\frac{2\pi x}{h}+2\pi\right),\quad \cos\left(\frac{2\pi x}{h}+2\pi\right)\right],$$

jouit de cette propriété, quelle que soit la forme de la fonction φ.

On fait entrer en même temps le sinus et le cosinus dans la fonction, pour qu'elle ne redevienne la même que dans le seul passage de x à $x+h$, ce qui n'aurait pas lieu pour une fonction qui ne contiendrait que l'un ou l'autre, puisque

$$\sin\frac{2\pi x}{h}=\sin\frac{2\pi(\frac{1}{2}h-x)}{h}=\sin\left(\pi-\frac{2\pi x}{h}\right),$$
$$\cos\frac{2\pi x}{h}=\cos\frac{2\pi(h-x)}{h}=\cos\left(2\pi-\frac{2\pi x}{h}\right);$$

nous donnerons dans la suite la construction géométrique de ces fonctions.

396. Il est à propos de remarquer qu'en prenant l'intégrale de chaque membre de l'équation

$$\Delta u+\Delta v-\Delta w=\Delta(u+v-w)\quad (376),$$

il vient

$$\Sigma(\Delta u+\Delta v-\Delta w)=u+v-w$$
$$=\Sigma\Delta u+\Sigma\Delta v-\Sigma\Delta w,$$

ce qui ramène l'intégration des différences polynomes à celle des différences monomes.

De même l'équation

$$a\Delta u=\Delta.au\quad \text{donne}\ .\ \Sigma.a\Delta u=au=a\Sigma\Delta u,$$

par où l'on voit que les constantes passent, comme on veut, sous le signe Σ ou hors de ce signe.

397. Lorsque $f(x)$ est rationnelle et entière, l'expression de u_n, en se terminant, en donne l'intégrale exacte. En effet, si m désigne l'ordre auquel les diffé-

rences de cette fonction sont constantes (380), comme de $\Delta^r u_x = f(x)$, il suit $\Delta^m f(x) = \Delta^{r+m} u_x$, et que cette dernière différence est constante, on a sur-le-champ

$$u_n = u + \frac{n}{1}\Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-r-m+1)}{1.2.3.\ldots.(r+m)}\Delta^{r+m} u,$$

u, Δu, $\Delta^2 u$, etc. répondant à $x = a$; et si l'on fait $a + nh = x$, u_n deviendra u_x.

En posant, pour abréger, $f(x) = v_x$, il viendra

$$\Delta^r u = v, \quad \Delta^{r+1} u = \Delta v, \ldots\ldots \Delta^{r+m} u = \Delta^m v;$$

u et ses différences jusqu'à l'ordre $r-1$ inclusivement demeurent arbitraires, ainsi qu'on l'a déjà vu.

Soit pour exemple

$$\Delta u_x = x^3 - 5x^2 + 6x - 1,$$

l'accroissement de x étant 1; on aura $r = 1$, $m = 3$, $h = 1$, et si l'on suppose $a = 0$, on trouvera

$$v = -1, \quad \Delta v = 2, \quad \Delta^2 v = -4,$$
$$\Delta^3 v = 6 \qquad \Delta^4 v = 0 \quad (380),$$

d'où

$$u_x = u - 1.\frac{x}{1} + 2.\frac{x(x-1)}{1.2} - 4.\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} + 6.\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4} \Big\} \Sigma(x^3 - 5x^2 + 6x - 1) =$$
$$= \frac{3x^4 - 26x^3 + 69x^2 - 58x}{12} + const.$$

La formule générale de cet article comprend le cas dans lequel la valeur donnée pour Δu_x serait constante : on aurait alors $\Delta^2 u$ ou $\Delta v = 0$.

On voit immédiatement aussi que

$$a = \frac{ax + ah - ax}{h} = \frac{\Delta . ax}{h},$$

donne, en intégrant le premier et le dernier membre,

$$\Sigma a = \frac{ax}{h} + const., \text{ d'où } \Sigma 1 = \Sigma x = \frac{x}{h}.$$

398. Quoique la formule précédente suffise pour toutes les fonctions rationnelles et entières, il est à propos de faire connaître quelques autres expressions qui ont aussi des avantages qui leur sont propres; et pour commencer par celles qui sont les plus simples, je m'occuperai d'abord des produits composés de facteurs équidifférens.

Soit

$$u = x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h];$$

si l'on en prend la différence, on obtiendra

$$\begin{aligned}\Delta u &= (x+h)(x+2h)(x+3h)\ldots(x+mh)\\ &\quad - x(x+h)(x+2h)\ldots\ldots[x+(m-1)h]\\ &= (x+h)(x+2h)\ldots\ldots[x+(m-1)h]\,mh;\end{aligned}$$

et comme $\Sigma \frac{\Delta u}{mh} = \frac{\Sigma \Delta u}{mh} = \frac{u}{mh}$, on aura

$$\begin{aligned}&\Sigma(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]\\ &= \frac{x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]}{mh} + const.\end{aligned}$$

Si, pour ramener à m le nombre des facteurs affectés du signe Σ, l'on écrit maintenant $x - h$ au lieu de x, et $m+1$ au lieu de m, il viendra

$$\begin{aligned}&\Sigma x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]\\ &= \frac{(x-h)x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]}{(m+1)h}.\end{aligned}$$

On voit ici que dans l'intégrale, le nombre des facteurs surpasse de l'unité celui des facteurs de la différence, et que le diviseur est $m+1$, ce qui est bien analogue à la formule $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ (167).

On intègre aussi la fraction

$$y = \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]},$$

parce qu'en prenant la différence, on trouve

$$\Delta u = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(x+h)(x+2h)(x+3h)\ldots(x+mh)} \\ -\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]} \end{array} \right.$$

$$= \frac{-mh}{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+mh)};$$

repassant aux intégrales et mettant pour u sa valeur, il vient

$$\Sigma \frac{-1}{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+mh)} = \frac{u}{mh}$$

$$= \frac{1}{mhx(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]};$$

et si l'on écrit $m-1$ au lieu de m, on obtiendra

$$\Sigma \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]}$$

$$= \frac{-1}{(m-1)hx(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-2)h]}.$$

399. Les formules ci-dessus peuvent servir aussi à l'intégration des fonctions de la forme

$$Ax^\alpha + Bx^\zeta + Cx^\gamma + \text{etc.},$$

parce que ces fonctions se transforment en produits de facteurs dont les différences sont constantes. Pour le faire voir, je choisis cet exemple très simple : x^3, et je fais

$$x^3=(x+h)(x+2h)(x+3h)+A(x+h)(x+2h)+B(x+h)+C,$$

en supposant que h désigne l'accroissement de x. Si l'on développe, et qu'on ordonne suivant les puissances de x, on aura

$$\begin{aligned}x^3=x^3&+6hx^2+11h^2x+6h^3\\&+Ax^2+3Ahx+2Ah^2\\&+Bx+Bh\\&+C;\end{aligned}$$

et comparant entre eux les termes affectés de la même puissance de x, on formera les équations

$$\begin{aligned}6h+A&=0,\\11h^2+3Ah+B&=0,\\6h^3+2Ah^2+Bh+C&=0,\end{aligned}$$

desquelles on tirera

$$A=-6h,\quad B=7h^2,\quad C=-h^3,$$

et

$$x^3=(x+h)(x+2h)(x+3h)-6h(x+h)(x+2h)+7h^2(x+h)-h^3,$$

ce qui donnera, en vertu du n° précédent,

$$\Sigma x^3=\frac{1}{4h}x(x+h)(x+2h)(x+3h)-2x(x+h)(x+2h)+\frac{7}{2}hx(x+h)-h^2x+const.,$$

puisque $\Sigma -h^3=-h^3\Sigma 1=-h^2x$ (397).

400. Lorsque $u=x^{m+1}$ et que m est un nombre entier, il vient

$$\Delta u = \frac{(m+1)}{1} x^m h + \frac{(m+1)m}{1.2} x^{m-1} h^2 + \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3} x^{m-2} h^3 + \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{1.2.3.4} x^{m-3} h^4 \ldots + h^{m+1} x^0.$$

En intégrant terme à terme chaque membre de cette équation, remettant dans le premier x^{m+1}, au lieu de u, et passant hors du signe Σ les facteurs constans, on obtiendra

$$x^{m+1} = \frac{m+1}{1} h \Sigma x^m + \frac{(m+1)m}{1.2} h^2 \Sigma x^{m-1} + \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3} h^3 \Sigma x^{m-2} \ldots + h^{m+1} \Sigma x^0.$$

Cette équation ferait connaître l'intégrale Σx^m, si l'on avait Σx^{m-1}, Σx^{m-2}, ... Σx^0, puisqu'on en tirerait

$$\Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)h} - \left\{ \frac{m}{1.2} h \Sigma x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2.3} h^2 \Sigma x^{m-2} \ldots + \frac{1}{m+1} h^m \Sigma x^0 \right\}.$$

Si l'on écrit successivement dans cette dernière $m-1$, $m-2$, $m-3$, etc. pour m, on formera des expressions de Σx^{m-1}, Σx^{m-2}, Σx^{m-3}, etc., qui ne dépendront que des intégrales des puissances de x qui leur seront respectivement inférieures. On peut aussi former ces valeurs en remontant; et si l'on prend d'abord $m = 0$, il vient $\Sigma x^0 = \frac{x}{h}$, comme dans le n° 397, parce que la formule générale ne doit renfermer qu'un nombre m de termes affectés du signe Σ.

Faisant ensuite $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$, etc., et substituant successivement pour Σx^0, Σx^1, Σx^2, etc., les valeurs auxquelles on parviendra, on formera cette table :

$$\Sigma x^0 = \frac{x}{h},$$

$$\Sigma x = \frac{1}{2}\frac{x^2}{h} - \frac{1}{2}x,$$

$$\Sigma x^2 = \frac{1}{3}\frac{x^3}{h} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2.3}xh,$$

$$\Sigma x^3 = \frac{1}{4}\frac{x^4}{h} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2.2}x^2h,$$

$$\Sigma x^4 = \frac{1}{5}\frac{x^5}{h} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3h - \frac{1}{5.6}xh^3,$$

$$\Sigma x^5 = \frac{1}{6}\frac{x^6}{h} - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{2.6}x^4h - \frac{1}{2.6}x^2h^3,$$

etc.,

où, pour abréger, on a omis la constante arbitraire que comporte chaque résultat.

401. Au lieu de pousser plus loin cette induction, on peut supposer en général

$$\Sigma x^m = Ax^{m+1} + Bx^m + Cx^{m-1} + Dx^{m-2} + \text{etc.};$$

en prenant la différence première de chaque membre, on trouvera

$$x^m = A\frac{(m+1)}{1}x^mh + A\frac{(m+1)m}{1.2}x^{m-1}h^2 + A\frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}x^{m-2}h^3 + \text{etc.}$$
$$+ B\frac{m}{1}x^{m-1}h + B\frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}h^2 + \text{etc.}$$
$$+ C\frac{(m-1)}{1}x^{m-2}h + \text{etc.}$$
$$+ \text{etc.},$$

et comparant entre eux les termes affectés d'une même puissance de x, on obtiendra, entre les coefficiens A, B, C, D, etc., les relations suivantes :

$$A=\frac{1}{(m+1)h},$$

$$B=-A\frac{(m+1)h}{2}=-\tfrac{1}{2},$$

$$C=-A\frac{(m+1)mh^2}{2.3}-B\frac{mh}{2},$$

$$D=-A\frac{(m+1)m(m-1)h^3}{2.3.4}-B\frac{m(m-1)h^2}{2.3}-C\frac{(m-1)}{2}h,$$

etc.,

avec lesquelles on déduira facilement les uns des autres les coefficiens de l'expression de Σx^m, quel que soit l'exposant m. En calculant immédiatement les douze premiers termes, on trouvera

$$\Sigma x^m=\frac{x^{m+1}}{(m+1)h}-\frac{1}{2}x^m$$

$$+\frac{1}{2.3}\cdot\frac{mh}{2}x^{m-1}-\frac{1}{6.5}\cdot\frac{m(m-1)(m-2)h^3}{2.3.4}\quad x^{m-3}$$

$$+\frac{1}{6.7}\cdot\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)h^5}{2.3.4.5.6}\quad x^{m-5}$$

$$-\frac{3}{10.9}\cdot\frac{m(m-1)\ldots(m-6)h^7}{2.3\ldots8}\quad x^{m-7}$$

$$+\frac{5}{6.11}\cdot\frac{m(m-1)\ldots(m-8)h^9}{2.3\ldots10}\quad x^{m-9}$$

$$-\frac{691}{210.13}\cdot\frac{m(m-1)\ldots(m-10)h^{11}}{2.3\ldots12}\quad x^{m-11}$$

$$+\frac{35}{2.15}\cdot\frac{m(m-1)\ldots(m-12)h^{13}}{2.3\ldots14}\quad x^{m-13}$$

$$-\frac{3617}{30.17}\cdot\frac{m(m-1)\ldots(m-14)h^{15}}{2.3\ldots16}\quad x^{m-15}$$

$$+\frac{43867}{42.19}\cdot\frac{m(m-1)\ldots(m-16)h^{17}}{2.3\ldots18}\quad x^{m-17}$$

$$-\frac{1222277}{110.21}\cdot\frac{m(m-1)\ldots(m-18)h^{19}}{2.3\ldots20}\quad x^{m-19}$$

$$+\text{etc.}\qquad +const.,$$

formule dans laquelle les coefficiens exprimés en nombres méritent attention, parce qu'ils reviennent souvent dans la théorie des suites.

Je ferai observer, avant de finir cet article, que si l'on multiplie Σx^m par h, et qu'on passe cet accroissement sous le signe Σ, on aura l'équation

$$\Sigma x^m h = \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{2} x^m h + \frac{1}{2}\frac{mh^2}{2.3} x^{m-1} - \text{etc.} + const.,$$

dont le second membre a pour limite $\frac{x^{m+1}}{m+1} + const.$ lorsque h s'évanouit, cas auquel $\Sigma x^m h$ se change en $\int x^m dx$, d'après ce qu'on a vu dans le n° 236.

402. Ce qui précède fournit le moyen d'intégrer toutes les fonctions algébriques, rationnelles et entières, dans le cas où la variable indépendante reçoit un accroissement constant. Soit pour exemple la fonction

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D;$$

en observant que

$$\Sigma(Ax^3+Bx^2+Cx+D) = A\Sigma x^3 + B\Sigma x^2 + C\Sigma x + D\Sigma x^0,$$

et mettant pour Σx^3, Σx^2, Σx et Σx^0, leurs valeurs, on trouvera

$$\Sigma(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = \frac{A}{4h} x^4 - \frac{3Ah - 2B}{6h} x^3 + \frac{Ah^2 - 2Bh + 2C}{4h} x^2 + \frac{Bh^2 - 3Ch + 6D}{6h} x + const.$$

403. Dans l'intégration des fonctions transcendantes, je me bornerai aux fonctions exponentielles et circulaires. On a pour les premières

$$\Delta . a^x = a^x (a^h - 1),$$

d'où il résulte

$$a^x = \Sigma a^x(a^h - 1) = (a^h - 1)\Sigma a^x$$

et

$$\Sigma a^x = \frac{a^x}{a^h - 1}.$$

404. Pour les fonctions circulaires, on a 1°. l'équation

$$\cos A - \cos B = -2\sin\tfrac{1}{2}(A - B)\sin\tfrac{1}{2}(A + B),$$

qui donne

$$\Delta\cos x = \cos(x + h) - \cos x = -2\sin\tfrac{1}{2}h\sin(x + \tfrac{1}{2}h),$$

d'où l'on tire

$$\sin(x + \tfrac{1}{2}h) = -\frac{\Delta\cos x}{2\sin\frac{1}{2}h}, \text{ et } \sin x = -\frac{\Delta\cos(x - \frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h},$$

en écrivant $x - \frac{1}{2}h$, au lieu de x; prenant ensuite l'intégrale de chaque membre de la dernière équation, on obtient

$$\Sigma\sin x = -\frac{\cos(x - \frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h} + const.$$

2°. L'équation

$$\sin A - \sin B = 2\sin\tfrac{1}{2}(A - B)\cos\tfrac{1}{2}(A + B),$$

donne

$$\Delta\sin x = \sin(x + h) - \sin x = 2\sin\tfrac{1}{2}h\cos(x + \tfrac{1}{2}h),$$

d'où il suit

$$\cos(x + \tfrac{1}{2}h) = \frac{\Delta\sin x}{2\sin\frac{1}{2}h}, \quad \cos x = \frac{\Delta\sin(x - \frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h},$$

$$\Sigma\cos x = \frac{\sin(x - \frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h} + const.$$

3°. La conversion des puissances de sinus, de cosinus et de leurs produits, en fonction de sinus et de cosinus d'arcs multiples, ramènera aux deux formules

précédentes, l'intégration de la fonction générale $\sin x^m \cos x^n$, lorsque les exposans m et n seront des nombres entiers positifs.

En effet, cette fonction sera changée en une suite de termes de la forme $A \sin qx$, ou $A \cos qx$, dont les intégrales se déduiront de celles de $A \sin x$ et de $A \cos x$ en écrivant qx et qh, au lieu de x et de h; et il est facile de voir que l'on aura en général

$$\Sigma \sin (p+qx) = -\frac{\cos(p+qx-\frac{1}{2}qh)}{2\sin\frac{1}{2}qh} + const.,$$

$$\Sigma \cos (p+qx) = \frac{\sin(p+qx-\frac{1}{2}qh)}{2\sin\frac{1}{2}qh} + const.$$

405. L'utilité dont est l'expression de Σu, pour la sommation des séries, a porté les Analytes à s'en occuper beaucoup, et ils sont parvenus à lui donner plusieurs formes très élégantes : Euler la fit dépendre des coefficiens différentiels de u et de l'intégrale $\int u dx$. On arrive à ce résultat en partant de la formule

$$\Delta z = \frac{dz}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3z}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

qui donne

$$z = \frac{h}{1}\Sigma\frac{dz}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\Sigma\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{h^3}{1.2.3}\Sigma\frac{d^3z}{dx^3} + \text{etc.}$$

Si l'on fait $\frac{dz}{dx} = u$, il viendra $z = \int u dx$ et

$$\int u dx = h\Sigma u + \alpha h^2 \Sigma\frac{du}{dx} + \beta h^3 \Sigma\frac{d^2u}{dx^2} + \text{etc.},$$

en représentant par α, β, γ, etc. les coefficiens numériques; on tirera de là

$$\Sigma u = \frac{1}{h}\int u dx - \alpha h \Sigma\frac{du}{dx} - \beta h^2 \Sigma\frac{d^2u}{dx^2} - \text{etc.},$$

expression qui, par le changement de u en $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, etc., conduit aux suivantes :

$$\Sigma\frac{du}{dx} = \frac{1}{h}u - \alpha h\Sigma\frac{d^2u}{dx^2} - \beta h^2\Sigma\frac{d^3u}{dx^3} - \text{etc.},$$
$$\Sigma\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{h}\frac{du}{dx} - \alpha h\Sigma\frac{d^3u}{dx^3} - \beta h^2\Sigma\frac{d^4u}{dx^4} - \text{etc.},$$
$$\Sigma\frac{d^3u}{dx^3} = \frac{1}{h}\frac{d^2u}{dx^2} - \alpha h\Sigma\frac{d^4u}{dx^4} - \beta h^2\Sigma\frac{d^5u}{dx^5} - \text{etc.},$$
etc. (*),

avec lesquelles on éliminera successivement de la valeur de Σu, les fonctions

$$\Sigma\frac{du}{dx}, \quad \Sigma\frac{d^2u}{dx^2}, \quad \Sigma\frac{d^3u}{dx^3}, \quad \text{etc.};$$

et il est aisé de voir que le résultat sera nécessairement de la forme

$$\Sigma u = \frac{1}{h}\int u dx + Au + Bh\frac{du}{dx} + Ch^2\frac{d^2u}{dx^2} + \text{etc.}$$

La détermination des coefficiens A, B, C, etc., s'opère ici comme dans le n° 391, par la considération de la

(*) On forme aussi ces expressions, en observant que..... $\Sigma\frac{du}{dx} = \frac{d.\Sigma u}{dx}$, ce qui se prouve ainsi : on a d'abord $d\Delta u = \Delta du$, puisque

$$d\Delta u = d[f(x+h) - f(x)] = [f'(x+h) - f'(x)]dx,$$
$$\Delta du = \Delta f'(x)dx = [f'(x+h) - f'(x)]dx;$$

et ensuite, si l'on pose $\Sigma u = U$, ce qui donne $u = \Delta U$, il vient

$$du = d\Delta U = \Delta dU,$$

d'où

$$\Sigma du = \Sigma\Delta dU = dU = d\Sigma u.$$

fonction particulière e^x, pour laquelle on trouve

$$\Sigma e^x = \frac{e^x}{e^h - 1}, \quad \int e^x dx = e^x, \quad \frac{d^m . e^x}{dx^m} = e^x,$$

d'où il suit

$$\frac{1}{e^h - 1} = \frac{1}{h} + A + Bh + Ch^2 + \text{etc.},$$

ce qui montre que les coefficiens A, B, C, etc. ne sont autre chose que ceux qui multiplient les puissances de h dans le développement de la fonction $\frac{1}{e^h - 1}$, réduite en série ascendante par rapport à cette lettre.

Si l'on met pour $e^h - 1$ sa valeur

$$\frac{h}{1} + \frac{h^2}{1.2} + \frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.} \quad (27),$$

il ne sera pas difficile de calculer au moins les premiers coefficiens A, B, C, etc. : on trouvera

$$A = -\frac{1}{2}, \; B = \frac{1}{12}, \; C = 0, \; D = -\frac{1}{720}, \; E = 0, \text{ etc.},$$

et par conséquent

$$\Sigma u = \frac{1}{h}\int u dx - \frac{1}{2}u + \frac{h}{12}\frac{du}{dx} - \frac{h^3}{720}\frac{d^3u}{dx^3} + \text{etc.} \quad (*).$$

(*) Tous les coefficiens des puissances paires de h sont nuls; cela est prouvé, ainsi que la loi générale des autres, dans le Traité in-4°, t. III, p. 106 et suiv.

La même formule donne pour $\int u dx$, une valeur qui peut remplacer avantageusement la formule (III) du n° 233, surtout quand on y substitue, au lieu des coefficiens différentiels, leurs valeurs en différences (892). Le résultat, comme ceux du n° 388, peut s'appliquer aux fonctions dont on n'a point l'expression analytique, mais seulement une suite de valeurs numériques. (*Voyez* le Traité in-4°, t. III, p. 182 et suiv.)

406. On obtiendra de la même manière, et sans plus de difficulté, les intégrales $\Sigma\Sigma u$, ou $\Sigma^2 u$, $\Sigma\Sigma^2 u$, ou $\Sigma^3 u$, et en général $\Sigma^m u$; car la formule

$$\Delta^m z = \frac{\mathrm{d}^m z}{\mathrm{d}x^m} h^m + \alpha \frac{\mathrm{d}^{m+1} z}{\mathrm{d}x^{m+1}} h^{m+1} + \beta \frac{\mathrm{d}^{m+2} z}{\mathrm{d}x^{m+2}} h^{m+2} + \text{etc.}$$

conduit à

$$z = h^m \Sigma^m \frac{\mathrm{d}^m z}{\mathrm{d}x^m} + \alpha h^{m+1} \Sigma^m \frac{\mathrm{d}^{m+1} z}{\mathrm{d}x^{m+1}} + \beta h^{m+2} \Sigma^m \frac{\mathrm{d}^{m+2} z}{\mathrm{d}x^{m+2}} + \text{etc.};$$

faisant ensuite $\frac{\mathrm{d}^m z}{\mathrm{d}x^m} = u$, on aura $z = \int^m u \mathrm{d}x^m$, et par conséquent

$$\Sigma^m u = \frac{1}{h^m} \int^m u \mathrm{d}x^m - \alpha h \Sigma^m \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \beta h^2 \Sigma^m \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.},$$

où l'on mettra successivement $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}$, etc., au lieu de u, pour obtenir les valeurs

$$\Sigma^m \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{h^m} \int^{m-1} u \mathrm{d}x^{m-1} - \alpha h \Sigma^m \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} - \beta h^2 \Sigma^m \frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}x^3} - \text{etc.},$$

$$\Sigma^m \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{h^m} \int^{m-2} u \mathrm{d}x^{m-2} - \alpha h \Sigma^m \frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}x^3} - \beta h^2 \Sigma^m \frac{\mathrm{d}^4 u}{\mathrm{d}x^4} - \text{etc.},$$

etc.,

à l'aide desquelles on chassera $\Sigma^m \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, $\Sigma^m \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}$, etc., de l'expression de $\Sigma^m u$. L'équation finale pourra être représentée par

$$\Sigma^m u = \frac{1}{h^m} \int^m u \mathrm{d}x^m + \frac{A}{h^{m-1}} \int^{m-1} u \mathrm{d}x^{m-1} + \frac{B}{h^{m-2}} \int^{m-2} u \mathrm{d}x^{m-2} \ldots + \frac{M}{h} \int u \mathrm{d}x + Nu + Ph \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + Qh^2 \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + \text{etc.};$$

et lorsqu'on fera $u=e^x$, elle deviendra

$$\frac{1}{(e^h-1)^m}=\frac{1}{h^m}+\frac{A}{h^{m-1}}+\frac{B}{h^{m-2}}\cdots\cdots+\frac{M}{h}+N+Ph+Qh^2+\text{etc.}:$$

les coefficiens A, B,.....M, N, etc. sont donc encore ici ceux qui multiplient les puissances de h dans le développement de $\frac{1}{(e^h-1)^m}$; et de là résulte, entre les intégrales et les puissances négatives, une analogie qui n'est que la continuation de celle que les différences ont avec les puissances positives, en sorte que l'on doit regarder les intégrales comme les différences d'un ordre dont l'exposant est négatif. Il est visible, en effet, que d'après ce qu'on vient de voir, on peut poser

$$\Sigma^m u=\frac{1}{\left(e^{\frac{du}{dx}h}-1\right)^m}=\left(e^{\frac{du}{dx}h}-1\right)^{-m},$$

pourvu qu'après le développement on change les puissances $\frac{du^p}{dx^p}$ en $\frac{d^pu}{dx^p}$, en observant que dans..... $\frac{d^{-p}u}{dx^{-p}}=d^{-p}udx^p$, d^{-p} équivaut à $\int^p$, ou bien encore écrire

$$\Sigma^m u=\left(e^{\frac{d}{dx}h}-1\right)^{-m}u,$$

expressions qui se déduisent de celles de $\Delta^m u$ (391) en affectant l'exposant m du signe —.

407. L'intégration par parties se pratique sur les différences aussi bien que sur les différentielles. Soient P et Q deux fonctions quelconques de x; on fera

$$\Sigma PQ=Q\Sigma P+z,$$

z étant une fonction inconnue de la même variable; et prenant la différence de chaque membre de cette équation, on aura

$$PQ = (Q + \Delta Q)\,\Sigma\,(P + \Delta P) - Q\Sigma P + \Delta z\,;$$

développant et réduisant, en observant que $Q\Sigma\Delta P = PQ$, il viendra

$$o = \Delta Q\Sigma(P + \Delta P) + \Delta z, \text{ ou } \Delta z = -\Delta Q\Sigma(P + \Delta P),$$

et par conséquent

$$z = -\Sigma\Delta Q\Sigma\,(P + \Delta P),$$

puis

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P - \Sigma\Delta Q\Sigma(P + \Delta P) \ldots\ldots\ldots\ldots (A),$$

formule qui devient

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P - \Sigma\Delta Q\Sigma P_1 \qquad (1),$$

lorsqu'on écrit P_1 pour $P + \Delta P$.

Si dans la formule (A) on change Q en ΔQ, P en ΣP_1, et qu'on observe que

$$\Sigma P_1 + \Delta\Sigma P_1 = \Sigma(P_1 + \Delta P_1) = \Sigma P_2,$$

on en déduira

$$\Sigma\Delta Q\Sigma P_1 = \Delta Q\Sigma^2 P_1 - \Sigma\Delta^2 Q\Sigma^2 P_2,$$

et la formule (1) deviendra

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P - \Delta Q\Sigma^2 P_1 + \Sigma\Delta^2 Q\Sigma^2 P_2 \qquad (2).$$

Changeant ensuite dans l'équation (A), Q en $\Delta^2 Q$, P en $\Sigma^2 P_2$, puis remarquant que

$$\Sigma^2 P_2 + \Delta\Sigma^2 P_2 = \Sigma^2 P_3,$$

on trouvera

$$\Sigma\Delta^2 Q\Sigma^2 P_2 = \Delta^2 Q\Sigma^3 P_2 - \Sigma\Delta^3 Q\Sigma^3 P_3,$$

et la formule (2) deviendra

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P - \Delta Q\Sigma^2 P_1 + \Delta^2 Q\Sigma^3 P_2 - \Sigma\Delta^3 Q\Sigma^3 P_3,$$

ce qui conduit à l'expression élégante

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P - \Delta Q\Sigma^2 P_1 + \Delta^2 Q\Sigma^3 P_2 - \Delta^3 Q\Sigma^4 P_3 + \Delta^4 Q\Sigma^5 P_4 - \text{etc.},$$

donnée par Taylor, dans les *Transactions philosophiques*.

Si l'on y met pour P_1, P_2, P_3, etc., leurs valeurs en P, et qu'on effectue les intégrations qui deviennent possibles, elle se change en

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P - \Delta Q(\Sigma^2 P + \Sigma P) + \Delta^2 Q(\Sigma^3 P + 2\Sigma^2 P + \Sigma P) - \Delta^3 Q(\Sigma^4 P + 3\Sigma^3 P + 3\Sigma^2 P + \Sigma P) + \text{etc.}$$

C'est sous cette forme que Condorcet l'a présentée dans son *Essai sur l'application de l'Analyse à la probabilité des décisions*, page 163.

Elle s'arrête toutes les fois que la fonction Q mène à des différences constantes dans un ordre quelconque; et si la fonction P est susceptible d'un nombre suffisant d'intégrations successives, on parvient à l'intégrale exacte de la fonction PQ.

Application du calcul des différences à la sommation des suites.

408. Dans une suite quelconque

$$u,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_{n-1},\ u_n,$$

le terme général u_n peut être regardé comme la différence de la fonction qui exprime la somme des termes qui le précèdent, en sorte que si l'on fait

$$u + u_1 + u_2 \ldots + u_{n-1} = S_{n-1},$$

on aura

$$\Delta S_{n-1} = u_n \quad \text{et} \quad S_{n-1} = \Sigma u_n \quad (394).$$

Il suit de là, que la somme entière, en y comprenant le terme général, sera

$$S_n = \Sigma u_n + u_n.$$

On voit aussi que S_n résultant de S_{n-1} par le changement de n en $n+1$, l'expression de S_n peut se déduire de la même manière de celle de Σu_n.

Si donc $f(x)$ désigne le terme général d'une série quelconque, dans laquelle la différence de la variable indépendante soit h, la somme de cette série, que je représenterai par $Sf(x)$, sera

$$Sf(x) = \Sigma f(x) + f(x),$$

ou bien s'obtiendra en mettant $x+h$ au lieu de x, dans $\Sigma f(x)$; et il ne faut pas manquer d'ajouter au résultat une constante arbitraire.

Lorsqu'on ne demande la somme de la suite que pour des valeurs entières de l'indice, la constante arbitraire étant alors une véritable constante (395), se détermine comme celle des intégrales aux différentielles. Si l'on fait commencer la suite au terme correspondant à l'indice $x=a$, et que l'on ait en général

$$Sf(x) = F(x) + const.,$$

il faut que

$$F(a) + const. = f(a), \text{ d'où } const. = f(a) - F(a),$$

et

$$Sf(x) = F(x) - F(a) + f(a).$$

Si l'on arrête la suite au terme correspondant à l'indice $x=a+nh$, il viendra

$$f(a) + f(a+h) + f(a+2h) \ldots + f(a+nh) = F(a+nh) - F(a) + f(a),$$

ce qui se réduit à

$$f(a+h) + f(a+2h) \ldots + f(a+nh) = F(a+nh) - F(a),$$

et montre, comme on devait s'y attendre, que le terme $f(a)$ ne fait point partie de la somme $Sf(x)$, prise entre les limites $x=a$ et $x=a+nh$, mais que si l'on veut englober ce terme, il faut prendre la somme depuis $x=a-h$ jusqu'à $x=a+nh$.

409. Venons maintenant aux applications. On déduira des formules du n° 398,

$$Sx(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h] = \frac{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+mh)}{(m+1)h} + const.,$$

$$S\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]} = \frac{-1}{(m-1)h(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]} + const.,$$

expressions au moyen desquelles on obtiendra les sommes des séries directes et inverses des nombres figurés (*).

Pour les premières, dont les termes généraux sont

$$\frac{x}{1}, \quad \frac{x(x+1)}{1.2}, \quad \frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}, \text{ etc.},$$

on fait $h=1$, et successivement $m=1$, $m=2$, etc.; il vient

$$S\frac{x}{1} = \frac{x(x+1)}{1.2} + const.,$$

$$S\frac{x(x+1)}{1.2} = \frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3} + const.,$$

(*) *Voyez* pour ces séries le *Compl. des Élém. d'Algèbre*. Il est bon de remarquer qu'elles sont identiques avec les coefficiens des puissances de z, dans le développement de $(1+z)^{-x}$.

$$S\frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}=\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1.2.3.4}+const.,$$

etc.,

où l'on peut supprimer les constantes, parce que toutes ces expressions s'évanouissent quand $x=0$.

Passant aux séries inverses, dont les termes généraux sont

$$\frac{1}{x},\quad \frac{1.2}{x(x+1)},\quad \frac{1.2.3}{x(x+1)(x+2)},\quad \text{etc.},$$

on trouve la seconde formule en défaut pour la première série, à cause du diviseur $1-1$; mais pour les autres, on a

$$1.2S\frac{1}{x(x+1)}=-\frac{2}{x+1}+const.,$$

$$1.2.3S\frac{1}{x(x+1)(x+2)}=-\frac{3}{(x+1)(x+2)}+const.,$$

etc.

En déterminant les constantes pour que les sommes partent du premier terme, qui est l'unité dans chaque série, on trouve les expressions

$$\frac{2}{1}-\frac{2}{x+1},\quad \frac{3}{2}-\frac{3}{(x+1)(x+2)},\quad \text{etc.},$$

qui, se réduisant à $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, etc., lorsque x est infini, donnent les limites des séries

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}\ldots+\frac{1.2}{x(x+1)}+\text{etc.},$$

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}\ldots+\frac{1.2.3}{x(x+1)(x+2)}+\text{etc.},$$

etc.

410. En mettant $x+h$ au lieu de x, dans l'expression de Σx^m (401), on obtiendra de même Sx^m, c'est-

à-dire la somme des séries

$$1,\ 2^m,\ 3^m,\ \ldots\ldots x^m.$$

Si l'on développe en particulier Sx^2, et qu'on fasse $h=1$, il viendra, après les réductions,

$$Sx^2 = \frac{2x^3+3x^2+x}{6} + const.,$$

pour la somme de la suite des quarrés $1, 4, 9, \ldots\ldots x^2$.

411. On conclura des numéros 403, 404, que

$$Sa^x = \frac{a^{x+h}}{a^h-1} + const.,$$

$$S\sin x = -\frac{\cos(x+\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h} + const.,$$

$$S\cos x = \frac{\sin(x+\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h} + const.$$

Pour obtenir, par exemple, la somme de la série

$$\sin a,\ \sin(a+h),\ldots\sin(a+nh),$$

il faudra prendre $S\sin x$, depuis $x=a-h$ jusqu'à $x=a+nh$ (408), et il viendra

$$\frac{\cos(a-\frac{1}{2}h)-\cos(a+nh+\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h} = \frac{\sin(a+\frac{1}{2}nh)\sin\frac{1}{2}(n+1)h}{\sin\frac{1}{2}h}.$$

L'expression générale de Σu du n° 405, donne aussi pour Su une formule générale dont on trouvera plus loin (435) une application remarquable.

De l'intégration des équations aux différences à deux variables.

412. Jusqu'ici j'ai supposé que la différence de la fonction cherchée était donnée explicitement par la variable indépendante; je vais maintenant m'occuper des

cas où l'on a seulement une équation contenant cette fonction, ses différences, la variable indépendante et son accroissement. Si la fonction y dépend de la variable x dont l'accroissement soit constant, l'équation proposée sera comprise dans la formule générale

$$F(x, y, \Delta y, \Delta^2 y, \text{etc.}) = 0.$$

Il est à propos d'observer que l'on peut en faire disparaître les différences Δy, $\Delta^2 y$, etc., en les remplaçant par les valeurs consécutives de y, puisqu'on a

$$\Delta y = y_1 - y, \quad \Delta^2 y = y_2 - 2y_1 + y, \text{ etc.} \quad (377);$$

et le résultat prendra la forme

$$F(x, y, y_1, y_2, \text{etc.}) = 0,$$

dans laquelle on voit que toute équation aux différences fait connaître la valeur de la fonction cherchée, par le moyen d'un certain nombre de valeurs antécédentes.

Si l'équation était du premier ordre, par exemple, on aurait y_1, par le moyen de y; si elle était du second, on en tirerait y_2, exprimé par y_1 et par y, et ainsi de suite.

Il est facile de s'apercevoir qu'une équation quelconque aux différences équivaut à une série, dans laquelle on obtient chaque terme par le moyen de sa relation avec ceux qui le précèdent et avec l'indice qui marque le rang qu'il occupe. En effet, lorsqu'on a, par exemple, $y_2 = f(x, y, y_1)$, on en déduit $y_3 = f(x+h, y_1, y_2)$, $y_4 = f(x+2h, y_2, y_3)$, etc., h désignant l'accroissement de x, et l'on forme ainsi la série

$$y, y_1, y_2, y_3, y_4, \text{ etc.},$$

au moyen de ses deux premiers termes.

Ce cas particulier suffit pour montrer que *dans la série résultante d'une équation quelconque aux différences, il y aura toujours autant de termes arbitraires qu'il y a d'unités dans l'exposant de l'ordre de cette équation.*

413. On peut changer toute équation aux différences en une équation différentielle d'un ordre infini, en substituant, au lieu de Δy, $\Delta^2 y$, etc., leurs développemens d'après le n° 391; et il n'est pas moins évident que l'on convertirait aussi toute équation différentielle en une équation aux différences d'un ordre infini, en remplaçant les coefficiens différentiels par leurs développemens tirés de la formule du n° 392.

Il ne paraît pas que ces transformations, qui ont l'inconvénient d'introduire un nombre infini de termes, puissent être, en général, fort utiles pour l'intégration des équations; mais elles sont très propres à faire sentir ce qui distingue le Calcul différentiel du Calcul aux différences. Elles prouvent que par la nature de ce dernier, les différences de la variable indépendante doivent être nécessairement déterminées; car si l'on avait une équation entre

$$x,\ y,\ \Delta x,\ \Delta y,\ \Delta^2 y,\ \text{etc.},$$

dans laquelle l'accroissement Δx demeurât indéterminé, qu'on la développât suivant les puissances de Δx, Δy, $\Delta^2 y$, etc., ce qui lui donnerait la forme

$$\left.\begin{array}{l} A\Delta x + B\Delta y \\ + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + F\Delta^2 y \\ + \text{etc.} \end{array}\right\} = 0,$$

on y pourrait substituer, au lieu de Δy, $\Delta^2 y$, etc., leurs développemens; et comme Δx y resterait encore indéterminé, il faudrait que les coefficiens des diverses

puissances de cet accroissement s'évanouissent d'eux-mêmes. On obtiendrait ainsi, entre les variables x, y et leurs différentielles, un nombre infini d'équations qui devraient s'accorder entre elles, pour que la proposée signifiât quelque chose ; et dans ce cas, elle ne serait équivalente qu'à la première de ces équations, dont les autres deviendraient les différentielles successives.

En ne supposant l'équation aux différences que du premier ordre, ce qui la réduit à

$$A\Delta x + B\Delta y + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + \text{etc.} = 0,$$

et prenant

$$\Delta y = \frac{dy}{dx}\frac{\Delta x}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

il vient

$$\left.\begin{array}{l} B\dfrac{dy}{dx} \\ +A \end{array}\right\} \Delta x \left\{\begin{array}{l} +E\dfrac{dy^2}{dx^2} \\ +D\dfrac{dy}{dx} \\ +C \\ +\dfrac{B}{1.2}\dfrac{d^2y}{dx^2} \end{array}\right\} \Delta x^2 + \text{etc.} \Bigg\} = 0,$$

d'où l'on tire

$$B\frac{dy}{dx} + A = 0, \quad E\frac{dy^2}{dx^2} + D\frac{dy}{dx} + C + \frac{B}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \text{ etc.};$$

et si cette suite d'équations ne peut avoir lieu, la proposée ne pourra se vérifier qu'en assignant à Δx une valeur particulière.

414. Ces préliminaires posés, j'entre en matière

par l'intégration de l'équation générale du premier degré et du premier ordre. Je suppose que la différence de la variable x, ou Δx, étant 1, on ait l'équation $\Delta y + Py = Q$, analogue à l'équation différentielle traitée dans le n° 285; un procédé semblable à celui du n° cité conduit à l'intégrale de la première.

Si l'on fait $y = uz$, il viendra

$$\Delta y = u\Delta z + z\Delta u + \Delta u\Delta z,$$

ce qui changera l'équation proposée en

$$u\Delta z + z\Delta u + \Delta u\Delta z + Puz = Q;$$

et posant séparément

$$z\Delta u + Puz = 0, \quad \text{ou} \quad \Delta u + Pu = 0,$$

il restera $u\Delta z + \Delta u\Delta z = Q$, d'où l'on tirera

$$\Delta z = \frac{Q}{u + \Delta u} \quad \text{et} \quad z = \Sigma \frac{Q}{u + \Delta u};$$

la question se réduit donc à intégrer l'équation

$$\Delta u + Pu = 0,$$

dans laquelle on peut séparer les variables, en lui donnant la forme $\frac{\Delta u}{u} = -P$, puisque P est supposé ne contenir que x. Soit $u = e^t$, il en résultera

$$\Delta u = e^t (e^{\Delta t} - 1) \quad \text{et} \quad \frac{\Delta u}{u} = e^{\Delta t} - 1 = -P,$$

d'où l'on tirera

$$e^{\Delta t} = 1 - P, \quad \Delta t = l(1 - P) \quad \text{et} \quad t = \Sigma l(1 - P).$$

Mais la somme des logarithmes de la fonction $1 - P$ répond au produit continuel des valeurs successives que reçoit $1 - P$ entre les limites de l'intégrale, c'est-à-dire à

$$(1-P_{x-1})(1-P_{x-2})(1-P_{x-3})\ldots(1-P_0) \quad (408);$$

si l'on désigne ce produit par $[1-P_{x-1}]^{x}$, l'exposant x marquant le nombre des facteurs, on aura

$$t = l[1-P_{x-1}]^{x},$$

d'où l'on conclura

$$u = e^{t} = [1-P_{x-1}]^{x};$$

et si l'on fait attention que $u+\Delta u = u_1$, on obtiendra

$$u+\Delta u = [1-P_x]^{x+1} \quad \text{et} \quad z = \Sigma \frac{Q}{[1-P_x]^{x+1}},$$

ce qui donnera enfin

$$y = [1-P_{x-1}]^{x} \Sigma \frac{Q}{[1-P_x]^{x+1}},$$

la constante arbitraire étant comprise dans l'intégrale indiquée.

C'est à peu près ainsi que Lagrange, qui le premier fit voir l'analogie que les équations aux différences du premier degré ont avec les équations différentielles du même degré, a intégré, en 1761, l'équation traitée ci-dessus; il applique ensuite son résultat à l'équation $y_1 = Ry + Q$, qui revient à $y+\Delta y = Ry + Q$. En comparant cette dernière avec $\Delta y + Py = Q$, on a $P = 1-R$, $1-P = R$, et par conséquent

$$y = [R_{x-1}]^{x} \Sigma \frac{Q}{[R_x]^{x+1}}.$$

Quoique le développement du produit $[1-P_{x-1}]$ semble supposer que la différence de x soit égale à l'unité, on peut néanmoins conserver l'expression pré-

cédente, lorsque $\Delta x = h$, en concevant qu'elle répond à

$$(1 - P_{x-h})(1 - P_{x-2h})(1 - P_{x-3h}) \text{ etc.},$$

ou bien transformer l'équation proposée en une autre, en faisant $x = hx'$, ce qui donnerait $\Delta x = h\Delta x'$ et $\Delta x' = 1$.

Lorsque le coefficient R est constant, on a

$$y = R^x \Sigma \frac{Q}{R^{x+1}};$$

et s'il en est de même de Q, l'intégration indiquée s'effectue facilement : on obtient dans ce cas

$$\Sigma \frac{Q}{R^{x+1}} = Q\Sigma R^{-x-1} = \frac{QR^{-x-1}}{R^{-1}-1} = \frac{Q}{R^x(1-R)} \quad (403),$$

et $$y = R^x \left\{ \frac{Q}{R^x(1-R)} + const. \right\}.$$

En général, la valeur de y pourra être délivrée du signe d'intégration toutes les fois que Q sera une fonction rationnelle et entière de x.

415. C'est la méthode donnée par d'Alembert, pour les équations différentielles du premier degré, et dont j'ai fait connaître l'esprit (320), que Lagrange applique aux équations de ce degré et d'un ordre quelconque aux différences; mais j'emploierai ici le procédé par lequel il est revenu sur ce sujet en 1775, et que j'ai déjà exposé, d'après lui, pour les équations différentielles.

Premièrement, la valeur complète de y_x satisfaisant à l'équation

$$y_{x+n} + P_x y_{x+n-1} + Q_x y_{x+n-2} \ldots + U_x y_x = 0 \quad (A),$$

d'un ordre quelconque et du premier degré par rapport à la fonction y_x, s'obtient comme celle de y dans le

n° 309, lorsqu'on en connaît un nombre n de valeurs particulières; car il est clair que si

$$y'_x,\ y''_x,\ y'''_x,\ \ldots\ldots$$

sont des fonctions de x qui satisfassent séparément à l'équation (A), l'expression

$$y_x = C'y'_x + C''y''_x + C'''y'''_x + \text{etc.}$$

y satisfera pareillement, sans détermination des constantes C', C'', C''', etc.; et quand le nombre de ses termes, supposés absolument irréductibles entre eux, sera n, elle sera l'intégrale complète de cette équation, puisqu'elle renfermera n constantes arbitraires.

Secondement, l'équation

$$y_{x+n} + P_x y_{x+n-1} + Q_x y_{x+n-2} \ldots + U_x y_x = V_x \quad (B),$$

qui a, de plus que la précédente, un second membre dépendant de x seul, s'y ramène de même que dans le n° 314, en regardant les constantes C', C'', C''', etc., comme des fonctions de x. Dans cette hypothèse, l'expression

$$y_x = C'_x y'_x + C''_x y''_x + C'''_x y'''_x + \text{etc.}$$

conduit d'abord à

$$y_{x+1} = C'_{x+1} y'_{x+1} + C''_{x+1} y''_{x+1} + C'''_{x+1} y'''_{x+1} + \text{etc.},$$

résultat qui se transforme en

$$y_{x+1} = C'_x y'_{x+1} + C''_x y''_{x+1} + C'''_x y'''_{x+1} + \text{etc.} + y'_{x+1}\Delta C'_x + y''_{x+1}\Delta C''_x + y'''_{x+1}\Delta C'''_x + \text{etc.},$$

en mettant pour C'_{x+1}, C''_{x+1}, etc., leurs valeurs

$$C'_x + \Delta C'_x,\quad C''_x + \Delta C''_x,\ \text{etc.},$$

et se réduit à

$$y_{x+1} = C'_x y'_{x+1} + C''_x y''_{x+1} + C'''_x y'''_{x+1} + \text{etc.},$$

lorsqu'on pose

$$y'_{x+1}\Delta C'_x + y''_{x+1}\Delta C''_x + y'''_{x+1}\Delta C'''_x + \text{etc.} = 0 \quad (1),$$

de même que si les quantités C'_x, C''_x, C'''_x, etc., fussent demeurées constantes. En faisant de nouveau varier x, on obtiendra

$$\begin{aligned} y_{x+2} &= C'_{x+1}y'_{x+2} + C''_{x+1}y''_{x+2} + C'''_{x+1}y'''_{x+2} + \text{etc.} \\ &= C'_x y'_{x+2} + C''_x y''_{x+2} + C'''_x y'''_{x+2} + \text{etc.} \\ &\quad + y'_{x+2}\Delta C'_x + y''_{x+2}\Delta C''_x + y'''_{x+2}\Delta C'''_x + \text{etc.}, \end{aligned}$$

résultat que l'on réduit à

$$y_{x+2} = C'_x y'_{x+2} + C''_x y''_{x+2} + C'''_x y'''_{x+2} + \text{etc.},$$

par la supposition de

$$y'_{x+2}\Delta C'_x + y''_{x+2}\Delta C''_x + y'''_{x+2}\Delta C'''_x + \text{etc.} = 0 \quad (2).$$

Faisant varier x une troisième fois, on parvient à

$$y_{x+3} = C'_x y'_{x+3} + C''_x y''_{x+3} + C'''_x y'''_{x+3} + \text{etc.},$$

en posant

$$y'_{x+3}\Delta C'_x + y''_{x+3}\Delta C''_x + y'''_{x+3}\Delta C'''_x + \text{etc.} = 0 \quad (3),$$

et l'on continue ainsi jusqu'aux équations

$$\begin{aligned} y_{x+n-1} &= C'_x y'_{x+n-1} + C''_x y''_{x+n-1} + C'''_x y'''_{x+n-1} + \text{etc.}, \\ y'_{x+n-1}\Delta C'_x &+ y''_{x+n-1}\Delta C''_x + y'''_{x+n-1}\Delta C'''_x + \text{etc.} = 0 \quad (n-1). \end{aligned}$$

Maintenant, si, dans la valeur de y_{x+n-1}, on change x en $x+1$, on trouvera

$$\begin{aligned} y_{x+n} &= C'_x y'_{x+n} + C''_x y''_{x+n} + C'''_x y'''_{x+n} + \text{etc.} \\ &\quad + y'_{x+n}\Delta C'_x + y''_{x+n}\Delta C''_x + y'''_{x+n}\Delta C'''_x + \text{etc.}; \end{aligned}$$

mettant dans l'équation (B) les valeurs de

$$y_x,\ y_{x+1},\ \ldots\ y_{x+n-1},\ y_{x+n},$$

en observant que, par l'hypothèse et d'après l'équation (A),

$$y'_{x+n} + P_x y'_{x+n-1} + Q_x y'_{x+n-2} \ldots + U_x y'_x = 0,$$
$$y''_{x+n} + P_x y''_{x+n-1} + Q_x y''_{x+n-2} \ldots + U_x y''_x = 0,$$
$$y'''_{x+n} + P_x y'''_{x+n-1} + Q_x y'''_{x+n-2} \ldots + U_x y'''_x = 0,$$
etc.,

il restera

$$y'_{x+n}\Delta C'_x + y''_{x+n}\Delta C''_x + y'''_{x+n}\Delta C'''_x + \text{etc.} = V_x \quad (n).$$

On conçoit facilement qu'avec le secours des équations (1), (2), ... $(n-1)$, (n), on déterminera en fonctions de x, les différences $\Delta C'_x$, $\Delta C''_x$, $\Delta C'''_x$, etc., ce qui réduira la recherche des quantités C', C'', C''', etc., à l'intégration des fonctions d'une seule variable.

416. On ne sait pas intégrer en général l'équation (A); mais lorsque ses coefficiens, au lieu d'être des fonctions de x, sont des constantes, que l'on a seulement

$$y_{x+n} + Py_{x+n-1} + Qy_{x+n-2} + Ry_{x+n-3} \ldots + Uy_x = 0, \ldots (A'),$$

on y satisfait en faisant $y_x = m^x$, d'où il résulte

$$y_{x+1} = m^{x+1}, \quad y_{x+2} = m^{x+2}, \ldots . y_{x+n} = m^{x+n};$$

car elle devient

$$m^n + Pm^{n-1} + Qm^{n-2} + Rm^{n-3} \ldots + U = 0 \ldots (A''),$$

et se vérifie si l'on prend pour l'indéterminée m, les racines de cette dernière. Si donc l'on désigne par m', m'', m''', etc., ces diverses racines, on aura (n° précédent)

$$y_x = C'm'^x + C''m''^x + C'''m'''^x + \ldots .$$

Cette expression présente, par rapport aux quantités m', m'', m''', etc., les mêmes circonstances que l'intégrale de l'équation différentielle

$$d^n y + P dx d^{n-1} y + Q dx^2 d^{n-2} y \ldots . + U y dx^n = 0.$$

Il peut arriver que parmi les racines de l'équation (A''), il s'en trouve d'imaginaires ou d'égales entre elles. Dans le premier cas, on revient aux quantités réelles par des transformations analogues à celle du n° 310. Dans le second cas, pour rendre complète l'intégrale qui a cessé de l'être, on a recours à l'artifice employé dans le n° 311.

417. L'équation (A'), pouvant être considérée comme exprimant la nature d'une série dont un terme quelconque, représenté par y_{x+n}, dépend des n termes qui le précèdent, se rapporte aux *séries récurrentes* (*Compl. des Élém d'Alg.*) dont le terme général est y_x et dont l'échelle de relation est

$$-P, \quad -Q, \ldots\ldots -U;$$

l'intégration de cette équation répond donc à la recherche du terme général de la suite proposée; mais en n'ayant égard qu'à la loi de sa formation, les n premiers termes de cette suite sont nécessairement arbitraires; et si on les suppose donnés, en les désignant par

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots y_{n-1},$$

on pourra former les équations

$$\begin{aligned}
y_0 &= C' + C'' + C''' + \text{etc.},\\
y_1 &= C'm' + C''m'' + C'''m''' + \text{etc.},\\
y_2 &= C'm'^2 + C''m''^2 + C'''m'''^2 + \text{etc.},\\
y_3 &= C'm'^3 + C''m''^3 + C'''m'''^3 + \text{etc.},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_{n-1} &= C'm'^{n-1} + C''m''^{n-1} + C'''m'''^{n-1} + \text{etc.},
\end{aligned}$$

au moyen desquelles on déterminera les constantes C', C'', C''', ... dont le nombre est aussi égal à n. La résolution de ces équations, qui ne sont d'ailleurs que du premier degré, peut être simplifiée par des

artifices dont l'exposition ne saurait entrer dans un Traité élémentaire : je me bornerai à faire observer ici que cette recherche se lie avec celle des lois des phénomènes, d'après les observations.

418. Les constantes arbitraires qui complètent les intégrales aux différences, étant des fonctions arbitraires (395), ne peuvent être déterminées en assujettissant ces intégrales à satisfaire à un nombre limité de valeurs données; car il est visible que toute fonction arbitraire comprend implicitement un nombre infini de valeurs arbitraires. Soit pour exemple l'équation

$$y_x = X\varphi(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x),$$

de laquelle on doive tirer un certain nombre de valeurs

$$y_0 = a, \quad y_1 = a', \quad y_2 = a'', \text{ etc.}$$

Si ces valeurs répondent à

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = 2, \text{ etc.},$$

on ne pourra satisfaire en général qu'à la première des conditions imposées; car dès qu'on aura assigné pour $\varphi(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x)$, une première valeur déterminée, de laquelle il résulte $y_0 = a$, cette valeur devant se retrouver la même pour les indices $x=1, x=2$, etc., il s'ensuit que les valeurs de y_x relatives à ces indices, sont aussi déterminées : il faut donc que les quantités données a', a'', etc., correspondent à des indices intermédiaires.

Si, au lieu d'assigner un nombre limité de valeurs isolées, indépendantes les unes des autres, on suppose que dans l'intervalle compris entre $x = 0$ et $x = 1$, l'expression y_x doive fournir les mêmes valeurs qu'une équation donnée $y_x = f(x)$, la question sera déterminée. En effet, s'il s'agissait de trouver la valeur de y

qui correspond à un indice égal à un nombre entier quelconque m, plus une fraction n, soit commensurable, soit incommensurable, on calculerait la valeur de y_n, d'après l'équation $y_x = f(x)$; et comparant le résultat avec celui que donne alors l'équation

$$y_n = X_n \varphi (\sin 2\pi n, \cos 2\pi n),$$

on aurait, pour ce cas, la valeur de

$$\varphi(\sin 2\pi n, \cos 2\pi n),$$

qui doit être la même que celle de

$$\varphi [\sin 2\pi (m+n), \cos 2\pi (m+n)],$$

m étant un nombre entier : l'équation

$$y_x = X\varphi(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x)$$

devenant par là

$$y_{m+n} = X_{m+n}\varphi (\sin 2\pi n, \cos 2\pi n),$$

serait tout-à-fait déterminée.

La seule condition à laquelle soit assujettie l'équation $y_x = f(x)$, c'est qu'on en tire pour y_0 et pour y_1 les mêmes valeurs que de l'équation

$$y_x = X\varphi (\sin 2\pi x, \cos 2\pi x).$$

419. Les considérations géométriques éclaircissent bien ce qui précède. Voici d'abord comment on peut représenter par le cours d'une ligne, l'équation très simple $\Delta y = 0$. Si l'on construit, sur la droite AR, *fig.* 63, menée à une distance quelconque de l'axe des abscisses OX, parallèlement à cet axe, et divisée en parties AA', $A'A''$, $A''A'''$, etc., égales à Δx, des courbes telles que fig. 63.

$$ABA'B'A''B''A'''S,\ ACA'C'A''C''A'''T,\ ADA'D'A''D''A'''U,\ \text{etc.},$$

passant par les points A, A', A'', A''', etc., et composées,

entre ces points, de parties égales et semblables, ces courbes satisferont à l'équation $\Delta y = 0$. Cela est d'abord évident pour les points A, A', A'', A''', etc.; et l'on voit ensuite que, prenant $AP = x$, $AP' = x + \Delta x$, les arcs

AL et $A'L'$, AM et $A'M'$, AN et $A'N'$, etc.

étant égaux et semblables, les ordonnées

LP et $L'P'$, MP et $M'P'$, NP et $N'P'$, etc.,

seront aussi respectivement égales, et l'on aura par conséquent pour chaque courbe, $\Delta y = 0$.

La condition $\Delta y = 0$ n'entraînant point la continuité dans les résultats, les courbes AS, AT, AU, etc., ne seront point assujetties à cette loi. Le polygone $EFE'F'E''F''E'''F'$, composé de parties semblables EFE', $E'F'E''$, etc., donne également $\Delta y = 0$, aux intervalles marqués par Δx; il en serait de même d'une suite d'arcs égaux et semblables d'une courbe quelconque, assemblés d'une manière discontinue, comme le sont les arcs GH, $G'H'$, $G''H''$, etc.

Il est visible que l'équation $y = \varphi\left(\sin\frac{2\pi x}{\Delta x}, \cos\frac{2\pi x}{\Delta x}\right)$ donne lieu à des lignes qui satisfont aux conditions ci-dessus.

420. Passons maintenant à l'équation générale du premier ordre $\Delta y = F(x, y)$. Ayant choisi arbitrairement, ou déterminé, suivant les conditions de la question, le premier point B, *fig.* 64, de la courbe cherchée, comme l'équation proposée n'apprend rien sur tous les points correspondans à la portion d'abscisses $AA' = \Delta x$, et qu'elle donne seulement l'ordonnée $A'B' = y_1$, on pourra faire passer par les points B et

FIG. 64.

B', une portion d'une courbe quelconque. Cela fait, pour obtenir la portion correspondante à l'abscisse $A'A''$, on prendra en arrière d'un point quelconque P' de cette abscisse, une distance $PP' = AA' = \Delta x$, et élevant l'ordonnée PM, on mènera MD' parallèle à PP'; tirant ensuite de l'équation $\Delta y = F(x, y)$, la valeur de Δy pour l'abscisse AP, cette valeur donnera la droite $D'M'$, qui, jointe à $P'D' = PM$, fera connaître le point M'. On trouvera de même tous les points de l'arc $B'B''$; cet arc, employé à son tour comme l'arc BB', donnera ceux du troisième arc $B''B'''$, et ainsi de suite.

Il est évident que l'on pourrait, par le même procédé, continuer la courbe en arrière du point A, et que dans tous les cas elle satisfera à l'équation proposée, puisque les différences $\Delta y = D'M'$ auront des valeurs conclues de cette équation : je laisse au lecteur à faire l'application de ce procédé aux équations de second ordre et des ordres supérieurs.

421. On n'a considéré ici les équations aux différences que dans l'hypothèse de $\Delta x = const.$; mais lorsqu'on suppose cette dernière différence variable, le sujet prend beaucoup d'étendue, ainsi qu'on s'en pourra convaincre par la question suivante:

Soit $\varphi(x)$ *une fonction inconnue de* x, *telle, que si l'on y change* x *en* $f(x)$, *puis en* $F(x)$, F *et* f *désignant des fonctions données, les expressions correspondantes* $\varphi[f(x)]$, $\varphi[F(x)]$, *aient entre elles une relation donnée.*

Laplace a, par un procédé fort simple, ramené ce genre de problèmes à des équations aux différences où la variable indépendante ne reçoit que des accroissemens constans. Pour cela, il pose $f(x) = u_x, \ldots$.

$F(x) = u_{z+1}$, u_z représentant une fonction inconnue de la variable z; et si l'on peut résoudre, par rapport à x, la première de ces équations, on en tirera $x = f_1(u_z)$, valeur qui transformera $F(x) = u_{z+1}$ en $u_{z+1} = F[f_1(u_z)]$, équation aux différences où la variable z croît seulement de l'unité. Lorsqu'on saura intégrer cette équation, on aura l'expression de u_z en fonction de z; on obtiendra aussi x en fonction de z; les fonctions $\varphi[F(x)]$ et $\varphi[f(x)]$ deviendront respectivement $\varphi(u_{z+1})$, $\varphi(u_z)$, et l'on pourra les représenter par y_{z+1}, y_z, ce qui changera en une équation aux différences de la forme

$$f(y_z, y_{z+1}, z) = 0,$$

la relation donnée entre les deux états par lesquels doit passer la fonction φ.

Je prendrai pour exemple l'équation

$$\varphi(x)^2 = \varphi(2x) + 2,$$

pour laquelle $x = u_z$, $2x = u_{z+1}$. De là, on conclut aisément $u_{z+1} = 2u_z$, équation dont l'intégrale est $u_z = C.2^z$ (414).

Posant ensuite $\varphi(x) = y_z$, $\varphi(2x) = y_{z+1}$, l'équation proposée devient

$$y_{z+1} = y^2_z - 2,$$

et s'intègre en y faisant d'abord

$$z = 1, \quad y_1 = a + \frac{1}{a},$$

ce qui conduit à

$$y_2 = a^2 + \frac{1}{a^2},$$

$$y_3 = a^4 + \frac{1}{a^4},$$

$$y_4 = a^8 + \frac{1}{a^8},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_z = a^{2^{z-1}} + \frac{1}{a^{2^{z-1}}}.$$

La dernière de ces valeurs est l'intégrale complète, puisqu'elle renferme une quantité arbitraire a; et l'équation $C.2^z = x$, donnant $2^{z-1} = \frac{x}{2C}$, on aura

$$y_z = \varphi(x) = a^{\frac{x}{2C}} + a^{-\frac{x}{2C}},$$

résultat qui revient à

$$\phi(x) = b^x + b^{-x},$$

si l'on pose $b = a^{\frac{1}{2C}}$.

Il faut remarquer que les constantes a et C sont des fonctions qui ne changent pas quand z devient $z+1$ (395), et par conséquent lorsque x devient $2x$.

422. Combinant toujours chaque nouveau point de vue sous lequel les grandeurs peuvent être envisagées, avec les précédens, les Analystes considèrent encore des relations entre les différences et les coefficiens différentiels des fonctions inconnues; et de là naît le *Calcul aux différences mêlées*.

Les équations

$$\frac{dy}{dx} + a\Delta y + by = 0,$$

$$\frac{d\Delta y}{dx} + a\frac{dy}{dx} + b\Delta y + Cy = 0,$$

dans lesquelles a, b, c désignent des constantes, et où

$\Delta x = 1$, sont les plus simples de ce genre. On satisfait à toutes deux en posant $y = Ce^{mx}$; la première se change en

$$m + a(e^m - 1) + b = 0,$$

et la seconde en

$$m(e^m - 1) + am + b(e^m - 1) + c = 0.$$

La discussion de ces transformées et l'examen de la nature et de l'étendue des intégrales qui en résultent, sortent des limites que j'ai dû me prescrire; je n'ai voulu seulement que marquer la place de ces nouvelles recherches (*).

Application du Calcul intégral à la théorie des suites.

423. L'intégration des différentielles à une seule variable ayant conduit à des séries, on en a conclu qu'on pouvait représenter une série par une intégrale; et comme on a des méthodes pour calculer, au moins par approximation, la valeur d'une intégrale entre des limites données (**), on a cherché à remonter d'une série à l'intégrale dont elle est un des développemens. C'est par ces considérations qu'Euler a créé, pour la sommation des séries et la recherche de leur terme

(*) On trouvera plus de détails dans le Traité *in-4°*, tom. III, chap. 8. J'observerai seulement que le Calcul aux différences mêlées, indiqué d'abord par Condorcet, traité ensuite par MM. Laplace, Paoli et Poisson, répond à des questions de Géométrie, résolues antérieurement par Euler, que tout récemment M. Babbage s'est occupé de ces questions et de celles qui sont comprises dans l'énoncé du n° précédent, qu'il regarde comme devant constituer une nouvelle branche d'analyse qu'il nomme *Calcul des fonctions*. (*Voyez* les *Transact. phil.*, années 1815—16—17)

(**) *Voyez* la note, p. 601.

général, des méthodes très ingénieuses dont voici quelques exemples.

Soit d'abord

$$\frac{\alpha+\beta}{a+b}x+\frac{2\alpha+\beta}{2a+b}x^2\ldots+\frac{n\alpha+\beta}{na+b}x^n+\text{etc.}$$

la série proposée; on multipliera par px^r les deux membres de l'équation

$$s=\frac{\alpha+\beta}{a+b}x+\frac{2\alpha+\beta}{2a+b}x^2\ldots+\frac{n\alpha+\beta}{na+b}x^n,$$

et passant ensuite aux différentielles, on aura

$$px^r\mathrm{d}(sx^r)=\frac{p(1+r)(\alpha+\beta)x^r\mathrm{d}x}{a+b}\ldots\ldots+\frac{p(n+r)(n\alpha+\beta)x^{n+r-1}\mathrm{d}x}{na+b}.$$

Le facteur $na+b$ disparaîtra du dénominateur du terme général, et par conséquent de tous les autres, si, quelle que soit n, l'on a $p(n+r)=na+b$: on fera donc $np=na$, $rp=b$, d'où

$$p=a,\quad r=\frac{b}{a},$$

ce qui donnera l'équation

$$\frac{ad(sx^{\frac{b}{a}})}{\mathrm{d}x}=(\alpha+\beta)x^{\frac{b}{a}}+(2\alpha+\beta)x^{1+\frac{b}{a}}\ldots\ldots\ldots+(n\alpha+\beta)x^{n-1+\frac{b}{a}},$$

dont le second membre ne renferme plus de dénominateurs. De nouvelles opérations, semblables à la précédente, feraient disparaître les facteurs qui resteraient, si le dénominateur en contenait plus d'un.

En multipliant la même équation par $px^r dx$, et prenant ensuite l'intégrale de chaque terme, il viendra

$$pa\int x^r d(sx^{\frac{b}{a}}) = \frac{pa(\alpha+\beta)}{a+b+ra}x^{1+\frac{b}{a}+r} \ldots + \frac{pa(n\alpha+\beta)}{na+b+ra}x^{n+\frac{b}{a}+r};$$

le facteur $n\alpha+\beta$ du numérateur disparaîtra si l'on fait

$$npa\alpha = na, \quad \beta pa = b + ra,$$

d'où il suit

$$p = \frac{1}{\alpha}, \quad r = \frac{\beta}{\alpha} - \frac{b}{a},$$

$$\frac{a}{\alpha}\int x^{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a}} d(sx^{\frac{b}{a}}) = x^{\frac{\beta}{\alpha}+1} + x^{\frac{\beta}{\alpha}+2} \ldots\ldots + x^{\frac{\beta}{\alpha}+n}$$

$$= x^{\frac{\beta}{\alpha}+1}\{1 + x + x^2 \ldots\ldots + x^{n-1}\},$$

et par conséquent

$$\frac{a}{\alpha}\int x^{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a}} d(sx^{\frac{b}{a}}) = x^{\frac{\beta}{\alpha}+1}\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right).$$

On tire de là

$$s = \frac{\alpha\int x^{\frac{b}{a}-\frac{\beta}{\alpha}} d\left[x^{\frac{\beta+\alpha}{\alpha}}\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)\right]}{ax^{\frac{b}{a}}}.$$

424. Dans la série que j'ai considérée ci-dessus, le nombre des facteurs, soit du numérateur, soit du dénominateur, était le même pour chaque terme; mais il est une classe de séries qu'Euler désigne sous le nom d'*hypergéométriques*, dans laquelle ce nombre augmente d'un terme à l'autre : la série

$$s=\frac{\alpha+\beta}{a+b}x+\frac{(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)}{(a+b)(2a+b)}x^2\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{(\alpha+\beta)\ldots\ldots\ldots(n\alpha+\beta)}{(a+b)\ldots\ldots\ldots(na+b)}x^n$$

est de cette classe. On va voir que leur sommation se ramène à l'intégration d'une équation différentielle.

En multipliant les deux membres de l'équation ci-dessus par px^r, et prenant leurs différentielles, on obtiendra

$$\frac{pd(sx^r)}{dx}=\frac{p(1+r)(\alpha+\beta)}{(a+b)}x^r\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{p(n+r)(\alpha+\beta)\ldots\ldots(n\alpha+\beta)}{(a+b)\ldots\ldots(na+b)}x^{n+r-1}.$$

On fera disparaître le facteur $na+b$ du dénominateur, en posant

$$np+rp=na+b,$$

d'où

$$np=na,\quad rp=b,$$
$$p=a,\quad r=\frac{b}{a},$$

$$\frac{ad(sx^{\frac{b}{a}})}{dx}=(\alpha+\beta)x^{\frac{b}{a}}+\frac{(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)}{a+b}x^{1+\frac{b}{a}}\ldots\ldots$$
$$+\frac{(\alpha+\beta)\ldots\ldots\ldots(n\alpha+\beta)}{(a+b)\ldots[(n-1)a+b]}x^{n-1+\frac{b}{a}}$$

En multipliant ce résultat par px^r, et prenant l'intégrale de chacun des membres, on trouvera l'équation

$$pa\int x^r d(sx^{\frac{b}{a}})=\frac{pa(\alpha+\beta)}{a+b+ra}x^{1+\frac{b}{a}+r}\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{pa(\alpha+\beta)\ldots\ldots\ldots\ldots(n\alpha+\beta)}{(na+b+ra)(a+b)\ldots[(n-1)a+b]}x^{n+\frac{b}{a}+r}$$

et le facteur $n\alpha+\beta$ disparaîtra du numérateur, si

$$npa\alpha+pa\beta=na+b+ra,$$

ou si

$$p=\frac{1}{\alpha},\quad r=\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a}.$$

Mettant ensuite à part, dans le second membre, le facteur commun $x^{\frac{\beta}{\alpha}+1}$, il viendra

$$\frac{a}{\alpha}\int x^{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a}}\mathrm{d}(sx^{\frac{b}{a}})=x^{\frac{\beta}{\alpha}+1}\left\{1+\frac{(\alpha+\beta)x}{a+b}\cdots\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{(\alpha+\beta)\ldots[(n-1)\alpha+\beta]x^{n-1}}{(a+b)\ldots[(n-1)a+b]}\right\}.$$

La série comprise entre les accolades du second membre de ce résultat, n'est autre chose que la proposée dont on a ôté le dernier terme, et à laquelle on a ajouté l'unité: on conclura donc de ce qui précède,

$$\frac{a}{\alpha}\int x^{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a}}\mathrm{d}(sx^{\frac{b}{a}})=x^{\frac{\beta}{\alpha}+1}\left\{1+s\right.$$
$$\left.-\frac{(\alpha+\beta)\ldots(n\alpha+\beta)}{(a+b)\ldots(na+b)}x^n\right\}.$$

En différentiant cette équation, on la délivrera de l'intégration indiquée dans le premier membre, et l'on obtiendra l'équation d'où dépend la somme cherchée.

Cet exemple montre comment on opérerait sur d'autres cas plus compliqués, de la classe des séries dont il fait partie, en observant que chaque différentiation offre le moyen de faire disparaître un facteur du dénominateur, et chaque intégration un facteur du numérateur.

425. Si l'on faisait abstraction du dernier terme, on aurait, au lieu de la somme particulière, la limite de la série considérée à l'infini, ou la fonction *génératrice* de cette série; car il est visible que les procédés ci-dessus sont inverses de ceux par lesquels on détermine les séries qui satisfont à des équations différentielles données.

S'il s'agissait, par exemple, de trouver la limite de la série

$$s = 1x - 1.2x^2 + 1.2.3x^3 - \text{etc.},$$

on pourrait appliquer à cette détermination la première transformation du n° précédent, en faisant

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad a = 0, \quad b = 1;$$

mais on y parviendra immédiatement en multipliant par x les deux membres de l'équation posée plus haut, et en les différentiant ensuite. On obtiendra de cette manière

$$sx = 1x^2 - 1.2x^3 + 1.2.3x^4 - \text{etc.},$$

$$\frac{\mathrm{d}(sx)}{\mathrm{d}x} = 1.2x - 1.2.3x^2 + 1.2.3.4x^3 - \text{etc.};$$

et multipliant la dernière équation par x, elle deviendra

$$x\frac{\mathrm{d}(sx)}{\mathrm{d}x} = 1.2x^2 - 1.2.3x^3 + 1.2.3.4x^4 - \text{etc.},$$

dont le second membre est évidemment égal à $x - s$: ainsi on aura

$$x - s = \frac{x\mathrm{d}(sx)}{\mathrm{d}x},$$

ou

$$\mathrm{d}s + \frac{s(x+1)}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

L'intégrale de cette dernière est

$$s = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \int e^{-\frac{1}{x}} dx \quad (285).$$

Pour que l'expression ci-dessus réponde à la série proposée, il faut que l'intégrale s'évanouisse lorsque $x = 0$; et si on la prend jusqu'à $x = 1$, on aura la quantité correspondante à la série divergente

$$1 - 1.2 + 1.2.3 - 1.2.3.4 + \text{etc.}$$

426. Les intégrales définies fournissent aussi le moyen de représenter des portions de la série

$$u + \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.},$$

en partant d'un terme quelconque. Voici comment d'Alembert y parvient, et démontre en même temps le théorème de Taylor (*Recherches sur différens points importans du système du monde*, tome I, page 50) :

Soit u' ce que devient la fonction u, lorsqu'on y change x en $x + h$; en posant

$$u' = u + P,$$

et différentiant par rapport à h, qui n'entre pas dans u, il vient

$$\frac{du'}{dh} = \frac{dP}{dh}, \quad \text{d'où} \quad P = \int \frac{du'}{dh} dh,$$

$$u' = u + \int \frac{du'}{dh} dh.$$

Soit

$$\frac{du'}{dh} = \frac{du}{dx} + Q;$$

en différentiant de nouveau par rapport à h, on a

$$\frac{d^2u'}{dh^2}=\frac{dQ}{dh},\quad \text{d'où}\quad Q=\int\frac{d^2u'}{dh^2}\,dh,$$

$$\frac{du'}{dh}=\frac{du}{dx}+\int\frac{d^2u'}{dh^2}\,dh,\quad \int\frac{du'}{dh}dh=\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\iint\frac{d^2u'}{dh^2}dh^2,$$

$$u'=u+\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\iint\frac{d^2u'}{dh^2}\,dh^2.$$

Faisant encore

$$\frac{d^2u'}{dh^2}=\frac{d^2u}{dx^2}+R,$$

on trouve

$$\frac{d^3u'}{dh^3}=\frac{dR}{dh},\quad \text{d'où}\quad R=\int\frac{d^3u'}{dh^3}\,dh,$$

$$\frac{d^2u'}{dh^2}=\frac{d^2u}{dx^2}+\int\frac{d^3u'}{dh^3}\,dh,$$

$$u'=u+\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\iiint\frac{d^3u'}{dh^3}dh^3.$$

En continuant ainsi, on arriverait à

$$u'=u+\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}+\int^n\frac{d^nu'}{dh^n}\,dh^n,$$

les intégrales étant prises de manière à s'évanouir lorsque $h=0$, parce que u' redevient u.

427. Soit, pour abréger, $\frac{d^nu'}{dh^n}=H$; on aura (242),

$$\int^nH\,dh^n=$$

$$\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\left\{h^{n-1}\int H\,dh-\frac{(n-1)h^{n-2}}{1}\int Hh\,dh\right.$$

$$\left.+\frac{(n-1)(n-2)h^{n-3}}{1.2}\int Hh^2dh-\text{etc.}\right\};$$

et il est facile de voir qu'on peut substituer à la série

ci-dessus, l'expression

$$\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\int H(t-h)^{n-1}\mathrm{d}h,$$

prise depuis $h=0$, pourvu qu'on change après l'intégration t en h; car si l'on développe cette expression, qu'on passe hors du signe $\int$ les puissances de t qui multiplient les différens termes, et qu'on fasse ensuite $t=h$, on retombera sur la série proposée.

Il suit de là que

$$u'=u+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{h}{1}+\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\frac{h^2}{1.2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{\mathrm{d}^{n-1}u}{\mathrm{d}x^{n-1}}\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}+\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\int\frac{\mathrm{d}^nu'}{\mathrm{d}h^n}(t-h)^{n-1}\mathrm{d}h,$$

pourvu qu'on prenne l'intégrale de manière qu'elle s'évanouisse lorsque $h=0$, et qu'on change ensuite t en h.

On peut, dans cette formule, remplacer $\frac{\mathrm{d}^nu'}{\mathrm{d}h^n}$ par $\frac{\mathrm{d}^nu'}{\mathrm{d}x^n}$ (89); et si l'on fait, sous le signe intégral, $t-h=zt$, ou $h=t(1-z)$, on aura

$$\mathrm{d}h=-t\mathrm{d}z,\quad \int\frac{\mathrm{d}^nu'}{\mathrm{d}x^n}(t-h)^{n-1}\mathrm{d}h=-\int\frac{\mathrm{d}^nu'}{\mathrm{d}x^n}t^nz^{n-1}\mathrm{d}z.$$

Les limites de l'intégrale seront alors $z=1$, $z=0$; on la rendra positive, en renversant l'ordre de ces limites, c'est-à-dire en la prenant depuis $z=0$ jusqu'à $z=1$: enfin, sortant t^n du signe $\int$, et écrivant h au lieu de t, le dernier terme de la formule ci-dessus deviendra

$$\frac{h^n}{1.2\ldots(n-1)}\int\frac{\mathrm{d}^nu'}{\mathrm{d}x^n}z^{n-1}\mathrm{d}z.$$

C'est Lagrange qui a donné ce dernier théorème, mais d'une autre manière, dans la *Théorie des fonctions analytiques*, 2e édit., nos 35 et suivans.

Il s'en sert pour prouver qu'on peut toujours rendre la somme de tous les termes de la série de Taylor, à partir d'un terme donné, plus petite que le précédent. Soient M et m la plus grande et la plus petite des valeurs que prend $\frac{d^n u'}{dx^n}$ dans l'intervalle de x à $x+h$; on aura

$$\int \frac{d^n u'}{dx^n} z^{n-1} dz < M \int z^{n-1} dz \text{ et } > m \int z^{n-1} dz,$$

si le coefficient différentiel $\frac{d^n u'}{dx^n}$ ne change point de signe ou ne devient point infini dans cet intervalle (234). Entre les limites données, les deux dernières intégrales sont $\frac{M}{n}$ et $\frac{m}{n}$; et en prenant h d'une petitesse convenable, on rendra la quantité $\frac{h^n}{1.2...n} M$ aussi petite qu'on voudra, vis-à-vis de $\frac{h^{n-1}}{1.2...(n-1)} \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}}$.

428. C'est de cette manière que les intégrales définies servent à évaluer des quantités qu'on obtiendrait difficilement par d'autres moyens; elles prennent souvent des valeurs remarquables.

On voit à la simple inspection des cas particuliers de l'intégrale $\int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{1-x^2}}$, rapportés dans le n° 197, que ces expressions se réduisent à un seul terme, lorsqu'on les prend entre les limites $x=0$ et $x=1$; et l'arc A devenant égal au quart de la circonférence, on a les

deux suites

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2} \qquad \int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=1,$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1.\pi}{2.2}, \qquad \int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2}{3},$$

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1.3\pi}{2.4.2}, \qquad \int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2.4}{3.5},$$

$$\int\frac{x^6dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1.3.5\pi}{2.4.6.2}, \qquad \int\frac{x^7dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2.4.6}{3.5.7},$$

$$\int\frac{x^8dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1.3.5.7\pi}{2.4.6.8.2}, \qquad \int\frac{x^9dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2.4.6.8}{3.5.7.9},$$

etc.,

desquelles on conclut, en général,

$$\int\frac{x^{2r}dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1.3.5.\ldots\ldots(2r-1)\pi}{2.4.6.\ldots\ldots\ldots\ldots 2r\,2},$$

$$\int\frac{x^{2r+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2.4.6.\ldots\ldots\ldots\ldots 2r}{3.5.7.\ldots\ldots\ldots(2r+1)}.$$

Le produit de ces résultats donne d'abord

$$\left(\int\frac{x^{2r}dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)\left(\int\frac{x^{2r+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{1}{2r+1}\frac{\pi}{2}.$$

En divisant, au contraire, le second par le premier, on trouve

$$\frac{\int\frac{x^{2r+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}}{\int\frac{x^{2r}dx}{\sqrt{1-x^2}}}=\frac{2}{\pi}\frac{2.2.4.4.\ldots\ldots\ldots 2r.2r}{1.3.3.5.5.\ldots(2r-1)(2r-1)(2r+1)}.$$

Pour savoir ce que devient le premier membre de cette équation lorsqu'on pousse le nombre des facteurs

du second jusqu'à l'infini, ou lorsqu'on fait r infinie, je prends $x^{2r}=z$; les limites de z sont les mêmes que celles de x; mais on a

$$x=z^{\frac{1}{2r}},\quad dx=\frac{1}{2r}z^{\frac{1}{2r}-1}dz,$$

$$\int\frac{x^{2r+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2r}\int\frac{z^{\frac{2}{2r}}dz}{\sqrt{1-z^{\frac{1}{r}}}},$$

$$\int\frac{x^{2r}dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2r}\int\frac{z^{\frac{1}{2r}}dz}{\sqrt{1-z^{\frac{1}{r}}}}.$$

Le rapport des différentielles étant $z^{\frac{1}{2r}}$, approche d'autant plus de z^0 ou de 1, que le nombre r augmente; et en passant à la limite, on peut regarder ce rapport comme égal à 1; il en sera alors de même de celui des intégrales, puisqu'elles commencent et finissent en même temps: on conclura donc de là

$$1=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.\text{etc.}}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.\text{etc.}},$$

et par conséquent

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.12.\text{etc.}}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11.\text{etc.}}.$$

Cette expression remarquable du quart de la circonférence du cercle est due à Wallis.

429. Une transformation de l'équation

$$\left(\int\frac{x^{2r}dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)\left(\int\frac{x^{2r+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{1}{2r+1}\frac{\pi}{2}$$

conduit à la valeur de l'intégrale $\int e^{-t^2}dt$, prise entre les limites $t=0$, $t=$infini, qui se présente dans plusieurs recherches très curieuses.

Si l'on fait $x=e^{-qt^2}$, l'équation précédente se change en

$$4q^2\left\{\int\frac{tdte^{-qt^2}.e^{-2qrt^2}}{\sqrt{1-e^{-2qt^2}}}\right\}\left\{\int\frac{tdte^{-qt^2}.e^{-q(2r+1)t^2}}{\sqrt{1-e^{-2qt^2}}}\right\}=\frac{1}{2r+1}\frac{\pi}{2};$$

posant ensuite $q(2r+1)=1$, et mettant dans le second membre la valeur de $2r+1$, tous les deux deviennent divisibles par q; puis divisant sous les radicaux par $2q$, on obtient

$$2\left\{\int\frac{tdt.e^{-t^2}}{\sqrt{\frac{1-e^{-2qt^2}}{2q}}}\right\}\left\{\int\frac{tdte^{-t^2(1+q)}}{\sqrt{\frac{1-e^{-2qt^2}}{2q}}}\right\}=\frac{\pi}{2};$$

et comme la limite de $\frac{1-e^{-2qt^2}}{2q}$, lorsqu'on y fait $q=0$, est t^2, l'équation précédente se réduit alors à

$$2\left\{\int e^{-t^2}dt\right\}^2=\frac{\pi}{2},\quad\text{d'où}\quad\int e^{-t^2}dt=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Mais t est infini quand $x=0$, et nul quand $x=1$: les limites de cette dernière intégrale sont donc l'infini et 0; et comme la fonction e^{-t^2} est toujours positive, il s'ensuit que le signe supérieur répond aux limites 0 et l'infini positif, et que l'intégrale se double quand on la prend depuis $t=-$ infini jusqu'à $t=+$ infini: sa valeur est donc alors $\sqrt{\pi}$.

430. Laplace, considérant encore l'expression.....

$\int e^{-t^{m+1}} t^n dt$, la met sous la forme $\int t^{n-m} e^{-t^{m+1}} t^m dt$, pour l'intégrer par parties, ce qui donne

$$\int e^{-t^{m+1}} t^n dt = -\frac{1}{m+1}\left\{e^{-t^{m+1}} t^{n-m} - (n-m)\int e^{-t^{m+1}} t^{n-m-1} dt\right\}.$$

Tant que l'exposant $n-m$ est positif, la partie délivrée du signe $\int$ s'évanouit entre les limites $t=0$ et $t=$ infini (99), et il reste

$$\int e^{-t^{m+1}} t^n dt = \frac{n-m}{m+1}\int e^{-t^{m+1}} t^{n-m-1} dt,$$

la seconde intégrale étant prise entre les mêmes limites que la première.

Si l'on fait $m=1$, on aura

$$\int e^{-t^2} t^n dt = \frac{n-1}{2}\int e^{-t^2} t^{n-2} dt,$$

et en répétant cette réduction, on obtiendra

$$\int e^{-t^2} t^n dt = \frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2r+1)}{2^r}\int e^{-t^2} t^{n-2r} dt,$$

résultat qui s'évanouit par son coefficient quand $n=2r-1$, et qui, lorsque $n=2r$, donne

$$\int e^{-t^2} t^{2r} dt = \frac{(2r-1)(2r-3)\ldots 1}{2^r}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Il est d'ailleurs à propos d'observer aussi qu'en posant $e^{-t^{m+1}} = x$, on a

$$\int e^{-t^{m+1}} t^n dt = -\frac{1}{m+1}\int dx\left(1\frac{1}{x}\right)^{\frac{n-m}{m+1}};$$

les limites de x sont alors 1 et 0, et si l'on en change l'ordre, il faudra supprimer le signe —.

En posant $m=1$, $n=0$, on aura

$$\int e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \int dx \left(1 \frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

431. Je vais encore rapporter l'évaluation de quelques autres intégrales qui présentent des conséquences curieuses; je commencerai par celle de $\int e^{-a^2x^2} dx \cos rx$, entre les limites $x = 0$ et $x =$ infini, due à Laplace et remarquable par le procédé employé pour l'obtenir.

En posant

$$\int e^{-a^2x^2} dx \cos rx = y,$$

et différentiant par rapport à r (281), on en tire

$$\frac{dy}{dr} = -\int e^{-a^2x^2} x dx \sin rx;$$

puis en intégrant par parties, relativement au facteur $e^{-a^2x^2} x dx$, on trouve

$$\frac{dy}{dr} = \frac{e^{-a^2x^2}}{2a^2} \sin rx - \frac{r}{2a^2} \int e^{-a^2x^2} dx \cos rx,$$

ce qui revient à

$$\frac{dy}{dr} = -\frac{r}{2a^2} y, \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dr} + \frac{r}{2a^2} y = 0,$$

lorsqu'on suppose x infini dans la partie délivrée du signe $\int$.

L'équation ci-dessus, entre les variables y et r, a pour intégrale

$$y = Ce^{-\frac{r^2}{4a^2}} \quad (285),$$

C étant une constante arbitraire qu'on détermine par la valeur que prend y lorsque $r = 0$, savoir:

$$\int e^{-a^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \quad (429).$$

Par ce moyen, on trouve

$$\int e^{-a^2x^2}dx \cos rx = \frac{e^{-\frac{r^2}{4a^2}}\sqrt{\pi}}{2a}.$$

Ici se montre un nouvel artifice d'analyse, qui consiste à former, entre les intégrales et quelques-unes des constantes qu'elles contiennent, des équations différentielles que l'on puisse intégrer. Ce procédé, et des transformations très variées et très ingénieuses, ont considérablement multiplié, dans les recherches de MM. Laplace, Legendre, Poisson, Georges Bidone et Cauchy, les déterminations des intégrales définies, dont Euler avait déjà montré de beaux et nombreux exemples; mais il reste encore à désirer une méthode uniforme qui réunisse en un seul corps toutes ces recherches, au progrès desquelles paraît attaché maintenant celui de plusieurs branches importantes de la Physique mathématique.

432. Si l'on fait $a = 0$, dans $\int e^{-a^2x^2}dx\cos rx$ et dans sa valeur, en observant que

$$\frac{e^{-\frac{r^2}{4a^2}}\sqrt{\pi}}{2a} = \frac{\sqrt{\pi}}{e^{\frac{r^2}{4a^2}}2a},$$

et que la limite de $e^{\frac{r^2}{4a^2}}2a$ (99) est alors l'infini, on obtient

$$\int dx \cos rx = 0,$$

entre les limites $x = 0$ et $x = \text{infini}$, résultat qu'il aurait été difficile de prévoir. En effet, on a, en général,

$$\int dx \cos rx = \frac{1}{r} \sin rx + const. \quad (217);$$

à la première limite, où $x = 0$, la fonction $\sin rx = 0$; mais que devient-elle lorsqu'on suppose l'arc x infini; doit-on alors le regarder comme *exactement* égal à un nombre entier de circonférences ? C'est ce qu'on ne voit pas. Tout ce qu'il est permis d'affirmer, c'est qu'aucun arc assignable, quelque grand qu'il soit, ne peut tenir la place de x : $\sin rx$ est donc, dans ce cas, une quantité indéterminée. Il n'en est pas de même de la valeur de $\int e^{-a^2x^2} dx \cos rx$, à cause du facteur $e^{-a^2x^2}$, qui diminue toujours à mesure que x augmente; et puisque cette intégrale, en vertu de la loi de continuité, a pour limite $\int dx \cos rx$, la valeur de celle-ci sera la limite de celle de la première.

On connaît encore d'autres moyens de confirmer ce résultat, auquel Euler est parvenu en considérant l'intégrale $\int e^{-kx} dx \cos rx$, k désignant une constante quelconque. Si l'on intègre par parties, en commençant par le facteur $dx \cos rx$, on aura

$$\int e^{-kx} dx \cos rx = \frac{1}{r} e^{-kx} \sin rx + \frac{k}{r} \int e^{-kx} dx \sin rx,$$

puis, en opérant sur $dx \sin rx$,

$$\int e^{-kx} dx \sin rx = -\frac{1}{r} e^{-kx} \cos rx - \frac{k}{r} \int e^{-kx} dx \cos rx,$$

ce qui donne

$$\left(1 + \frac{k^2}{r^2}\right) \int e^{-kx} dx \cos rx = \frac{1}{r} e^{-kx} \sin rx - \frac{k}{r^2} e^{-kx} \cos rx,$$

et par conséquent

$$\int e^{-kx}dx\cos rx = \frac{e^{-kx}(r\sin rx - k\cos rx)}{r^2+k^2}.$$

Entre les limites $x=0$ et $x=$ infini, l'expression qu'on vient d'obtenir, se réduit à $\frac{k}{r^2+k^2}$, quantité qui devient nulle lorsque k s'évanouissant, l'intégrale proposée se change en $\int dx\cos rx$.

En reprenant l'équation

$$\int e^{-kx}dx\sin rx = -\frac{1}{r}e^{-kx}\cos rx - \frac{k}{r}\int e^{-kx}dx\cos rx,$$

et mettant pour l'intégrale du second membre sa valeur déjà trouvée, on arrive à

$$\int e^{-kx}dx\sin rx = -\frac{e^{-kx}(r\cos rx + k\sin rx)}{r^2+k^2},$$

valeur qui se réduit à $\frac{r}{r^2+k^2}$, quand on la prend entre les limites $x=0$ et $x=$ infini.

La supposition de $k=0$ donne

$$\int dx\sin rx = \frac{1}{r},$$

autre résultat remarquable, qui ne paraît pas suivre immédiatement de l'expression

$$\int dx\sin rx = -\frac{1}{r}\cos rx + const.$$

433. La transformation des quantités réelles en imaginaires est un artifice d'analyse qui a fait découvrir

plusieurs intégrales définies remarquables. Nous emprunterons ici un exemple à M. Fourier (*).

Lorsque dans l'intégrale $\int e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ (429), on fait

$$t = \frac{x(1+\sqrt{-1})}{\sqrt{2}},$$

on en tire

$$\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \int e^{-x^2\sqrt{-1}} dx = \sqrt{\pi};$$

et comme

$$e^{-x^2\sqrt{-1}} = \cos(x^2) - \sqrt{-1}\sin(x^2) \quad (187),$$

on obtient ensuite

$$\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \left\{ \int dx \cos(x^2) - \sqrt{-1} \int dx \sin(x^2) \right\} = \sqrt{\pi}.$$

En séparant les parties réelles et les parties imaginaires de cette équation, on en déduit deux autres, savoir :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \int dx \cos(x^2) + \int dx \sin(x^2) \right\} = \sqrt{\pi},$$

$$\int dx (\cos x^2) - \int dx \sin(x^2) = 0,$$

d'où

$$\int dx \cos(x^2) = \int dx \sin(x^2) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\pi} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi},$$

les limites de x étant 0 et l'infini comme celles de t.

Il faut observer que cet artifice a été employé surtout comme moyen de recherche, et qu'on s'est attaché à en vérifier les résultats. Ceux que je viens de rapporter sont connus d'ailleurs.

(*) *Théorie de la chaleur*, p. 532.

1434. La continuité qui existe entre les diverses valeurs que prend une intégrale, en raison de celles qu'on assigne aux quantités dont elle dépend, a donné lieu d'appliquer les intégrales définies à l'interpolation des suites (388).

Lorsqu'on fait $m=0$, dans le développement de $\int x^m dx(lx)^n$ (208), et qu'on prend cette intégrale entre les limites $x=0$ et $x=1$, pour lesquelles la partie délivrée du signe $\int$, composée de termes de la forme $x(lx)^r$, s'anéantit, parce que r est positif comme n (99), il ne reste que le dernier terme, et l'on a

$$\int dx(lx)^n = \pm 1.2.3.\ldots\ldots n,$$

$+$ quand n est pair et $-$ dans le cas contraire. On évite cette distinction en donnant le signe $-$ à lx, ce qui change l'équation ci-dessus en

$$\int dx(-lx)^n = \int dx\left(1\frac{1}{x}\right)^n = 1.2.3\ldots n,$$

résultat qui s'obtient tout de suite, en observant que

$$\int dx\left(1\frac{1}{x}\right)^n = x\left(1\frac{1}{x}\right)^n + n\int dx\left(1\frac{1}{x}\right)^{n-1}$$

et qu'entre les limites $x=0$, $x=1$, on a seulement

$$\int dx\left(1\frac{1}{x}\right)^n = n\int dx\left(1\frac{1}{x}\right)^{n-1}.$$

On pourra donc regarder l'intégrale $\int dx\left(1\frac{1}{x}\right)^n$ comme exprimant le terme général de la série des produits

1, 1, 1.2,...1.2.3,...;...1.2.3.....n, etc.,

correspondans aux indices

0, 1, 2, 3,.....n, etc.;

et en effet elle en a toutes les propriétés connues pour les valeurs entières de n (*). En donnant donc à cet exposant des valeurs fractionnaires ou même irrationnelles, on introduirait, dans la série, des termes intermédiaires assujettis à la même loi que les autres.

Le cas où $n=\frac{1}{2}$ est des plus remarquables; car

$$\int dx\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\int dx\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad (430).$$

Vandermonde et Kramp avaient proposé, il y a long-temps, d'introduire dans l'analyse la fonction qui représente le terme général de la série ci-dessus, comme exprimant un nouveau genre de quantités transcendantes, douées de propriétés remarquables par leur analogie avec celles des puissances; et depuis, M. Legendre, s'attachant à leur expression en intégrales définies, en a déduit beaucoup de relations très utiles, en a calculé des tables numériques fort étendues, et les a désignées par la caractéristique Γ, en posant pour définition

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n),$$

en sorte que $\Gamma(n)=\int_0^1 dx\left(1-\frac{1}{x}\right)^n$ (**).

435. L'expression de $\frac{\pi}{2}$ trouvée dans le n° 428, entre

(*) Pour voir comment le premier terme de la suite supérieure correspond à zéro dans la suite inférieure, il faut faire $n=0$ dans $\int dx\left(1-\frac{1}{x}\right)^n$, qui devient alors $\int dx=x=1$, dans les limites prescrites.

(**) *Voyez* le Traité in-4°, t. III, p. 411, 481.

dans une formule donnée par Stirling, pour calculer la somme d'une suite de logarithmes appartenant à des nombres en progression par différence, et à laquelle on peut parvenir comme il suit :

Par le n° 408, on a $S\mathrm{l}x = \Sigma\mathrm{l}x + \mathrm{l}x$; mettant dans cette équation pour $\Sigma\mathrm{l}x$ ce que devient l'expression de Σu du n° 405, lorsqu'on fait $u = \mathrm{l}x$ et $h = 1$, et en observant que $\int dx\mathrm{l}x = x\mathrm{l}x - x$ (208), on obtiendra

$$S\mathrm{l}x = x\mathrm{l}x - x + \tfrac{1}{2}\mathrm{l}x + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \text{etc.} + const.$$

On ne saurait déterminer la constante en faisant $x = 1$, parce que la suite des coefficiens numériques finit par être divergente : on a recours à l'expression de π du n° 428. En passant aux logarithmes, et s'arrêtant au nombre pair $2x$ dans le numérateur, on obtient

$$\mathrm{l}x - \mathrm{l}2 = \begin{cases} 2\mathrm{l}2 + 2\mathrm{l}4 + 2\mathrm{l}6 + 2\mathrm{l}8 + 2\mathrm{l}10 \ldots + 2\mathrm{l}(2x-2) + \mathrm{l}2x \\ -\mathrm{l}1 - 2\mathrm{l}3 - 2\mathrm{l}5 - 2\mathrm{l}7 - 2\mathrm{l}9 \ldots - 2\mathrm{l}(2x-3) - 2\mathrm{l}(2x-1); \end{cases}$$

et en prenant les limites dans la supposition de x infinie, on trouve, par le moyen de l'expression précédente de $S\mathrm{l}x$,

$$\mathrm{l}1 + \mathrm{l}2 + \mathrm{l}3 + \mathrm{l}4 \ldots + \mathrm{l}x = const. + (x + \tfrac{1}{2})\mathrm{l}x - x,$$
$$\mathrm{l}1 + \mathrm{l}2 + \mathrm{l}3 + \mathrm{l}4 \ldots + \mathrm{l}2x = const. + (2x + \tfrac{1}{2})\mathrm{l}2x - 2x,$$
$$\mathrm{l}2 + \mathrm{l}4 + \mathrm{l}6 \ldots + \mathrm{l}2x = S\mathrm{l}x + x\mathrm{l}2 = const. + (x + \tfrac{1}{2})\mathrm{l}x + x\mathrm{l}2 - x.$$

Retranchant la troisième série de la seconde, il vient

$$\mathrm{l}1 + \mathrm{l}3 + \mathrm{l}5 + \mathrm{l}7 \ldots + \mathrm{l}(2x-1) = x\mathrm{l}x + (x + \tfrac{1}{2})\mathrm{l}2 - x,$$

d'où l'on conclut

$$\left.\begin{array}{l} 2l2+2l4+2l6\ldots+2l(2x-2)+l2x \\ -2l1-2l3-2l5\ldots-2l(2x-3)-2l(2x-1) \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} 2\,const.+2\left(x+\frac{1}{2}\right)lx+2xl2-2x-l2x \\ -2xlx-2\left(x+\frac{1}{2}\right)l2+2x\,; \end{array}\right.$$

et comme le premier membre de cette équation est égal à $lx-l2$, on obtient, après la réduction du second,

$$lx-l2=2\,const.-2l2,$$

d'où $$const.=\tfrac{1}{2}(lx+l2)=\tfrac{1}{2}l2x=l\sqrt{2x},$$

résultat bien remarquable, et d'après lequel on a

$$\mathcal{S}lx=\tfrac{1}{2}l2x+xlx-x+\tfrac{1}{2}lx+\frac{1}{12x}-\frac{1}{360x^3}+\text{etc.}$$

On rendra cette équation propre à un système quelconque de logarithmes, en multipliant par le module les termes dans lesquels il n'entre point de logarithmes (*).

(*) Lorsqu'on passe des logarithmes aux nombres, cette équation donne

$$1.2.3....x=\sqrt{2\pi}.x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}.e^{z},$$

en représentant, pour abréger, par z la série

$$\frac{1}{12x}-\frac{1}{360x^3}+\text{etc.};$$

et comme

$$e^{z}=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{1.2.3}+\text{etc.}\quad(27),$$

si l'on développe les puissances de z suivant celles de x, on trouvera

$$e^{z}=1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}-\frac{139}{51840x^3}+\text{etc},$$

résultat qui s'accorde avec la formule de la page 129 de la *Théorie analytique des probabilités*, par Laplace.

Pour en donner une application, je rapporterai le calcul qu'Euler a fait de la somme des logarithmes des 1000 premiers nombres des tables, c'est-à-dire de la valeur de

$$l1 + l2 + l3 \ldots\ldots + l\,1000.$$

La caractéristique l désignant des logarithmes ordinaires, le module sera, pour abréger, représenté par M; et si l'on fait $x = 1000$, on trouvera

$$\begin{aligned}
x l x &= 3000{,}000000000000\\
+\tfrac{1}{2} l x &= 1{,}500000000000\\
+\tfrac{1}{2} l 2\pi &= 0{,}399089934179\\
-Mx &= -434{,}294819032518\\
+\frac{M}{12x} &= +0{,}000036912068\\
-\frac{M}{360x^3} &= -0{,}000000000012
\end{aligned}$$

résultat..... $2567{,}604644222132\,8$;

mais, suivant la notation du n° 414,

$$l1 + l2 + l3 \ldots + l1000 = l1.2.3\ldots 1000 = l\overset{1000}{[1000]};$$

on aura donc

$$l\overset{1000}{[1000]} = 2567{,}604644222132\,8.$$

On apprend par là que le nombre $\overset{1000}{[1000]}$, dont le calcul est presque impraticable, doit avoir 2568 chiffres, et que les sept premiers chiffres sur la gauche sont 4023872; en sorte qu'il est compris entre les nombres qui résultent de 4023872 et de 4023873, suivis chacun de 2561 zéros. Cette connaissance suffit dans beaucoup de recherches où l'on ne demande que les rapports des produits de grands nombres; et dans ce cas, la valeur approchée de ces rapports de-

vient précieuse par l'impossibilité où l'on est d'effectuer les calculs nécessaires pour arriver à la valeur exacte. La longueur de ces calculs présente alors un obstacle aussi insurmontable que la difficulté d'exprimer rigoureusement une fonction transcendante. Laplace a beaucoup étendu cette recherche, dont les applications sont très fréquentes dans le Calcul des probabilités.

436. Les intégrales définies, donnant, comme on vient de le voir, des sommes de séries, ont été employées avec succès par MM. Laplace, Parceval, Fourier, Poisson et Cauchy, pour exprimer les intégrales des équations différentielles partielles, telles que celle du n° 352, qui ne peut pas s'intégrer en termes finis.

Laplace a reconnu que la série

$$z = \varphi(x) + \varphi''(x)\frac{y}{1} + \varphi^{IV}(x)\frac{y^2}{1.2} + \text{etc.},$$

obtenue dans le n° 353, n'était que le développement de l'intégrale

$$\int e^{-t^2} dt \varphi(x + 2t\sqrt{y}),$$

prise par rapport à t, entre les limites $t = -$ infini et $t = +$ infini, la fonction φ étant arbitraire. C'est ce dont il est facile de s'assurer comme il suit.

On a premièrement, par le théorème de Taylor,

$$\int e^{-t^2} dt \varphi(x + 2t\sqrt{y}) =$$

$$\varphi(x)\int e^{-t^2} dt + \frac{y^{\frac{1}{2}}}{1}\varphi'(x)\int e^{-t^2}.2t dt$$

$$+ \frac{y^{\frac{2}{2}}}{1.2}\varphi''(x)\int e^{-t^2}.4t^2 dt + \frac{y^{\frac{3}{2}}}{1.2.3}\varphi'''(x)\int e^{-t^2}.8t^3 dt$$

$$+ \frac{y^{\frac{4}{2}}}{1.2.3.4}\varphi^{IV}(x)\int e^{-t^2}.16t^4 dt + \text{etc.}$$

Secondement, les intégrales qui restent dans le développement s'évanouissent pour tous les exposans impairs, et dans le cas contraire, sont égales à

$$\frac{1.3.5....(2r-1)}{2^r}\sqrt{\pi} \quad (430),$$

à cause qu'elles sont prises entre les limites — infini et + infini. En substituant ces valeurs, et renfermant dans la fonction arbitraire $\varphi(x)$ le facteur constant $\sqrt{\pi}$, on a précisément la série proposée : ainsi l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{dz}{dy},$$

a donc pour intégrale

$$z = \int e^{-t^2} dt \varphi(x + 2t\sqrt{y}).$$

Cette intégrale se vérifie aisément. On trouve par la différentiation sous le signe (281)

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \int e^{-t^2} dt \varphi''(x + 2t\sqrt{y}),$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y}} \int e^{-t^2} t dt \varphi'(x + 2t\sqrt{y})$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-t^2} \varphi'(x + 2t\sqrt{y}) + \int e^{-t^2} dt \varphi''(x + 2t\sqrt{y});$$

en intégrant par parties, relativement au facteur.... $e^{-t^2} t dt$; et si l'on suppose la fonction $\varphi'(x + 2t\sqrt{y})$ telle que son produit par e^{-t^2} demeure nul lorsque $t =$ infini, $\frac{dz}{dy}$ prendra la même valeur que $\frac{d^2z}{dx^2}$.

437. Lorsqu'on a intégré l'équation différentielle partielle d'un problème, il reste encore à déterminer

les fonctions arbitraires introduites par cette opération, ce qui présente souvent de grandes difficultés. M. Fourier les a d'abord évitées, dans ses recherches sur la chaleur, en employant, au lieu des intégrales, avec des fonctions arbitraires, des développemens comme ceux que j'ai indiqués dans le n° 352, qui sont formés d'un nombre indéfini de termes contenant des coefficiens et des exposans arbitraires (*). La détermination de ces quantités, d'après des conditions données, l'a conduit à des transformations qui paraissent acquérir beaucoup d'importance pour la solution des questions physico-mathématiques, et dont, par cette raison, je vais donner une idée.

Je prendrai pour exemple l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{dz}{dy},$$

déjà traitée (352 et 436). En posant $z = Ae^{my}\sin nx$, on la réduit aisément à $-n^2 = m$, ce qui donne l'expression indéfinie

$$z = Ae^{-n^2y}\sin nx + A_1e^{-n_1^2y}\sin n_1x + \text{etc.} \quad (**).$$

(*) L'équation dont s'occupe en premier lieu M. Fourier, revient à $\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2} = 0$, ou $r + t = 0$, et par le n° 351, on trouve pour son intégrale complète,

$$z = \varphi(y - x\sqrt{-1}) + \psi(y + x\sqrt{-1}).$$

(*Théorie de la chaleur*, p. 162 et 207.)

(**) Ce développement est implicitement compris dans celui que j'ai donné n° 352. Pour l'en faire sortir, il suffit de changer, à l'endroit cité, n en $-n^2$, ou $\sqrt{n}$ en $\pm n\sqrt{-1}$, puis A en... $\pm\frac{A}{2\sqrt{-1}}$, ce qui donne pour z les deux expressions

Cela posé, si la valeur de z devait en outre, lorsque $y = 0$, se réduire à une fonction donnée $f(x)$, cette condition exigerait une détermination des coefficiens n et A, telle que

$$f(x) = A \sin nx + A_1 \sin n_1 x + A_2 \sin n_2 x + \text{etc.},$$

ce qui revient à transformer la fonction $f(x)$ dans une série ordonnée suivant les sinus des multiples de l'arc x.

On trouvera sans peine que l'équation différentielle proposée admet encore le développement indéfini

$$z = Ae^{-n^2 y} \cos nx + A_1 e^{-n_1^2 y} \cos n_1 x + \text{etc.},$$

et la condition à remplir serait, dans ce cas,

$$f(x) = A \cos nx + A_1 \cos n_1 x + A_2 \cos n_2 x + \text{etc.},$$

c'est-à-dire la transformation de $f(x)$ en série ordonnée suivant les cosinus des multiples de l'arc x.

On connaissait déjà plusieurs développemens de cette espèce : Euler avait remarqué que

$$\tfrac{1}{2}x = \sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \text{etc.} \quad (*),$$

$$\frac{Ae^{-n^2 y + nx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \quad -\frac{Ae^{-n^2 y - nx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

dont la somme

$$Ae^{-n^2 y}\frac{\left(enx\sqrt{-1} - e^{-nx\sqrt{-1}}\right)}{2\sqrt{-1}} = Ae^{-n^2 y}\sin nx \quad (187).$$

Il en est de même pour tous les autres termes.

(*) Cette série est rapportée dans le Traité in-4°, t. Ier, p. 94 ; et voici le moyen employé pour y parvenir. La formule

$$l(1+u) = \frac{u}{1} - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \text{etc.} \quad (29),$$

formule qui résout le problème, lorsque $f(x) = x$, puisqu'on en déduit

$$x = 2\sin x - \frac{2}{2}\sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \text{etc.}$$
$$= A\sin nx + A_1 \sin n_1 x + A_2 \sin n_2 x + \text{etc.},$$

d'où il résulte

$$n = 1, \quad n_1 = 2, \quad n_2 = 3, \quad \text{etc.},$$
$$A = \frac{2}{1}, \quad A_1 = -\frac{2}{2}, \quad A_2 = \frac{2}{3}, \quad \text{etc.},$$

$$y = 2(e^{-\gamma^2}\sin x - \frac{1}{2}e^{-4\gamma^2}\sin 2x + \frac{1}{3}e^{-9\gamma^2}\sin 3x - \text{etc.}).$$

---

lorsqu'on y change u en u^{-1}, donne

$$l(1+u^{-1}) = \frac{u^{-1}}{1} - \frac{u^{-2}}{2} + \frac{u^{-3}}{3} - \frac{u^{-4}}{4} + \text{etc.};$$

et par la soustraction, on en déduit

$$l(1+u) - l(1+u^{-1}) = l\frac{1+u}{1+u^{-1}} = lu =$$
$$\frac{u-u^{-1}}{1} - \frac{u^2-u^{-2}}{2} + \frac{u^3-u^{-3}}{3} - \text{etc.}$$

Faisant alors $u = e^{x\sqrt{-1}}$, d'où il suit $lu = x\sqrt{-1}$,

$$u^m - u^{-m} = e^{mx\sqrt{-1}} - e^{-mx\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\sin mx,$$

on aura, par la substitution de ces valeurs,

$$x = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \text{etc.}\right),$$

et par conséquent

$$\frac{1}{2}x = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \text{etc.}$$

De plus, comme $x^2 = \frac{1}{2}\int x dx$, $x^3 = \frac{1}{3}\int x^2 dx$, etc., on remonterait sans peine aux puissances supérieures de x, ainsi que Daniel Bernoulli l'a fait, mais pour un but différent, dans les *Novi Comment. Acad. Petropolitanæ*, ann. 1772, p. 9.

438. Nous ne nous arrêterons pas aux autres cas particuliers, mais nous passerons aux déterminations obtenues par M. Fourier; premièrement à celle des coefficiens du second membre de l'équation

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \text{etc.},$$

où les multiplicateurs de l'arc x sont la suite des nombres naturels.

En changeant x en t dans cette équation, multipliant ensuite les deux membres par $\mathrm{d}t \sin nt$, et prenant les intégrales depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \pi$, π désignant la demi-circonférence, on aura

$$\int \mathrm{f}(t)\mathrm{d}t \sin nt = a_1 \int \mathrm{d}t \sin t \sin nt + a_2 \int \mathrm{d}t \sin 2t \sin nt \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots + a_m \int \mathrm{d}t \sin mt \sin nt + \text{etc.}$$

Or

$$\left.\begin{aligned} \int \mathrm{d}t \sin mt \sin nt = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}t \cos (m-n)t \\ - \frac{1}{2} \int \mathrm{d}t \cos (m+n)t \end{aligned}\right\} =$$
$$\frac{\sin (m-n)t}{2(m-n)} - \frac{\sin (m+n)t}{2(m+n)} \quad (218),$$

expression que les limites 0 et π rendent nulle, tant que n, supposée toujours un nombre entier, diffère de m. Ainsi, pour chaque valeur assignée à n, tous les termes de la série précédente disparaîtront, excepté celui dont l'indice est égal à cette valeur. Sa seconde partie disparaît encore, mais la première, qui se présente alors sous la forme $\frac{0}{0}$, a pour vraie valeur $\frac{t}{2}$ et devient $\frac{\pi}{2}$, entre les limites de l'intégration : on aura donc

$$\int_0^{\pi} \mathrm{f}(t)\mathrm{d}t \sin mt = a_m \frac{\pi}{2},$$

et par conséquent

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt \sin mt.$$

De cette manière, chacun des coefficiens a_1, a_2, etc., est exprimé par une intégrale définie prise entre les limites 0 et π, et l'on a, pour le développement cherché,

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\{\sin x \int f(t)\,dt \sin t + \sin 2x \int f(t)\,dt \sin 2t \ldots.$$
$$+ \sin mx \int f(t)\,dt \sin mt + \text{etc.}\} \quad (A).$$

Quand $f(x) = x$, il vient

$$\int f(t)\,dt \sin mt = \int t\,dt \sin mt \ldots$$
$$= -\frac{t\cos mt}{m} + \frac{1}{m}\int dt \cos mt$$
$$= -\frac{t\cos mt}{m} + \frac{\sin mt}{m^2};$$

et entre les limites 0 et π, cela se réduit à

$$\frac{\pi\cos m\pi}{m} = -\frac{\pi(-1)^m}{m}.$$

Donnant ensuite à m les valeurs 1, 2, 3, etc., et supprimant π, qui est facteur commun des deux membres, on trouve le développement particulier

$$x = 2(\sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \text{etc.}),$$

rapporté dans le n° précédent.

439. Soit encore

$$f(x) = a_0 \cos 0x + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \text{etc.};$$

remplaçons x par t; multiplions par $dt\cos nt$, et prenons les intégrales depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \pi$, nous aurons

$$\int \Gamma(t)\,dt\cos nt = a_0\int dt\cos 0t\cos nt + a_1\int dt\cos t\cos nt\,..$$
$$\ldots\ldots + a_m\int dt\cos mt\cos nt + \text{etc.},$$

puis

$$\int dt\cos mt\cos nt = \tfrac{1}{2}\int dt\cos(m-n)t + \tfrac{1}{2}\int dt\cos(m+n)t$$
$$= \frac{\sin(m-n)t}{2(m-n)} + \frac{\sin(m+n)t}{2(m+n)},$$

expression que les limites o et π font évanouir, à moins que $n = m$. Pour ce cas, la vraie valeur de son premier terme étant $\frac{1}{2}\pi$, il s'ensuit

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt\cos mt.$$

Il faut cependant excepter de ce résultat le premier terme de la série ci-dessus, pour lequel $n = o$ donne seulement

$$\int_0^{\pi} f(t)\,dt = a_0\int_0^{\pi} dt = a_0\pi,$$

d'où

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt.$$

Il résulte de là que

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int f(t)\,dt +$$
$$\frac{2}{\pi}\left\{\cos x\int f(t)\,dt\cos t + \cos 2x\int f(t)\,dt\cos 2t\,.....\right.$$
$$\left.\ldots\ldots + \cos mx\int f(t)\,dt\cos mt + \text{etc.}\right\}\ (B),$$

les intégrations étant effectuées entre les limites o et π.

440. Ces expressions sont susceptibles de discussions très délicates, relativement à leur étendue. Ce n'est pas ici le lieu de s'arrêter sur ces détails, mais je les ferai au moins pressentir, en indiquant la marche

des valeurs des deux membres de l'équation

$$\tfrac{1}{2}x = \sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \text{etc.}$$

Ils s'anéantissent quand $x = 0$; et si l'on fait $x = \frac{\pi}{2}$, on en tire

$$\tfrac{1}{4}\pi = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \text{etc.},$$

valeur bien connue (38). Mais lorsqu'on suppose $x = \pi$, ce qui donne $\frac{1}{2}\pi$ pour le premier membre, le second s'évanouit : il en est de même pour la valeur $x = -\pi$, en sorte que le développement n'est exact qu'entre les limites $x = \pm\pi$ exclusivement, c'est-à-dire que les valeurs de $\frac{\pi}{2}$ et de $-\frac{\pi}{2}$ n'y sont pas comprises.

Si l'on fait ensuite $x = \pi + y$,

le développement, devenant

$$-\sin y - \tfrac{1}{2}\sin 2y - \tfrac{1}{3}\sin 3y - \text{etc.},$$

ne répond plus au premier membre, qui est $\frac{1}{2}(\pi + y)$; mais si l'on change x en $\pi - y$, il viendra

$$\tfrac{1}{2}(\pi - y) = \sin y + \tfrac{1}{2}\sin 2y + \tfrac{1}{3}\sin 3y + \text{etc.},$$

ce qui montre que le premier développement en y donne la valeur de l'arc négatif $\frac{1}{2}(y - \pi)$, en exceptant toutefois le cas où $y = 0$.

Il faut encore observer que le développement de $\frac{1}{2}x$ donne immédiatement celui de la fonction $ax + b$, qui exprime l'ordonnée d'une droite quelconque; mais tandis que la fonction représente la droite dans toute son étendue, le développement en sinus ne répond qu'à la portion comprise entre les abscisses $+\pi$ et

$-\pi$, exclusivement. On peut, en changeant de variable, comme on le verra plus loin (442), passer à d'autres limites, mais on n'obtiendra jamais qu'une portion de ligne droite.

441. Les développemens (*A*) et (*B*) paraissent devoir représenter respectivement deux espèces de fonctions. Le premier, dont tous les termes changent de signe avec l'arc x, répond aux cas dans lesquels $f(x)$ est une fonction qui jouit de la même propriété, et que l'on nomme *fonction impaire*, à cause que si elle était développée suivant les puissances de x, elle n'en contiendrait que d'impaires.

Le second développement, ayant la propriété contraire, celle de conserver le même signe quoique celui de x change, serait particulièrement applicable aux *fonctions paires;* mais l'un et l'autre ne sont encore que des séries qu'on peut remplacer, comme on va le voir, par une nouvelle intégration définie.

Pour cela, commençons par les réunir, en observant qu'une fonction quelconque $F(x)$ peut être décomposée en deux parties, l'une paire, c'est-à-dire telle que si on la représente par $\varphi(x)$, on ait $\varphi(x)=\varphi(-x)$, l'autre impaire, ou telle qu'en la désignant par $\psi(x)$, il vienne $\psi(x)=-\psi(-x)$. En exprimant la première par la série (*B*), la seconde par la série (*A*), et prenant leur somme, on aura

$$\varphi(x)+\psi(x)=F(x)=\frac{1}{\pi}\int\varphi(t)\mathrm{d}t+$$

$$\frac{2}{\pi}\left\{\begin{array}{l}\cos x\int\varphi(t)\mathrm{d}t\cos t+\cos 2x\int\varphi(t)\mathrm{d}t\cos 2t+\text{etc.}\\ +\sin x\int\psi(t)\mathrm{d}t\sin t+\sin 2x\int\psi(t)\mathrm{d}t\sin 2t+\text{etc.}\end{array}\right\},$$

les limites de ces intégrales étant encore δ et π.

On peut les étendre de $-\pi$ à $+\pi$, pourvu que l'on double le premier membre, parce que la fonction $\phi(t)$ étant paire, passera de o à $-\pi$, par les mêmes valeurs que de o à π, ainsi que les cosinus. A la vérité, la fonction $\psi(t)$ aura, dans ces intervalles, des signes différens; mais comme elle est toujours multipliée par un sinus qui change de signe en même temps, le produit conservera le même : le résultat total sera donc doublé; ainsi, en prenant les intégrales de $-\pi$ à $+\pi$, on écrira

$$2F(x) = \frac{1}{\pi}\int\varphi(t)dt + \frac{2}{\pi}\left\{\begin{array}{l}\cos x\int\varphi(t)dt\cos t + \cos 2x\int\varphi(t)dt\cos 2t + \text{etc.}\\ + \sin x\int\psi(t)dt\sin t + \sin 2x\int\psi(t)dt\sin 2t + \text{etc.}\end{array}\right.$$

Il faut maintenant introduire la fonction proposée $F(x)$ à la place des fonctions φ et ψ, ce qui se fait aisément, quand on observe que

$$\int_{-\pi}^{\pi}\psi(t)dt\cos mt, \quad \int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)dt\sin mt,$$

sont toujours nulles, parce que la différentielle à intégrer est le produit de deux facteurs dont un seul change de signe avec t, savoir : $\psi(t)$ dans la première, et $\sin mt$ dans la seconde. Par là on peut, sans troubler le dernier développement, y ajouter les termes que fournissent les expressions

$$\cos mx\int\psi(t)dt\cos mt, \quad \sin mx\int\varphi(t)dt\sin mt :$$

alors, en multipliant les deux membres de l'équation par π, et les divisant par 2, on obtiendra

$$\pi F(x) = \tfrac{1}{2}\int[\varphi(t) + \psi(t)]dt + \left.\begin{array}{l}\cos x \int[\varphi(t) + \psi(t)]dt \cos t + \text{etc.} \\ + \sin x \int[\varphi(t) + \psi(t)]dt \sin t + \text{etc.}\end{array}\right\},$$

et par conséquent

$$\pi F(x) = \tfrac{1}{2}\int F(t)dt + \left.\begin{array}{l}\cos x \int F(t)dt \cos t + \cos 2x \int F(t)dt \cos 2t + \text{etc.} \\ + \sin x \int F(t)dt \sin t + \sin 2x \int F(t)dt \sin 2t + \text{etc.}\end{array}\right\}.$$

Le signe $\int$ ne se rapportant qu'à la variable t, on peut faire passer dessous les facteurs en x; et comme

$$\begin{aligned}&\cos x \cos t + \sin x \sin t = \cos(x - t),\\ &\cos 2x \cos t + \sin 2x \sin 2t = \cos 2(x - t),\\ &\text{etc.},\end{aligned}$$

l'équation précédente peut être réduite à

$$\pi F(x) = \int_{-\pi}^{\pi} F(t)dt\left\{\tfrac{1}{2} + \cos(x-t) + \cos 2(x-t) + \text{etc.}\right\}.$$

On l'abrège encore en écrivant

$$\pi F(x) = \int_{-\pi}^{\pi} F(t)dt\left\{\tfrac{1}{2} + S\cos m(x-t)\right\},$$

la somme S étant prise depuis $m = 1$ jusqu'à.... $m =$ infini, et comprenant les deux valeurs extrêmes (*).

442. On peut donner à l'intégrale, des limites quelconques, au lieu de π; il suffit pour cela de changer

(*) C'est conformément à la distinction établie dans le n° 408, d'après Euler (*Inst. Calc. diff.*, P. I^e, cap. II, n° 59) que je mets ici le signe $\mathcal{S}$ au lieu du Σ qu'on trouve ailleurs.

x et t en $\frac{\pi x'}{a}$ et $\frac{\pi t'}{a}$; faisant alors $\frac{\pi t'}{a}=-\pi$, $\frac{\pi t'}{a}=+\pi$, les limites de t' seront $-a$ et $+a$, dt deviendra $\frac{\pi dt'}{a}$; on aura

$$\pi F\left(\frac{\pi x'}{a}\right)=\frac{\pi}{a}\int_{-a}^{a} F\left(\frac{\pi t'}{a}\right)dt'\left\{\tfrac{1}{2}+S\cos\frac{m\pi}{a}(x'-t')\right\}.$$

Puis en supprimant le facteur commun π, ainsi que l'accent affecté aux lettres x et t, qui n'est plus nécessaire, et en écrivant $f(x)$, $f(t)$, pour $F\left(\frac{\pi x}{a}\right)$, $F\left(\frac{\pi t}{a}\right)$, il viendra

$$f(x)=\int_{-a}^{a} f(t)dt\left\{\frac{1}{2a}+S\frac{1}{a}\cos\frac{m\pi}{a}(x-t)\right\}.$$

443. Dans cette dernière formule, la quantité a n'étant soumise à aucune restriction, on peut la supposer infinie, et l'on obtient pour $F(x)$ une expression où la somme S est remplacée par une intégrale aux différentielles. On pose d'abord

$$\frac{m\pi}{a}=q, \qquad \frac{(m+1)\pi}{a}=q_1,$$

d'où il suit

$$\frac{\pi}{a}=\Delta q, \quad \frac{1}{a}=\frac{\Delta q}{\pi},$$

$$f(x)=\int_{-a}^{a} f(t)dt\left\{\frac{1}{2a}+\frac{1}{\pi}S\Delta q\cos q(x-t)\right\}.$$

Maintenant, plus a augmente, plus Δq diminue, plus la somme S approche d'une intégrale aux différentielles (232); et pour passer à cette limite, il ne faut que changer Δq en dq, en observant que la variable q

prendra toutes les valeurs possibles, depuis o jusqu'à l'infini : on aura donc

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int f(t)dt \int dq \cos q(x-t),$$

formule dans laquelle l'intégration relative à q s'étend de o à l'infini, et l'intégration relative à t, de $-$ infini à $+$ infini.

Ce dernier résultat se décompose en deux autres, quand on sépare les fonctions paires des fonctions impaires. On substitue alors à $\cos q(x-t)$ sa valeur $\cos qx \cos qt + \sin qx \sin qt$, et changeant l'ordre des intégrations, il vient

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int dq \cos qx \int f(t)dt \cos qt$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int dq \sin qx \int f(t)dt \sin qt;$$

remplaçant ensuite la fonction quelconque $f(x)$ par une fonction paire $\varphi(x)$, puis par une impaire $\psi(x)$, en observant que

$$\int_{-a}^{a} \varphi(t)dt \sin qt = 0, \quad \int_{-a}^{a} \psi(t)dt \cos qt = 0,$$

d'après la remarque faite dans le n° 441, on obtiendra les deux expressions

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int dq \cos qx \int \varphi(t)dt \cos qt,$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi} \int dq \sin qx \int \psi(t)dt \sin qt,$$

les intégrales étant prises entre les limites o et infini

pour la variable q, $-$infini et $+$infini pour la variable t.

444. Les formules précédentes, dues à M. Fourier, ont occupé beaucoup aussi MM. Poisson et Cauchy; ils les ont étendues aux fonctions de plusieurs variables, et y sont parvenus par divers moyens. Je renverrai à leurs écrits, le lecteur qui voudra connaître les points de vue sous lesquels ils ont envisagé cette théorie (*).

Je rapporterai seulement une des manières dont M. Poisson a vérifié *à posteriori* la formule principale

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int f(t)\,dt \int dq \cos q(x-t),$$

en traitant $\int_0^{\text{inf.}} dq \cos q(x-t)$ comme la limite vers laquelle tend l'intégrale $\int e^{-a^2q^2} dq \cos q(x-t)$, à mesure que la quantité a décroît.

Cette dernière formule rentre dans celle du n° 431, où il suffira de changer r en $x-t$ et x en q, pour obtenir

$$\int e^{-a^2q^2} dq \cos(x-t)q = \frac{e^{-\frac{(x-t)^2}{4a^2}} \sqrt{\pi}}{2a},$$

(*) *Voyez* le 18e et le 19e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, les *Exercices d'analyse*, par M. Cauchy, et le tome VI des *Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences*.

Dans ce dernier, M. Poisson emploie la transformation ci-dessus pour parvenir à l'expression de $\int u dx$ indiquée dans la note de la page 601, et pour déterminer les limites de l'erreur que l'on commet en s'arrêtant à tel terme que l'on voudra. En 1814, M. Gauss avait traité le même sujet, mais par un moyen dérivé des formules d'interpolation, et qui se rapporte à ce qu'on a vu dans le n° 388. (*Voyez* le t. III, des *Commentationes societatis Gottingensis recentiores*, ann. 1814—1815.)

et par conséquent

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int \frac{e^{-\frac{(x-t)^2}{4a^2}}\sqrt{\pi}}{2a} f(t)dt$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int e^{-\frac{(x-t)^2}{4a^2}} f(t)dt.$$

Cela posé, le facteur $e^{-\frac{(x-t)^2}{4a^2}}$ décroît en même temps que a et tend à devenir nul, à moins que le numérateur $(x-t)^2$ de son exposant ne soit d'une petitesse comparable à celle de a, ce qui aura lieu lorsque la valeur de la variable t différera peu de celle de x : c'est donc seulement dans ce cas que l'intégrale indiquée pourra prendre une valeur assignable. Pour la découvrir, il faut faire $t = x + z$, et supposer que la valeur de z demeure dans des limites si resserrées que l'on puisse la regarder toujours comme infiniment petite, et qu'il soit permis, en conséquence, de réduire $f(x+z)$ à $f(x)$; il vient alors

$$f(x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int e^{-\frac{z^2}{4a^2}} f(x)dz = \frac{f(x)}{2a\sqrt{\pi}} \int e^{-\frac{z^2}{4a^2}} dz.$$

Or, puisque l'intégrale comprise dans le dernier membre s'anéantit aussitôt que z a une valeur assignable, on ne change pas celle de cette intégrale en étendant z jusqu'à l'infini même ; mais entre ces limites,

$$\int e^{-\frac{z^2}{4a^2}} dz = 2a\sqrt{\pi},$$

ce qui fait disparaître a^2 dans l'expression $f(x)$, et la rend identique.

On ne saurait disconvenir qu'appuyé seulement sur la

valeur d'une intégrale définie à laquelle on n'attribue, à proprement parler, qu'un seul élément, le procédé que je viens d'exposer ne doive paraître au moins très délicat; mais ce qui le fortifie, c'est qu'en l'appliquant encore à d'autres intégrales, en particulier à l'une de celles du n° 432, on en tire toujours le même résultat, obtenu d'ailleurs *à priori*, par des considérations très différentes.

Pour se faire une idée bien nette de ce passage d'une limite finie à une limite infinie, il n'est peut-être pas inutile d'examiner la marche des valeurs d'une intégrale analogue à la précédente. Telle est $\int e^{-t^2} dt$, dont on trouve une table à la fin de l'*Analyse des réfractions astronomiques*, par Kramp. On voit que cette intégrale, dont $\sqrt{\pi} = 0,88622692$ est la valeur entre les limites zéro et l'infini, est déjà réduite à 0,0000 1958 lorsque t est seulement égal à 3. Le décroissement doit être encore bien plus rapide, quand l'exposant $-t^2$ est divisé par le quarré d'un nombre très petit, ainsi que dans la formule traitée ci-dessus; et lorsqu'on suppose infiniment petit cet exposant, c'est une limite rigoureuse que l'on cherche et que l'on obtient.

FIN.

NOTES.

NOTE A, *indiquée sur les pages* 1 *et* 86.

I. Considéré dans les procédés qui le constituent, le Calcul différentiel est plus simple que les parties supérieures de l'Algèbre. Sa difficulté ne tient guère qu'à celle d'apercevoir d'abord quel est son but, et de concevoir le sens de quelques nouveaux termes dont il a nécessité l'introduction.

C'est un problème de Géométrie (celui de *Pappus*) résolu seulement dans quelques cas particuliers, par les anciens, qui a conduit Descartes à inventer l'application de l'Algèbre à l'expression des lignes courbes; c'est aussi un problème (celui des tangentes) qui a fait découvrir le Calcul différentiel.

Dès le temps d'Euclide, on a pu remarquer que les tangentes jouissaient des propriétés des sécantes, en modifiant ces propriétés comme l'exige la réunion des deux points d'intersection en un seul, qui est alors le point de contact. (*Voyez* le n° 128 des *Élémens de Géométrie*.) C'est aussi sur ce principe que reposent, soit explicitement, soit implicitement, toutes les méthodes qu'on a fondées sur le Calcul, pour mener les tangentes aux courbes. Parmi ces méthodes, je choisis celle de Barrow, qui n'est pas encore le Calcul différentiel, mais qui s'en rapproche le plus.

Soit, par exemple, la parabole ordinaire donnée par l'équation $y^2 = px$; en prenant sur cette courbe deux points M et M', *fig.* 1, pour mener une sécante, posant FIG. 1.

$$AP = x, \quad PP' = h, \quad A'P' = x + h,$$
$$PM = y, \quad M'Q = k, \quad P'M' = y + k,$$

comparant les triangles semblables $M'QM$ et MPS, on aura

$$M'Q : MQ :: PM : PS, \quad \text{d'où} \quad PS = y\frac{h}{k};$$

et puisque le point M' appartient à la courbe, on a aussi

$$(y + k)^2 = p(x + h);$$

développant cette équation, pour en retrancher membre à membre, $y^2 = px$, il restera

$$2yk + k^2 = ph, \quad \text{qui revient à} \quad \frac{2y + k}{p} = \frac{h}{k} :$$

donc $PS = y\frac{2y+k}{p}$. Mais si l'on fait coïncider le point M' avec le point M, h et k s'évanouissent, PS devient PT, et la valeur de la première de ces lignes se réduit à $\frac{2y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x$.

Une première remarque s'offre ici : c'est que, malgré l'évanouissement des quantités h et k, la fraction qui exprimait leur rapport continue d'exister, ou d'avoir une valeur appréciable, puisqu'elle se réduit à $\frac{2y}{p}$, valeur dont la quantité $\frac{2y+k}{p}$ approche à mesure que k diminue, et dont elle peut différer d'aussi peu qu'on voudra en prenant k assez petit.

Cette fraction $\frac{2y}{p}$ est donc la limite de $\frac{2y+k}{p}$, ou celle du rapport $\frac{MQ}{M'Q}$, comme $\frac{PT}{PM}$ l'est de $\frac{PS}{PM}$.

Pour s'assurer que $\frac{PS}{PM}$ peut approcher aussi près qu'on voudra de $\frac{PT}{PM}$, il suffit de considérer que si le point M' passait au-dessous du point M, le point S tomberait de l'autre côté du point T.

II. A cet exemple, tiré de la Géométrie, joignons-en un autre tiré de la Mécanique.

Les corps tombent vers la surface de la terre, en vertu d'une force qui agit constamment, et en conséquence de laquelle leurs mouvemens s'accélèrent, c'est-à-dire que ces corps parcourent des espaces de plus en plus grands dans des intervalles de temps égaux, lorsqu'on prend ces intervalles de plus en plus loin de l'origine du mouvement.

Ainsi, représentant par 1 l'espace parcouru dans la 1re seconde, dans la 2e on aura 3, dans la 3e 5, et ainsi de suite : ce sont là des données d'expérience qui ont fait découvrir à Galilée que la force dont il s'agit, ou la pesanteur, est constante, c'est-à-dire qu'elle engendre toujours la même vitesse dans le même temps. *Par vitesse, il faut entendre l'espace que le corps parcourrait dans l'unité de temps, si la force avait cessé d'agir sur lui au commencement de cette unité.* Cela posé, voyons comment on peut calculer les effets d'une pareille force.

Au lieu de supposer qu'elle agit constamment, concevons que ses actions, toujours égales, soient instantanées comme celle de l'impul-

sion, et qu'elles se répètent à des intervalles marqués par une fraction $\frac{1}{m}$ de la seconde prise pour unité de temps. Un corps recevra donc pendant l'unité de temps un nombre m de ces actions dont les effets, s'ajoutant les uns aux autres, lui imprimeront, au bout de ce temps, une vitesse totale que je représenterai par p. La vitesse qui résulterait d'une seule action serait donc $\frac{p}{m}$, toujours pour l'unité de temps. Ainsi, pendant la fraction $\frac{1}{m}$, le corps ne parcourrait que l'espace $\frac{p}{m^2}$. En considérant les intervalles consécutifs indiqués ci-dessous,

$$0, \quad \frac{1}{m}, \quad \frac{2}{m}, \quad \frac{3}{m}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{n-1}{m}, \quad \frac{n}{m},$$

on aura, 1°. pour les vitesses résultantes des actions exercées par la force, au commencement de chacun de ces intervalles,

$$\frac{p}{m}, \quad \frac{2p}{m}, \quad \frac{3p}{m}, \quad \frac{4p}{m}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{np}{m};$$

2°. pour les espaces parcourus à la fin des mêmes intervalles

$$\frac{p}{m^2}, \quad \frac{2p}{m^2}, \quad \frac{3p}{m^2}, \quad \frac{4p}{m^2}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{np}{m^2};$$

la somme de tous ces espaces dont le nombre est n, sera par la formule relative aux progressions par différence (*Élém. d'Alg.* 229),

$$\left(\frac{p}{m^2} + \frac{np}{m^2}\right)\frac{n}{2} = \frac{p}{2}\left(\frac{n}{m^2} + \frac{n^2}{m^2}\right).$$

Maintenant, si l'on observe qu'un nombre quelconque de secondes, désigné par t, contient un nombre mt d'intervalles égaux à $\frac{1''}{m}$, et qu'on fasse $n = mt$, l'expression précédente deviendra

$$\frac{p}{2}\left(\frac{mt}{m^2} + \frac{m^2t^2}{m^2}\right) = \frac{pt}{2}\left(\frac{1}{m} + t\right).$$

Or, on voit que plus le nombre m augmente, plus les actions de la force se rapprochent, moins la quantité $\left(\frac{1}{m} + t\right)$ diffère de t, et que même elle subsiste lorsqu'on annule la fraction $\frac{1}{m}$, ce qui anéantit l'intervalle supposé entre les actions successives de la force. Cet état de choses est la limite vers laquelle tend sans cesse

la suite des mouvemens considérés plus haut; et par conséquent, dans l'action continue de la force, l'espace parcouru est égal à $\frac{1}{2}pt^2$.

En mettant la valeur de n dans l'expression $\frac{np}{m}$ de la vitesse acquise après les n premières actions, il viendra $\frac{mtp}{m} = pt$, quantité indépendante de m, et par conséquent la même, quelque petit que soit l'intervalle $\frac{1}{m}$.

Maintenant, si l'on fait successivement $t = 0$, $= 1$, $= 2$, etc., on aura les espaces

$$0, \quad (\tfrac{1}{2}p), \quad 4(\tfrac{1}{2}p), \quad 9(\tfrac{1}{2}p), \text{ etc.},$$

dont les différences sont

$$(\tfrac{1}{2}p), \quad 3(\tfrac{1}{2}p), \quad 5(\tfrac{1}{2}p), \text{ etc.},$$

c'est-à-dire, 1 fois, 3 fois, 5 fois, etc., l'espace parcouru pendant la 1re seconde.

Dans l'exemple de pure Géométrie, on a supposé d'abord des points distincts, deux intersections au lieu d'un contact; mais en passant à la limite, on a établi la coïncidence des points, et les intersections se sont changées en contact.

Dans l'exemple de Mécanique, au lieu d'un mouvement accéléré d'une manière continue, on a considéré une suite de mouvemens uniformes, ou égaux, pendant un certain intervalle de temps, et dont la rapidité croissait seulement dans le passage de l'un à l'autre; mais en prenant la limite, on a anéanti l'intervalle supposé entre les actions de la force, on a changé une suite d'actions isolées en une action continue, et l'ensemble des mouvemens uniformes supposés est devenu le mouvement uniformément accéléré, tel qu'il a lieu dans la nature.

Ces deux exemples suffisent pour montrer l'importance de la considération des états successifs par lesquels passent des quantités variables, comme les ordonnées des courbes, les espaces parcourus par l'effet des forces qui changent, et de chercher, non les changemens en eux-mêmes, mais les limites vers lesquelles tendent leurs rapports.

III. Cette considération, qui est aujourd'hui la meilleure base que l'on puisse donner au Calcul différentiel, se retrouve implicitement dans la Géométrie élémentaire, toutes les fois qu'il faut comparer les lignes courbes aux lignes droites, les aires circulaires à celles des po-

lygones, les corps ronds aux polyèdres; car on ne mesure *immédiatement* que des lignes droites, des polygones et des polyèdres.

En effet, si l'on désigne par ω l'angle AOH, *fig.* 65, qui est la moitié de l'angle au centre du polygone quelconque ABC, circonscrit au cercle dont le rayon $OH = r$, et qu'on prenne l'unité pour le rayon des tables trigonométriques, on aura FIG. 65.

$$1 : \text{tang}\,\omega :: r : AH, \quad \text{d'où} \quad AH = r\,\text{tang}\,\omega,$$

et

$$AB = 2r\,\text{tang}\,\omega.$$

Mais le côté AB est contenu autant de fois dans le contour du polygone régulier, que l'arc qui mesure l'angle AOB est contenu dans la circonférence : soit donc 2π celle qui est décrite avec le rayon 1, et à laquelle se rapporte l'arc ω; le nombre des côtés du polygone sera $\frac{2\pi}{2\omega}$; ainsi son contour sera

$$\frac{2\pi}{2\omega}.2r\,\text{tang}\,\omega = 2\pi r.\frac{\text{tang}\,\omega}{\omega}.$$

Or, plus le nombre des côtés du polygone augmentera, plus l'angle ω diminuera, et plus le rapport $\frac{\text{tang}\,\omega}{\omega}$ approchera de l'unité qui est sa limite (pag. 44). Si l'on passe à cette limite, le polygone se changera en cercle, et sa circonférence deviendra $2\pi r$, comme le donne la Géométrie élémentaire.

Rien n'est plus aisé maintenant que d'obtenir la surface du cercle. Celle du polygone ABC étant égale à son contour $2\pi r\frac{\text{tang}\,\omega}{\omega}$, multiplié par $\frac{1}{2}OH$ ou $\frac{1}{2}r$, revient à $\pi r^2\frac{\text{tang}\,\omega}{\omega}$; et en passant à la limite on a πr^2, comme par la Géométrie élémentaire.

On appliquerait bien aisément ces calculs aux corps ronds; mais nous ne nous y arrêterons point : nous nous bornerons seulement à faire observer qu'ici la *limite* se montre, non pas comme un mode arbitraire d'exposition, mais bien comme tenant au fond des choses.

La considération des limites n'est pas non plus étrangère aux Élémens d'Algèbre. J'en ai donné un exemple sur la fraction $\frac{a(a^2-b^2)}{b(a-b)}$, dont les deux termes s'évanouissent quand $a = b$, et dont la valeur est alors $2a$, et j'en ai fait usage pour expliquer un cas singulier du problème des deux lumières. (*Élém. d'Alg.*, 70, 120.)

En effet, c'est toujours à cette considération qu'il faut avoir recours pour expliquer les difficultés qui peuvent naître des indications de quantités infinies ou infiniment petites, dont les mathématiques n'ont pas besoin de supposer l'existence actuelle, et qui d'ailleurs n'offrent aucune prise à l'esprit. Il n'est donc pas étonnant que lorsqu'on analyse avec soin les diverses théories proposées pour l'établissement des principes du Calcul différentiel, on y retrouve toujours des idées de limites.

IV. Quelquefois on a employé des locutions vicieuses : c'est ainsi qu'on a désigné long-temps la méthode des limites, sous le nom de *méthode des premières et dernières raisons*; mais ce langage n'est pas exact. Quand, plus haut, nous avons considéré le rapport $\frac{2y+k}{p}$ des lignes $\frac{MQ}{M'Q}$ (page 668), nous n'avons pas dû dire que la limite $\frac{2y}{p}$ était la dernière raison de ces lignes; car lorsque $\frac{2y+k}{p}$ se change en $\frac{2y}{p}$, par l'anéantissement de k, les deux points M' et M coïncident, les lignes $M'Q$ et MQ n'existant plus, n'ont plus de rapport. C'est donc comme existant à part, c'est comme quantité *sui generis*, qu'il faut envisager $\frac{2y}{p}$; et ce qui lie cette fraction aux quantités h et k, ou MQ et $M'Q$, c'est seulement qu'on peut l'en faire dériver, comme exprimant, non pas leur rapport, mais sa limite. C'est ce que Newton lui-même a très bien exprimé dans ce passage de son livre des *Principes* :

« Les dernières raisons qu'ont entre elles les quantités qui s'évanouissent ne sont pas, dans le vrai, les raisons des dernières quantités, mais les limites dont les raisons des quantités qui décroissent » à l'infini approchent sans cesse, et de manière à n'en différer » qu'aussi peu qu'on voudra (*). »

Si l'on supposait que le point M' d'abord réuni au point M s'en

(*) *Ultimæ rationes illæ quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum, sed limites ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant; et quas propiùs assequi possunt quam pro data quavis differentia.* (*Philosophiæ naturalis principia mathematica*, lib. I, sect. 1, lem. XI, scholium.)

éloignât, alors les lignes MQ et $M'Q$ naîtraient au lieu de s'évanouir, et c'est dans ce sens qu'on nommait $\frac{2\gamma}{p}$ leur première raison.

V. *Il* me semble que pour bien voir la naissance des limites, dans le passage des lignes droites aux courbes, il suffit de remarquer que la différence caractéristique entre une courbe et un polygone, consiste en ce que l'on peut toujours inscrire dans la courbe un angle aussi approchant de deux droits qu'on voudra, ce qui ne peut se faire dans un polygone, où l'angle à la circonférence est le plus grand de tous ceux qui peuvent être placés entre deux côtés consécutifs.

Il suit immédiatement de cette condition, que *dans une courbe quelconque, la limite du rapport de l'arc à sa corde est l'unité;* car si l'on prend de chaque côté du point A, *fig.* 66, des cordes de plus en plus petites $AB=AC$, $AB'=AC'$, etc., qu'on tire les droites BC, $B'C'$, etc., qu'on abaisse sur ces droites les perpendiculaires AD, AD', etc., les triangles rectangles BAD, $B'AD'$, etc., donneront FIG. 66.

$$\frac{BC}{AB+AC}=\frac{BD}{AB}=\sin\tfrac{1}{2}BAC,\ \frac{B'C'}{AB'+AC'}=\frac{B'D'}{AB'}=\sin\tfrac{1}{2}B'AC',\text{etc.};$$

mais les angles $\frac{1}{2}BAC$, $\frac{1}{2}B'AC'$, etc., tendant sans cesse à devenir droits, leurs sinus approchent de plus en plus d'être égaux à l'unité: il en est de même des rapports des lignes brisées aux droites qui joignent leurs extrémités, assemblages de lignes qui s'approchent aussi de plus en plus de l'arc et de sa corde.

Il faut bien observer que ce n'est pas simplement parce que l'arc et sa corde diminuant, leur différence diminue, que leur rapport tend vers l'unité. Les côtés d'un triangle rectiligne, par exemple, conservent toujours leur rapport, à quelque degré de petitesse qu'on les réduise, tant que les nouveaux triangles demeurent *semblables* au premier, et les différences de ces côtés décroissent aussi dans le même rapport; mais il n'en est pas ainsi pour les arcs: ils s'aplatissent parce que l'angle inscrit s'ouvre à mesure qu'ils décroissent, et leur excès sur les cordes décroît plus rapidement que ces lignes. En effet, si l'on compare deux grandeurs, A et a, qui diminuent indéfiniment, et que l'on pose $A=a+\delta$, on verra que le rapport $\frac{A}{a}=\frac{a+\delta}{a}=1+\frac{\delta}{a}$ ne peut tendre sans cesse vers l'unité qu'autant que δ décroît plus rapidement que a.

On peut encore rattacher aux considérations précédentes sur les angles inscrits dans les segmens des courbes, la propriété qu'a le

rapport de l'ordonnée à la soutangente, d'être la limite de celui des accroissemens de l'ordonnée et de l'abscisse. En effet, trois points
FIG. 67. M_1, M, M', *fig.* 67, sur une courbe quelconque, détermineront deux rapports $\frac{MQ_1}{M_1Q_1}$ et $\frac{M'Q}{MQ}$, respectivement égaux aux tangentes des angles MM_1Q_1, $M'MQ$ que les cordes M_1M et MM' forment avec l'axe des abscisses P_1P'; et désignant ces angles par A et B, on aura

$$\frac{MQ_1}{M_1Q_1} - \frac{M'Q}{MQ} = \text{tang}\, A - \text{tang}\, B.$$

Cela posé, on sait que

$$\text{tang}\,(A - B) = \frac{\text{tang}\, A - \text{tang}\, B}{1 + \text{tang}\, A \,\text{tang}\, B} \quad (\textit{Trig.}\ 27),$$

d'où

$$\text{tang}\, A - \text{tang}\, B = (1 + \text{tang}\, A \,\text{tang}\, B)\,\text{tang}\,(A - B);$$

et si l'on prolonge M_1M au-delà du point M, on formera l'angle RMM', qui sera la différence des angles MM_1Q_1 et $M'MQ$, ou $A - B$, et en même temps le supplément de l'angle M_1MM'. Plus ce dernier approchera de deux droits, plus le premier diminuera, et avec lui la différence $\text{tang}\, A - \text{tang}\, B$ des rapports $\frac{MQ_1}{M_1Q_1}$, $\frac{M'Q}{MQ}$; mais l'un de ces rapports étant moindre que $\frac{PM}{PT}$, tandis que l'autre est plus grand, ils se rapprocheront d'autant plus de cet intermédiaire, qu'ils différeront moins l'un de l'autre : ce sera donc leur limite commune.

NOTE B, *indiquée sur la page* 270.

I. L'équation

$$z\sqrt{-1} = l\,(\cos z + \sqrt{-1}\,\sin z),$$

devenant

$$2m\pi\sqrt{-1} = l.\,1,$$

lorsque l'on prend $z = 2m\pi$, fait reconnaître que l'unité a une infinité de logarithmes différens. On ne trouve zéro qu'en posant $m = 0$; mais pour toute autre valeur entière, soit positive, soit négative de m, on obtient une expression imaginaire qui doit être regardée comme un logarithme de l'unité.

Cette proposition, qui semble un paradoxe, quand on n'assigne

aux logarithmes qu'une origine arithmétique, en les déduisant de la comparaison des progressions (*Élém. d'Alg.* 254), devient naturelle quand on les tire de l'équation $y = e^x$. En effet, si l'on désigne par α l'exposant numérique de la puissance à laquelle il faut élever e, pour produire la valeur assignée à y, et qu'on fasse $x = \alpha + z$, il vient

$$e^{\alpha+z} = y, \quad \text{qui se réduit à} \quad e^z = 1,$$

à cause de $e^\alpha = y$. Mais l'équation $e^z = 1$ étant développée par la formule du n° 27, conduit à

$$\frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \text{etc.} = 0,$$

qui se décompose dans les facteurs

$$z = 0, \qquad 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{1.2} + \text{etc.} = 0;$$

le premier est la *détermination arithmétique* du logarithme de l'unité, et le second contient les *déterminations algébriques* : ceci est à la théorie des logarithmes ce qu'est la considération des racines imaginaires de l'unité à la théorie des puissances. (*Élém. d'Alg.* 159.)

Les valeurs $z = 2m\pi\sqrt{-1}$ sont les racines du second facteur de l'équation $e^z = 1$, et celles de l'équation $y = e^x$ sont $\alpha + 2m\pi\sqrt{-1}$, en sorte que $ly = \alpha + 2m\pi\sqrt{-1}$.

II. Pour déterminer ces racines, Euler, qui les a découvertes le premier, a employé un artifice d'analyse très ingénieux, et qui repose sur la proposition démontrée dans le n° 188, d'après laquelle les racines de l'équation

$$y^n - 1 = 0 \quad \text{sont} \quad y = \cos\frac{2m\pi}{n} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{2m\pi}{n}.$$

Il faut d'abord observer que

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = 1 + \frac{z}{1} + \frac{n-1}{1.2}\frac{z^2}{n} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{z^3}{n^2} + \text{etc.}$$

$$= 1 + \frac{z}{1} + \frac{1-\frac{1}{n}}{1.2}z^2 + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1.2.3}z^3 + \text{etc.}$$

a pour limite, lorsque n devient infinie,

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \text{etc.} = e^z.$$

Cela posé, l'équation $e^z - 1 = 0$ pourra être remplacée par la limite de $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - 1 = 0$; et substituant $1 + \frac{z}{n}$ à y, on aura, par ce qui précède,

$$1 + \frac{z}{n} = \cos\frac{2m\pi}{n} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{2m\pi}{n};$$

puis prenant les limites relatives à la supposition de n infinie, suivant laquelle $\cos\frac{2m\pi}{n}$ et $\sin\frac{2m\pi}{n}$ deviennent respectivement 1 et $\frac{2m\pi}{n}$, en concevant toutefois que m demeure finie, on aura, comme ci-dessus,

$$z = 2m\pi\sqrt{-1}.$$

Afin de bien voir cette limite, il faut mettre pour $\cos\frac{2m\pi}{n}$ et $\sin\frac{2m\pi}{n}$, leur développement (37); et après les simplifications, il vient

$$z = -\frac{4m^2\pi^2}{2n} + \text{etc.} + \sqrt{-1}\left(2m\pi - \frac{8m^3\pi^3}{2.3.n^2} + \text{etc.}\right),$$

ce qui se réduit à $z = 2m\pi\sqrt{-1}$, lorsque n est infinie.

III. Il peut aussi n'être pas inutile de faire observer que la décomposition de $y^n - 1$ en facteurs, sur laquelle ce qui précède est fondé, s'obtient indépendamment des considérations du n° 187. Voici comment Lagrange y est parvenu.

Les équations

$$\cos(n+1)z = \cos z\cos nz - \sin z\sin nz,$$
$$\cos(n-1)z = \cos z\cos nz + \sin z\sin nz,$$

étant ajoutées, donnent

$$\cos(n+1)z + \cos(n-1)z = 2\cos z\cos nz,$$

d'où l'on tire

$$2\cos(n+1)z = 2\cos z.2\cos nz - 2\cos(n-1)z.$$

Posant ensuite

$$2\cos z = y + \frac{1}{y},$$

et mettant les nombres 1, 2, 3, etc., à la place de n, il viendra

$$2\cos 2z = \left(y+\frac{1}{y}\right)^2 - 2 = y^2 + \frac{1}{y^2},$$
$$2\cos 3z = \left(y+\frac{1}{y}\right)\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right) - \left(y+\frac{1}{y}\right) = y^3 + \frac{1}{y^3},$$
$$2\cos 4z = \left(y+\frac{1}{y}\right)\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right) - \left(y^2+\frac{1}{y^2}\right) = y^4 + \frac{1}{y^4},$$

etc.,

d'où l'on conclura d'abord, par analogie, que

$$2\cos nz = y^n + \frac{1}{y^n}.$$

Pour s'en assurer tout-à-fait, il suffit de voir que si la loi remarquée a lieu pour les nombres $n-1$ et n, elle aura pareillement lieu pour le nombre $n+1$. Or, si l'on fait

$$2\cos(n-1)z = y^{n-1} + \frac{1}{y^{n-1}}, \quad 2\cos nz = y^n + \frac{1}{y^n},$$

il en résultera

$$2\cos(n+1)z = \left(y+\frac{1}{y}\right)\left(y^n+\frac{1}{y^n}\right) - \left(y^{n-1}+\frac{1}{y^{n-1}}\right)$$
$$= y^{n+1} + \frac{1}{y^{n+1}},$$

ce qui est encore la loi supposée, et prouve qu'en partant des valeurs $n=1$ et $n=2$, elle s'étendra à tous les nombres entiers.

Il suit de là que les équations

$$2\cos z = y + \frac{1}{y}, \quad 2\cos nz = y^n + \frac{1}{y^n},$$

qui reviennent à

$$y^2 - 2y\cos z + 1 = 0, \quad y^{2n} - 2y^n \cos nz + 1 = 0,$$

ont lieu en même temps, qu'elles ont par conséquent une racine commune. Mais si on la désigne par a, qu'on fasse ensuite $y = \frac{1}{a}$, et qu'on réduise tous les termes de chaque équation au même dénominateur, on trouvera qu'elles sont vé-

rifiées en même temps par cette nouvelle valeur ; et comme la première équation n'est que du deuxième degré, il en résulte qu'elle est un des facteurs de la seconde.

Maintenant, si l'on prend

$$nz = 2m\pi + \delta,$$

il viendra

$$\cos nz = \cos\delta, \quad z = \frac{2m\pi + \delta}{n};$$

et par conséquent l'équation

$$y^{2n} - 2y^n \cos\delta + 1 = 0,$$

aura pour facteur

$$y^2 - 2y \cos\frac{2m\pi + \delta}{n} + 1 = 0,$$

quel que soit le nombre entier qu'on substitue à m : voilà donc la formule du n° 191.

Pour en déduire celles du n° 190, il suffit de faire $\delta = 0$ et $\delta = \pi$. Dans le premier cas, on aura

$$\cos\delta = 1, \quad y^{2n} - 2y^n + 1 = (y^n - 1)^2,$$

puis

$$y^n - 1 = 0, \quad y^2 - 2y \cos\frac{2m\pi}{n} + 1 = 0.$$

Dans le second cas,

$$\cos\delta = -1, \quad y^{2n} + 2y^n + 1 = (y^n + 1)^2,$$

puis

$$y^n + 1 = 0, \quad y^2 - 2y \cos\frac{(2m+1)\pi}{n} + 1 = 0,$$

comme dans le n° cité.

IV. Au moyen de l'expression

$$z = 2m\pi\sqrt{-1},$$

des racines imaginaires de l'équation $e^z - 1 = 0$, on explique plusieurs difficultés qu'offre l'application des logarithmes aux nombres négatifs, entre autres celle-ci : puisque $(-a)^2 = (+a)^2 = a^2$, on doit en conclure que

$$l(-a)^2 = la^2, \quad 2l - a = 2l + a, \quad \text{d'où} \quad l - a = l + a;$$

mais la dernière de ces conséquences ne s'accorde point avec l'équation $y = e^x$; jamais aucune valeur réelle de x ne saurait rendre y négatif; ainsi les nombres négatifs ne peuvent avoir des logarithmes réels.

Cela est confirmé aussi par l'équation

$$z\sqrt{-1} = l(\cos z + \sqrt{-1}\sin z),$$

dans laquelle il faut faire $z = (2m+1)\pi$ pour obtenir $\cos z = -1$, d'où il résulte

$$l-1 = (2m+1)\pi\sqrt{-1};$$

et en désignant par α le logarithme réel de $+a$, il vient

$$l-a = \alpha + l-1 = \alpha + (2m+1)\pi\sqrt{-1},$$

formule qui ne donne aucune valeur réelle, puisque m doit toujours être un nombre entier (188).

Cependant il est vrai que les expressions $2l+a$ et $2l-a$ font partie de celles de la^2, mais sans pour cela être égales entre elles. En effet, α étant le logarithme réel de a, celui de a^2 sera 2α, et tous les logarithmes (tant réels qu'imaginaires) de a^2 seront compris dans l'expression $2\alpha + 2m\pi\sqrt{-1}$, m pouvant être pair ou impair. Dans le premier cas, $2m$ sera un nombre doublement pair, et par conséquent l'expression ci-dessus s'accordera avec

$$2l+a = 2\alpha + 2.2m\sqrt{-1} :$$

dans le second cas, le nombre $2m$ étant simplement pair, l'expression de la^2 s'accordera avec

$$2l-a = 2\alpha + 2(2m+1)\sqrt{-1};$$

mais les expressions

$$2\alpha + 2.2m\pi\sqrt{-1}, \qquad 2\alpha + 2(2m+1)\pi\sqrt{-1},$$

ne sauraient s'accorder entre elles, puisque les nombres indiqués sont doublement pairs dans la première, et simplement pairs dans la seconde.

NOTE C, *indiquée sur la page* 372.

1. On a vu, dans le n° 271, que le résultat des intégrations successives, par rapport à deux variables, ne dépendait pas, en général, de l'ordre dans lequel ces deux intégrations étaient effectuées :

on peut aussi se rendre compte de cette circonstance, en considérant les intégrales comme des sommes d'élémens, au moyen de l'expression donnée dans la note de la page 329. En effet, soit l'intégrale double $\int\int z dx dy$ où $z = f(x, y)$, et ayant pour limites a et a' par rapport à x, b et b' par rapport à y; commençons par l'intégration relative à x, et posons $a' = a + n\alpha$; mais, pour abréger, écrivons $f(m, y)$ au lieu de $f(a + m\alpha, y)$, nous aurons, d'après la note citée,

$$\int_a^{a'} z dx = \alpha\{f(0, y) + f(1, y) \ldots + f(n-1, y)\}.$$

Multipliant ensuite par dy les deux membres de cette équation, et intégrant depuis $y = b$ jusqu'à $y = b'$, en faisant $b' = b + p\alpha$, un terme quelconque $\alpha f dy f(m, y)$ du second membre donnera

$$\alpha^2\{f(m, 0) + f(m, 1) + f(m, 2) \ldots + f(m, p-1)\},$$

et il en naîtra, pour le développement complet,

$$\int_b^{b'} \int_a^{a'} z dx dy =$$

$$\alpha^2 \left\{ \begin{array}{llll} f(0, 0) & + f(1, 0) & + f(2, 0) \ldots\ldots & + f(n-1, 0) \\ + f(0, 1) & + f(1, 1) & + f(2, 1) \ldots\ldots & + f(n-1, 1) \\ + f(0, 2) & + f(1, 2) & + f(2, 2) \ldots\ldots & + f(n-1, 2) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ + f(0, p-1) & + f(1, p-1) & + f(2, p-1) \ldots & + f(n-1, p-1) \end{array} \right\},$$

où chaque ligne représente une integrale relative à x, et chaque colonne, une intégrale relative à y. Si l'on renversait l'ordre des intégrations, les colonnes prendraient la place des lignes, et réciproquement: il n'y aurait de changé que l'ordre des substitutions; car dans le premier cas, on commence par substituer à x ses diverses valeurs, et l'on ne met qu'ensuite celles de y, tandis qu'on fait évidemment le contraire dans le second cas. Or, cela ne change rien en général à la valeur des termes du dernier développement, puisque $f(x, y)$ doit toujours rester la même, lorsqu'on y met pour x et y les mêmes valeurs, dans quelque ordre que s'effectuent les substitutions.

II. Il y a pourtant à cela une exception, lorsque ces valeurs rendent $f(x, y)$ indéterminée, en la faisant passer par l'infini. C'est sur la fonction $\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ que M. Cauchy a d'abord fait cette remarque. Quand on y suppose simultanément $x = 0$,

$y=0$, elle devient entièrement indéterminée, comme celle qu'on a considérée dans le n° 154 (*Voyez aussi le* Traité in-4°, t. I, p. 357 — 360, et 607); mais si l'on n'opère les substitutions que l'une après l'autre, en commençant par $x=0$, on trouve $\frac{y^2}{y^4}=\frac{1}{y^2}$, ce qui devient $+$ infini, lorsqu'on y fait $y=0$; et dans l'ordre contraire, il vient d'abord $\frac{-x^2}{x^4}=-\frac{1}{x^2}$, que la supposition de $x=0$ change en $-$infini; mais la différence des deux résultats cesse dès que l'on ne considère plus x et y comme rigoureusement nuls : il n'y a donc qu'un seul élément qui prenne deux valeurs, celui qui répond à $x=0$, $y=0$; et ce qu'il faut bien remarquer, c'est que la fonction $\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, devenant alors infinie, fait prendre à cet élément une valeur finie qui influe sur celle de l'intégrale proposée; aussi arrive-t-on à deux résultats différens, suivant l'ordre dans lequel on effectue les intégrations.

Pour s'en assurer, il faut remarquer que si l'on fait

$$u=\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}\frac{y}{x}\right),$$

il vient

$$\frac{du}{dx}=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{du}{dy}=\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{d^2u}{dxdy}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=z \qquad (279).$$

Il suit de là qu'en commençant par l'intégration relative à x, on a, en général,

$$\int z\,dx=\int\frac{d^2u}{dxdy}\,dx=\frac{du}{dy}=\frac{x}{x^2+y^2};$$

et depuis $x=a$ jusqu'à $x=a'$, on obtient

$$\frac{a'}{a'^2+y^2}-\frac{a}{a^2+y^2}.$$

Passant ensuite à

$$u = \int \frac{du}{dy}\,dy = \int \frac{a'dy}{a'^2+y^2} - \int \frac{a\,dy}{a^2+y^2}$$
$$= \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{a'}\right) - \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{a}\right);$$

et les limites de cette nouvelle intégration étant b et b', on trouve pour dernière expression

$$\left.\begin{array}{l} \text{arc}\left(\text{tang} = \dfrac{b'}{a'}\right) - \text{arc}\left(\text{tang} = \dfrac{b}{a'}\right) \\ - \text{arc}\left(\text{tang} = \dfrac{b'}{a}\right) + \text{arc}\left(\text{tang} = \dfrac{b}{a}\right) \end{array}\right\}.$$

Quand on procède dans l'ordre inverse, on a successivement

$$\int z\,dy = \int \frac{d^2u}{dx\,dy}\,dy = \frac{du}{dx} = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

d'où
$$-\frac{b'}{x^2+b'^2} + \frac{b}{x^2+b^2},$$
$$u = \int \frac{du}{dx}\,dx = -\int \frac{b'dx}{b'^2+x^2} + \int \frac{b\,dx}{b^2+x^2}$$
$$= -\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{b'}\right) + \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{b}\right),$$

et enfin

$$\left.\begin{array}{l} -\text{arc}\left(\text{tang} = \dfrac{a'}{b'}\right) + \text{arc}\left(\text{tang} = \dfrac{a}{b'}\right) \\ + \text{arc}\left(\text{tang} = \dfrac{a'}{b}\right) - \text{arc}\left(\text{tang} = \dfrac{a}{b}\right) \end{array}\right\}.$$

Il ne serait pas difficile de montrer que, dans leur état général, les deux expressions précédentes sont identiques ; mais si l'on fait

$$a = -1, \quad a' = 1, \quad b = -1, \quad b' = 1,$$

limites entre lesquelles tombent $x = 0$, $y = 0$, et d'où il résulte

$$\text{arc}\,(\text{tang} = 1) = \frac{\pi}{4}, \quad \text{arc}\,(\text{tang} = -1) = -\frac{\pi}{4},$$

on trouvera les valeurs

$$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\pi,$$

$$-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=-\pi,$$

qui ne sont pas égales, mais dont la différence est 2π.

Si l'on voulait prendre $x=0$, $y=0$, pour les premières limites des intégrales cherchées, il faudrait faire d'abord $a'=b'=1$, et la première expression deviendrait

$$\frac{\pi}{4}-\text{arc}\,(\text{tang}=b)-\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{1}{a}\right)+\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{b}{a}\right),$$

ou bien

$$-\frac{\pi}{4}-\text{arc}\,(\text{tang}=b)+\text{arc}\,(\text{tang}=a)+\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{b}{a}\right),$$

à cause que

$$\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{1}{a}\right)=\frac{\pi}{2}-\text{arc}\,(\text{tang}=a).$$

Considérant alors a et b comme des quantités très petites, et négligeant en conséquence les termes

$$\text{arc}\,(\text{tang}=a),\quad \text{arc}\,(\text{tang}=b),$$

il resterait $-\frac{\pi}{4}+\text{arc}\left(\text{tang}\,\frac{b}{a}\right)$, expression qui devient indéterminée quand a et b sont nuls. Si l'on posait $b=ma$, on aurait

$$-\frac{\pi}{4}+\text{arc}\,(\text{tang}=m),$$

la quantité m pouvant varier de 0 à l'infini : dans le premier cas, le résultat est $-\frac{\pi}{4}$, et dans le second, $+\frac{\pi}{4}$, à cause que arc (tang = infini) $=\frac{\pi}{2}$; la différence entre ces deux valeurs est π.

On a trouvé d'abord 2π, parce que les variables x et y étant à des puissances paires, dans la fonction proposée, chaque intégration de -1 à $+1$ donne un résultat double de celui qu'on obtient de 0 à $+1$.

L'ambiguité qu'on vient de montrer n'aurait pas lieu pour les intégrales

$$\iint \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}\, dx dy,$$

prises dans les mêmes limites, quoique la fonction

$$\frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}$$

se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, quand on y fait à la fois $x = 0$, $y = 0$, et prenne deux valeurs différentes, suivant l'ordre des substitutions, parce que, ces valeurs étant finies, elle n'a, dans cette circonstance, qu'un élément infiniment petit.

III. La différence des valeurs obtenues en variant l'ordre des intégrations, ne venant que du seul élément placé à l'origine des variables x et y, M. Cauchy l'évalue à part, ce que l'on peut faire comme il suit.

Soit $\varphi(x, y)$ l'expression générale de $\int z dx$, z devenant infini par des valeurs de x et de y, comprises entre les limites a et a', b et b'; en désignant par α la valeur de x, et par k une quantité très petite, l'intégrale $\int z dx$, prise dans le petit intervalle de $\alpha - k$ à $\alpha + k$, sera

$$\varphi(\alpha + k, y) - \varphi(\alpha - k, y),$$

et dans l'intégration suivante, effectuée depuis $y = b$ jusqu'à $y = b'$, donnera la portion

$$\int_b^{b'} dy \left\{ \varphi(\alpha + k, y) - \varphi(\alpha - k, y) \right\},$$

qui approchera d'autant plus d'être celle qui correspond à un seul élément, que la valeur assignée à k sera plus petite.

Dans l'exemple de l'article II, pour lequel

$$\varphi(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \alpha = 0,$$

l'expression trouvée ci-dessus devient

$$\int_{-1}^{1} dy \left\{ \frac{k}{k^2+y^2} + \frac{k}{k^2+y^2} \right\} = 2\int_{-1}^{1} \frac{k dy}{k^2+y^2}$$

$$= 2 \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{1}{k}\right) - 2 \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = -\frac{1}{k}\right).$$

En faisant $k = 0$, pour passer à la limite, on a

$$2 \operatorname{arc} (\operatorname{tang} = \text{infini}) - 2 \operatorname{arc} (\operatorname{tang} = -\text{infini})$$

$$= \frac{2\pi}{2} + \frac{2\pi}{2} = 2\pi,$$

précisément la différence trouvée dans l'article cité.

Les intégrales où l'on ne considère qu'un élément, ainsi qu'on l'a vu plus haut pour $\int z dx$, ont été nommées, par M. Cauchy, *intégrales singulières*; les lecteurs qui voudront plus de détails sur ce sujet, les trouveront dans le tome Ier des *Nouveaux Mémoires présentés à l'Académie des Sciences, par divers Savans*, page 672.

FIN DES NOTES.

ERRATA.

Page 51, ligne 4 *en remontant*, par, *lisez* pour

166, ligne dernière de la note,

$$x = a\left\{\ldots\ldots\ldots\right\},$$

lisez $x = \text{arc}\left(\text{sin.verse} = \frac{y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}$

339, ligne première de la note, $m + mlz$, *lisez* $z + mlz$

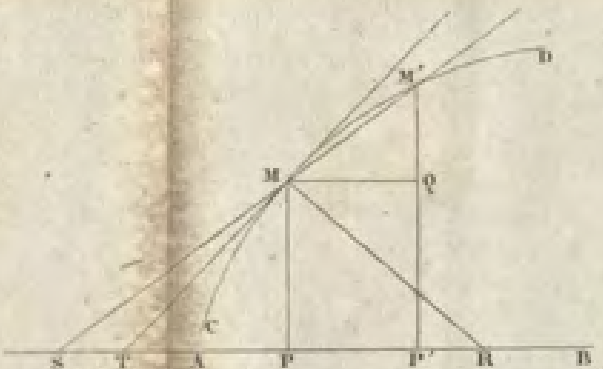
372, ligne dernière de la note, *ajoutez voy.* la note C

382, ligne 6 *en remontant*, trois variables, *lisez* deux variables

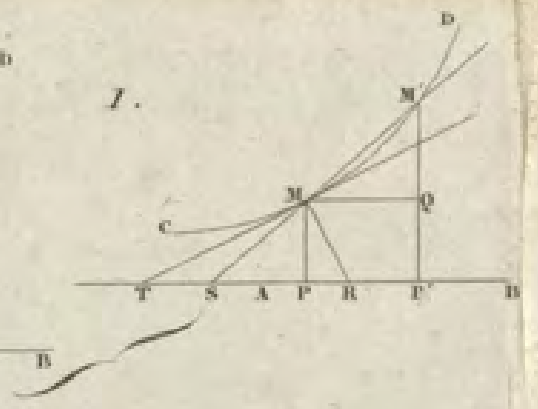
414, ligne 11, $y - ax + c'$, *lisez* $y - ax - c'$

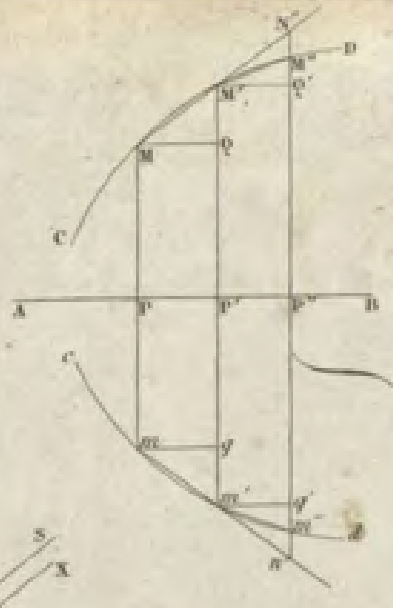
540, ligne 10 *en remontant*, $A'\delta x$, *lisez* $A'\delta x'$

653, ligne 17, *ajoutez au bout*, (*Novi Comment. Acad. Petrop.*, t. V, p. 204.

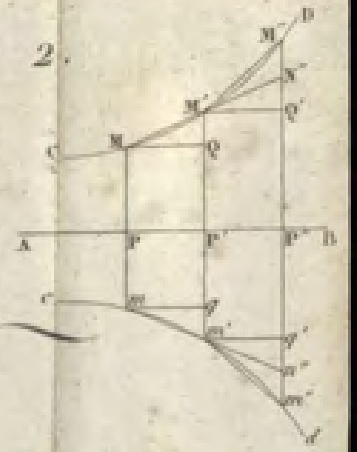


1.

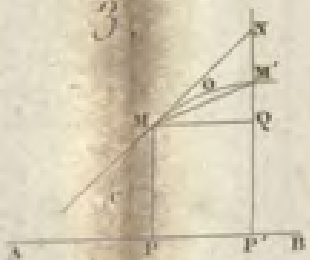




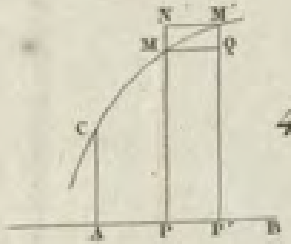
2.



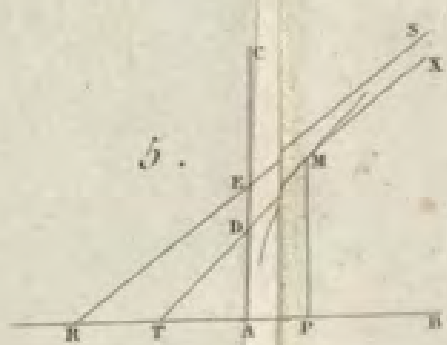
3.



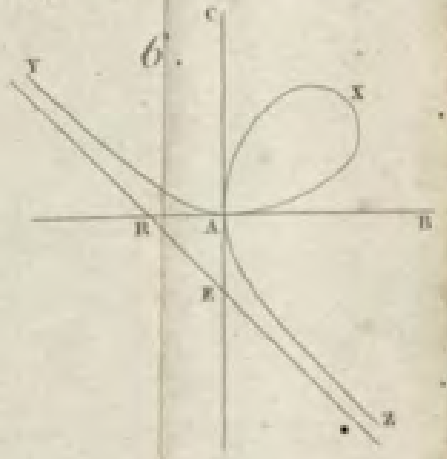
4.



5.

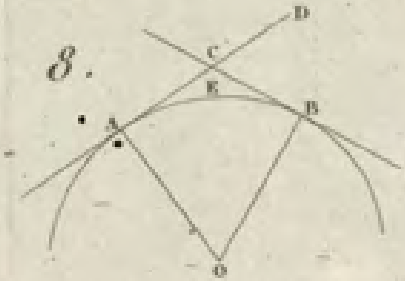


6.



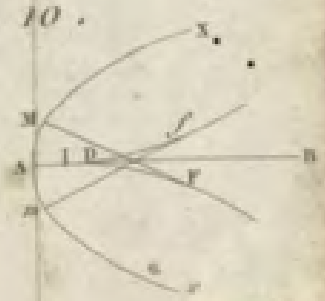
7.

8.

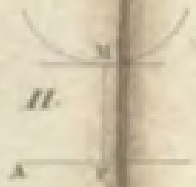


9.

10.



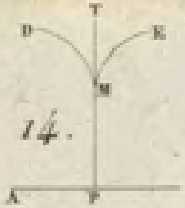
11.



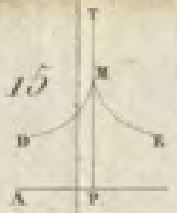
12.

13.

14.

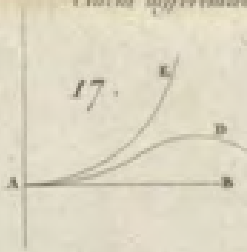


15



16.

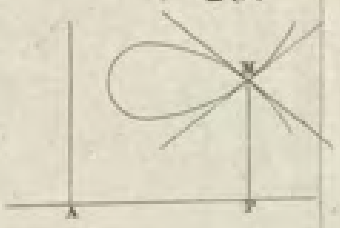
17.



18.

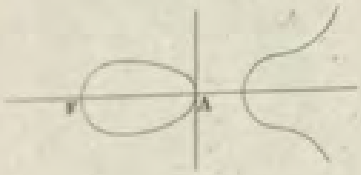
19.

20.

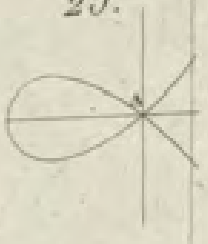


21.

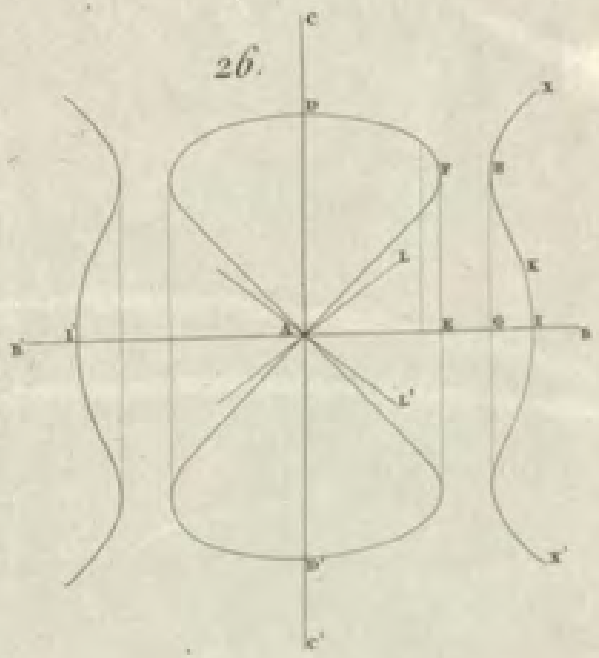
22.



23.



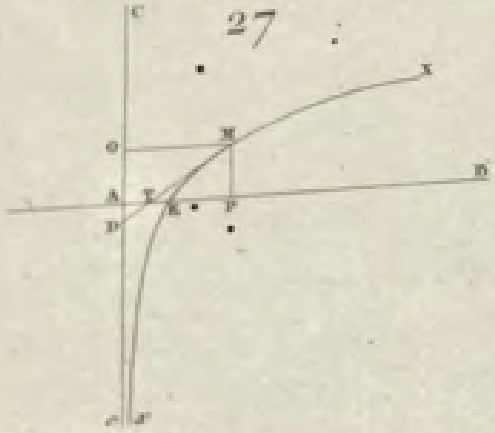
26.



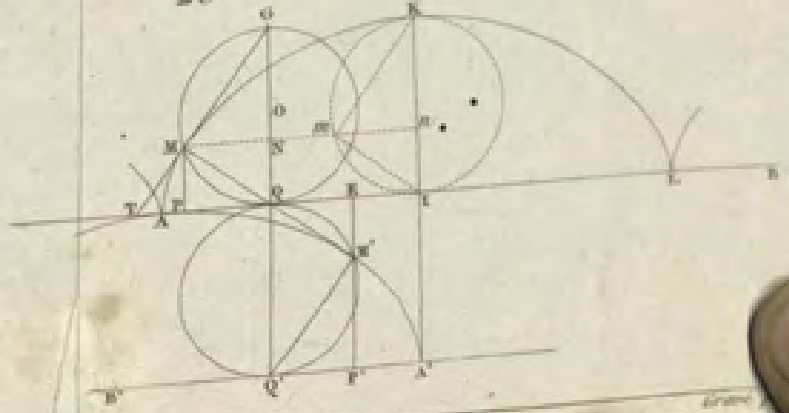
24.

25.

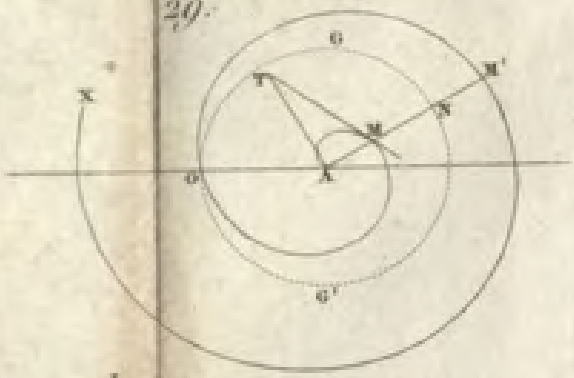
27



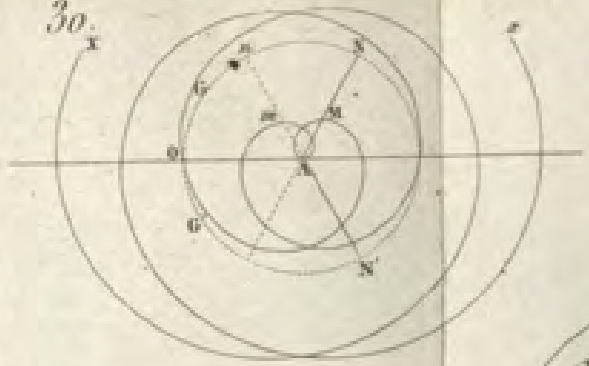
28



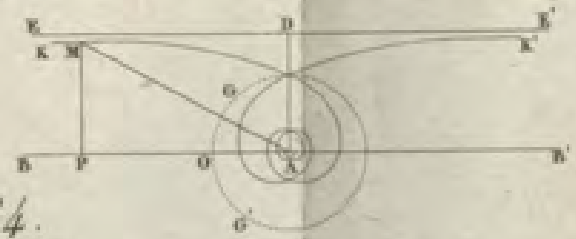
29.



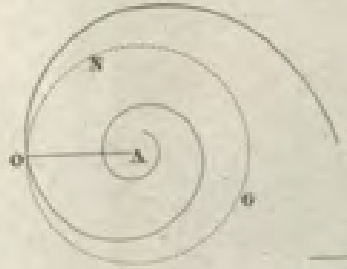
30.



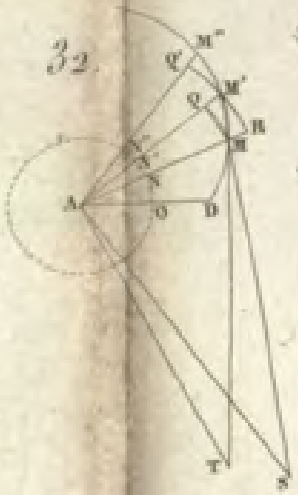
31.



34.

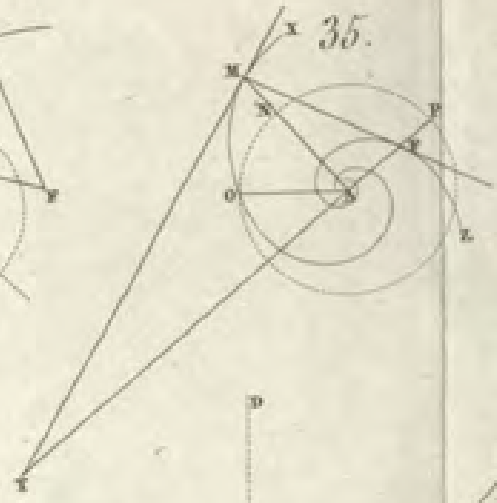


32.

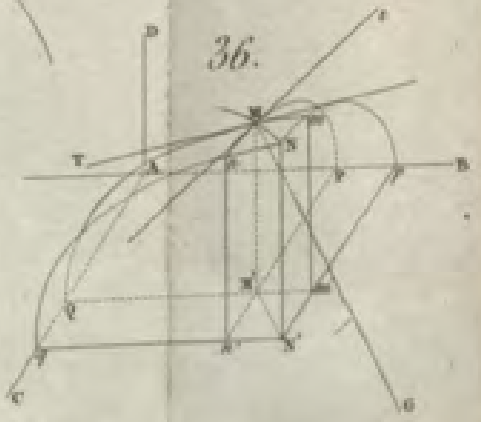


33.

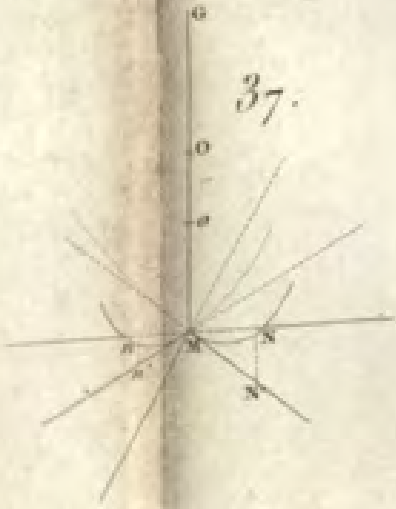
35.



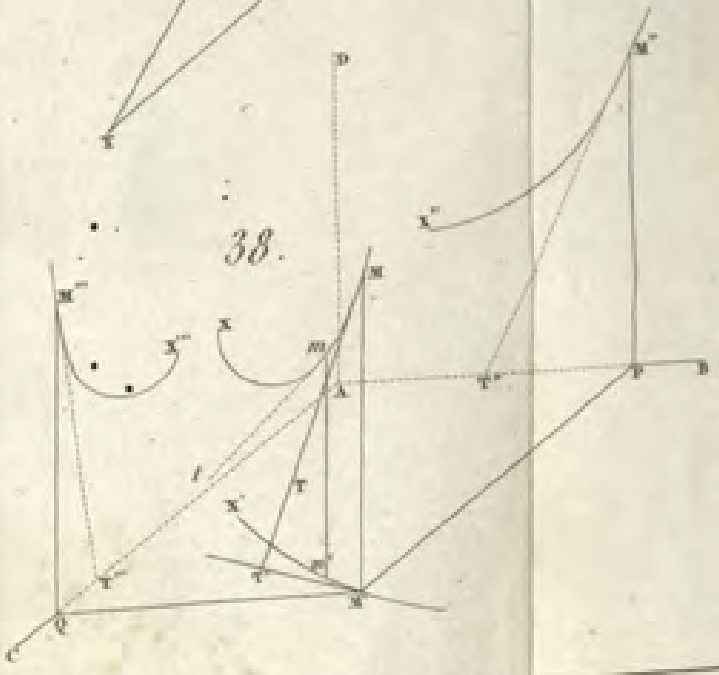
36.



37.

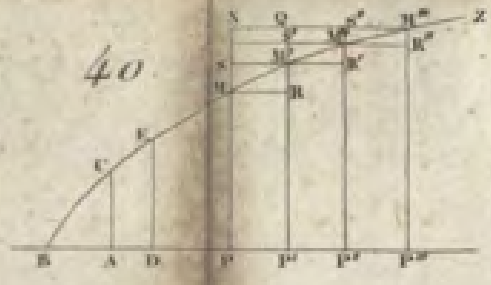


38.

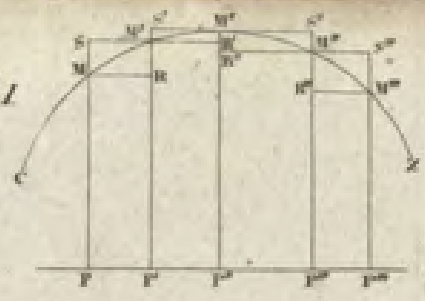


39.

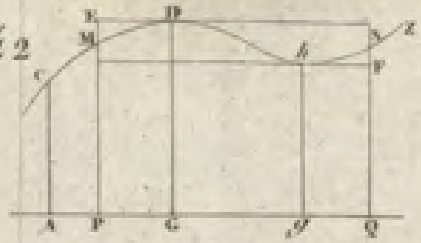
40



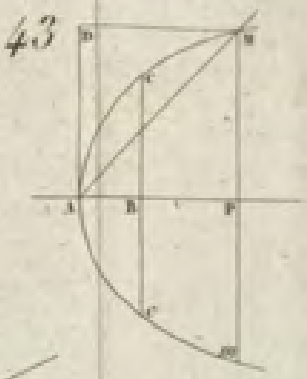
41



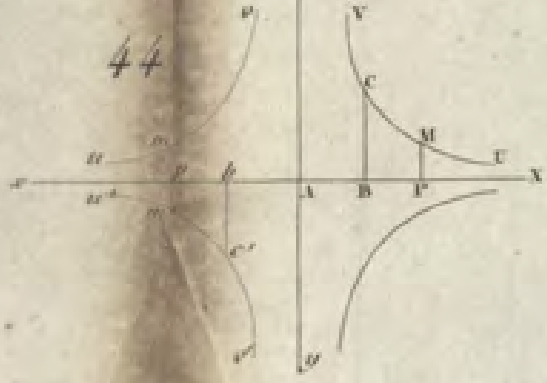
42



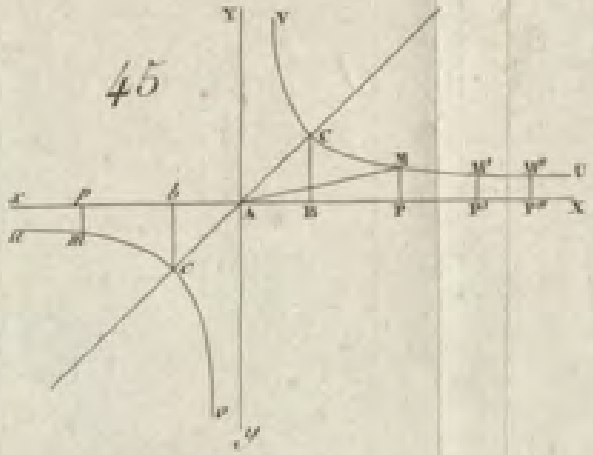
43



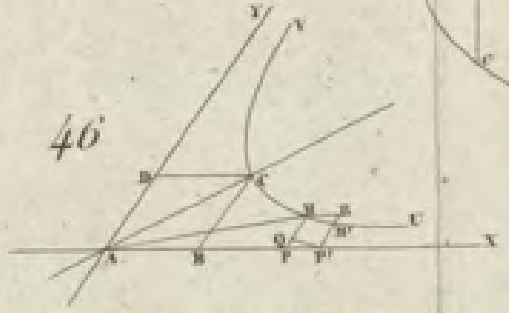
44



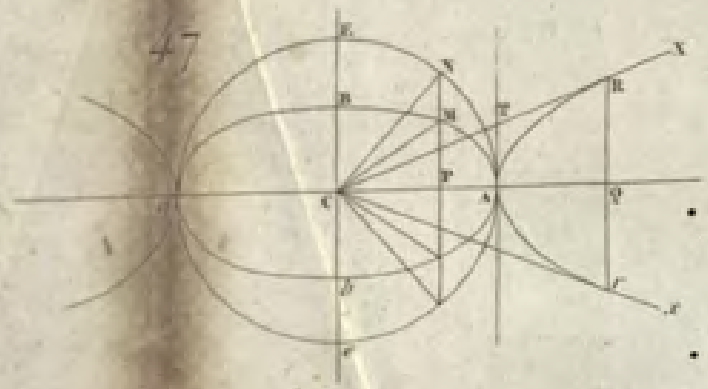
45



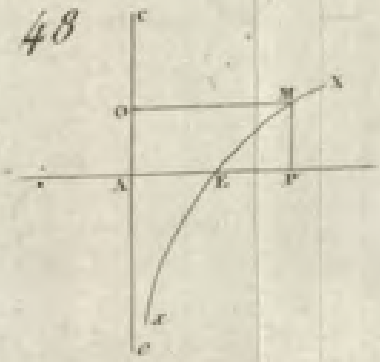
46



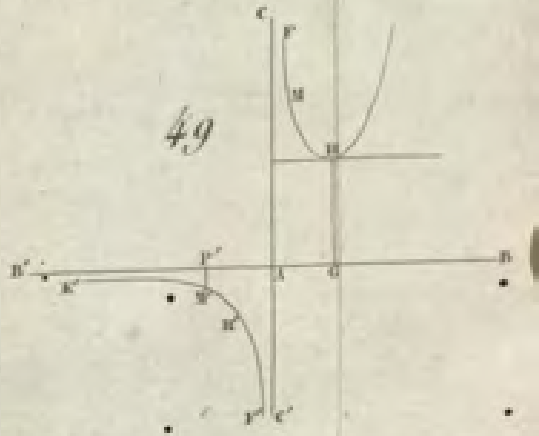
47



48



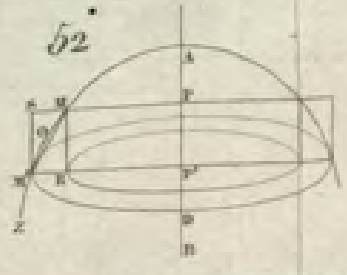
49



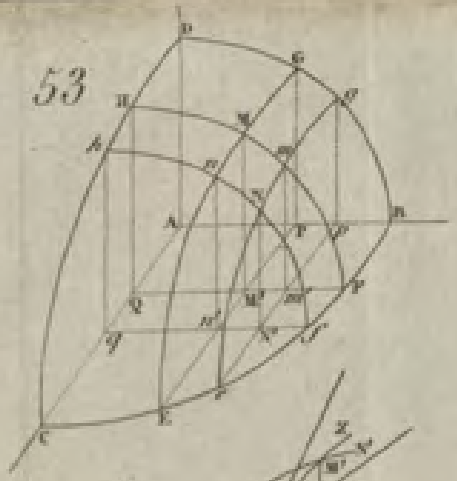
50

51

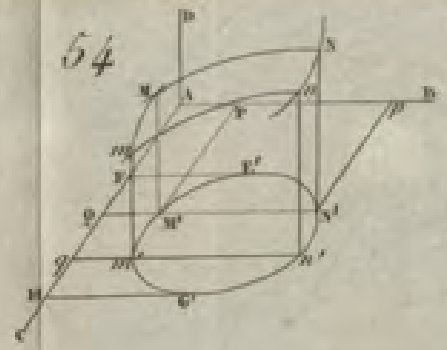
52



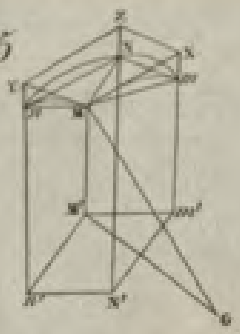
53



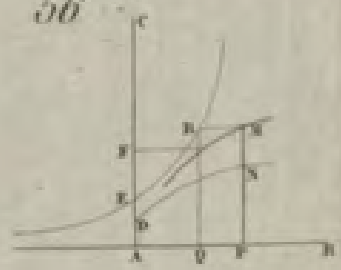
54



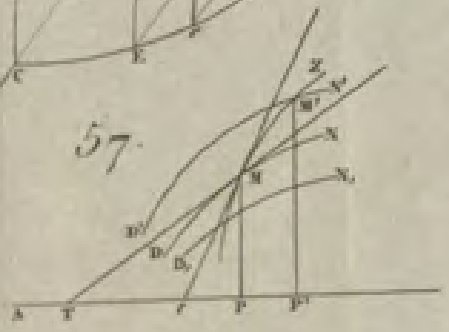
55



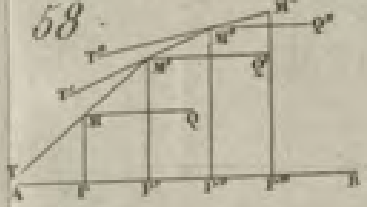
56



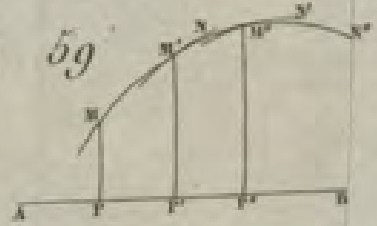
57



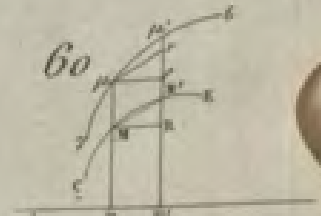
58



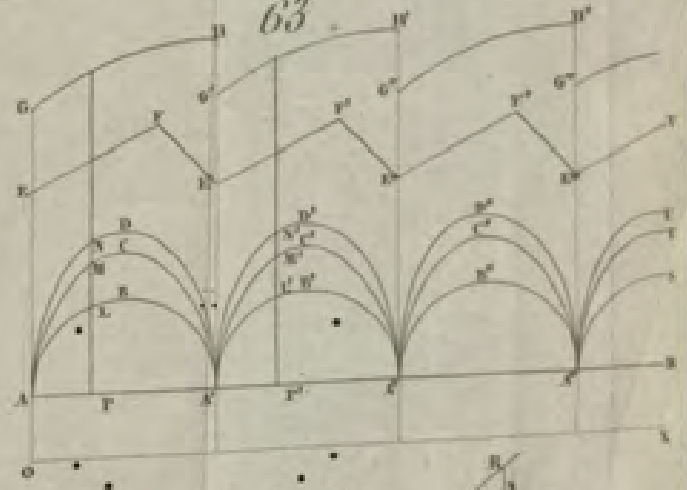
59



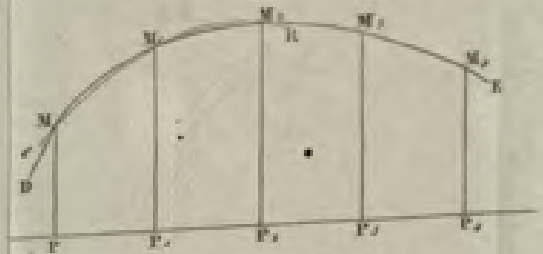
60



63



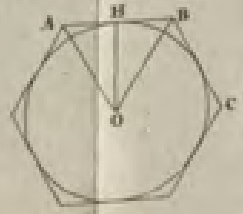
62



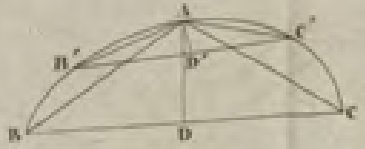
61

64

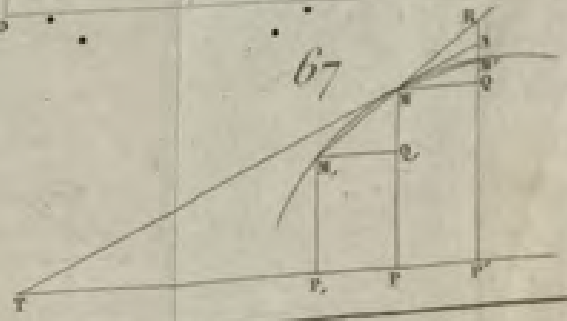
65



66



67



TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE
D'ARITHMÉTIQUE,

A L'USAGE

DE L'ÉCOLE CENTRALE

DES QUATRE-NATIONS;

PAR S. F. LACROIX.

DIX-HUITIÈME ÉDITION
Revue et corrigée.

PARIS,
BACHELIER (SUCCESSEUR DE Mme Ve COURCIER)
LIBRAIRE POUR LES SCIENCES,
QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

BRUXELLES,
A LA LIBRAIRIE PARISIENNE, RUE DE LA MADELEINE, N° 438.

1830.

AVIS DU LIBRAIRE.

Ce Traité est le premier Volume du Cours élémentaire de Mathématiques pures, *de M. Lacroix, Cours qui comprend l'*Arithmétique, *l'*Algèbre, *la* Géométrie, *la* Trigonométrie rectiligne et sphérique, *ainsi que l'*Application de l'Algèbre à la Géométrie. *On trouvera dans les* Essais sur l'Enseignement, *du même Auteur, l'analyse de chacune de ces parties, auxquelles font suite, le* Complément des Élémens d'Algèbre, *le* Complément des Élémens de Géométrie [*ou* Élémens de Géométrie descriptive], *le* Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral, *et le* Traité élémentaire du Calcul des Probabilités.

Tout Exemplaire du présent Traité, qui ne porterait pas, comme ci-dessous, les signatures de l'Auteur et du Libraire, sera contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricateurs et les débitans de ces Exemplaires.

Lacroix. Bachelier

Se vend A BORDEAUX,
Chez GASSIOT, Libraire, Fossés de l'Intendance, n° 6.

De l'Imprim. de HUZARD-COURCIER, rue du Jardinet, n°

TABLE.

NOTIONS générales sur les diverses espèces de grandeurs ou quantités, page 1
De la numération parlée, 2
Moyen de représenter les nombres par des chiffres, ou de la numération écrite, 4
Manière d'énoncer un nombre, 6
Ce que c'est qu'un *nombre abstrait* ou *concret*, 7

De l'Addition, 8

Principes sur lesquels repose l'addition, *ibid.*
Règle générale pour faire l'addition, 10

De la Soustraction, 11

Principes sur lesquels repose la soustraction, *ibid.*
Du sens des mots *reste*, *excès*, *différence*, *ibid.*
Règle générale de la soustraction, 14

De la preuve de l'Addition et de la Soustraction, 15

De la Multiplication, 17

Origine de la multiplication, *ibid.*
Ce que signifient *multiplicande*, *multiplicateur*, *produit*, *facteurs*, 18
Principes sur lesquels repose la multiplication, *ibid.*
Table de Pythagore, contenant les produits qu'il est nécessaire de connaître pour multiplier un nombre par un autre, 19
Formation de cette table, *ibid.*
Remarque, de laquelle on déduit qu'un produit de deux facteurs ne change pas, quel que soit l'ordre des facteurs, 20
Règle pour multiplier un nombre de plusieurs chiffres par un nombre d'un seul chiffre, 23
Comment on multiplie un nombre par 10, 100, etc., 24
Règle pour multiplier par un nombre composé d'un chiffre significatif suivi de plusieurs zéros, 25
Règle générale de la multiplication, 26
Comment on abrège la multiplication quand le multiplicande et le multiplicateur sont terminés par des zéros, 27

De la Division, page 28
Origine de la division, *ibid.*
Principes sur lesquels repose la division, *ibid.*
Ce que signifient *dividende*, *diviseur*, *quotient*, 29
Ce qu'il faut faire lorsque le diviseur a plusieurs chiffres, 33
Règle générale de la division, 36
Moyen d'abréger le calcul, *ibid.*
Ce qu'il faut faire lorsque le dividende et le diviseur sont terminés par des zéros, 37
La division et la multiplication se servent réciproquement de preuve, 38
Des Fractions, *ibid.*
Origine des fractions, 39
Manière d'énoncer et d'écrire les fractions, 40
Ce que signifient *numérateur*, *dénominateur*, 41
Changemens qu'éprouve une fraction lorsqu'on augmente ou qu'on diminue l'un de ses termes, *ibid.*
Tableau représentant les changemens qu'on opère sur une fraction en multipliant ou en divisant l'un de ses termes, 43
Une fraction ne change pas de valeur lorsqu'on multiplie ou qu'on divise ses deux termes par le même nombre, *ibid.*
Moyen de simplifier une fraction sans lui faire changer de valeur, 44
Ce que c'est que le *plus grand commun diviseur de deux nombres*, 46
Règle générale pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres, 48
Caractères auxquels on reconnaît les nombres divisibles par 2, par 5 et par 3, 49
Ce qu'on entend par *nombres premiers*, 51
De l'addition et de la soustraction des fractions, 52
Extraction des entiers d'une fraction, *ibid.*
Réduction d'un entier en fraction, 53
Réduction des fractions au même dénominateur, 54
Un produit composé de plusieurs facteurs ne change pas, dans quelque ordre qu'on multiplie ces facteurs, 55
Additions et soustractions d'entiers joints à des fractions, 57
Ce que signifie en général le mot *multiplier*, 58
Multiplication d'un nombre entier par une fraction, 59
Multiplication d'une fraction par une fraction,
Des fractions de fractions,
Ce que c'est que la *division en général*,
Division d'un nombre entier par une fraction,
Division d'une fraction par une fraction,

Des Fractions décimales, page 64

Origine des fractions décimales, *ibid.*
Manière d'énoncer et d'écrire les décimales, 65
On ne change pas un nombre qui a des chiffres décimaux, en mettant à sa suite un ou plusieurs zéros, 66
Addition des décimales, 67
Soustraction des décimales, 68
Changemens que l'on fait en déplaçant la virgule, 69
Multiplication d'un nombre qui contient des décimales, par un nombre entier, 71
Multiplication d'un nombre décimal par un nombre décimal, 72
Division d'un nombre décimal par un nombre entier, 73
Division d'un nombre décimal par un nombre décimal, *ibid.*
Manière d'approcher du quotient d'une division par les décimales, *ibid.*
Note sur la manière d'évaluer le quotient d'une division en fractions d'une espèce donnée, 74
Réduction des fractions ordinaires en décimales, 75
Note sur la conversion d'une fraction en une autre d'une espèce plus petite, *ibid.*
Des *fractions décimales périodiques*, 76

Exposition du nouveau système métrique, et applications usuelles de l'Arithmétique, 79

Nomenclature des diverses espèces de mesures, 80
Liaison des diverses unités de mesures rapportées à la mesure de longueur, *ibid.*
Note sur la liaison des nouvelles mesures avec les dimensions de la terre, 81
Exemples des questions qui se présentent le plus souvent en Arithmétique, 82

Des Proportions, 85

Questions qui conduisent aux proportions, 86
Ce que c'est qu'un *rapport* ou *raison*, une *proportion*, 88
Un rapport ne change pas lorsqu'on multiplie ou qu'on divise ses deux termes par un même nombre, *ibid.*
Manière d'indiquer qu'il y a proportion entre quatre nombres, 89
Moyen de s'assurer s'il y a proportion entre quatre nombres, et conséquence remarquable qu'on en tire, *ibid*

Permutations qu'on peut faire subir aux termes d'une proportion sans la troubler, page 90
Comment on trouve l'un des quatre termes d'une proportion lorsque les autres sont connus, 91
Ce que c'est que la *règle de trois*, 92
Attention qu'il faut avoir en mettant des nombres en proportion, 93
Ce que c'est qu'une *raison* ou un *rapport inverse*, 94
Règle d'intérêt, 95
Règle d'escompte, *ibid.*
Note sur les deux manières de prendre l'escompte, 96
Règle de trois composée, *ibid.*
Ce que c'est qu'un *rapport composé*, 101

Règle de Société, 101

Diverses autres questions, 103
De l'*équidifférence*, 104
Propriété remarquable de l'équidifférence, 105
Note sur les dénominations de *proportion géométrique*, *proportion arithmétique*, *ibid.*

Règle d'Alliage, 106

De la comparaison des diverses mesures de même genre, 108

Rapports des mesures anciennes aux mesures nouvelles, méthode pour convertir les unes dans les autres, 109
Manière d'évaluer les monnaies ou les Mesures d'un pays par celles de plusieurs autres, ou *règle conjointe*, 113

Du calcul des nombres complexes, 115

Ce que c'est que les *nombres complexes* et les *nombres incomplexes*, *ibid.*

De l'Addition des nombres complexes, 115
De la Soustraction des nombres complexes, 117
De la preuve de l'Addition et de la Soustraction des nombres complexes, 120
De la Multiplication des nombres complexes 121
En les convertissant en fractions,
Multiplication d'un nombre complexe par un nombre incomplexe,

Ce que c'est que des *parties aliquotes*, page 124
Note sur la dénomination de *faux produit*, 125
Procédé pour le cas où le multiplicateur seul est complexe, 126
—— pour le cas où le multiplicande et le multiplicateur sont tous deux complexes, 128
Règle générale, 131
De la Division des nombres complexes, *ibid.*
Lorsque le dividende et le diviseur sont de même espèce, 132
Lorsqu'ils sont d'espèces différentes, et que le diviseur seul est complexe, 134
Lorsque le dividende et le diviseur sont tous deux complexes, 135
De quelques moyens employés pour abréger les calculs arithmétiques, 137
Procédé pour abréger la multiplication et la division des grands nombres, *ibid.*
Procédé pour abréger la multiplication des nombres qui contiennent des décimales, 139
Décomposition d'un nombre dans ses facteurs, 141
Idée des *fractions continues*, 143
Sur l'application de l'Arithmétique à la Banque et au Commerce, 146
COMPARAISON *des anciennes mesures avec les nouvelles*, 149
Caractères usités pour désigner les anciennes mesures, *ibid.*
Tables pour la conversion des mesures anciennes en mesures nouvelles, et réciproquement, 150
Comparaison de quelques mesures étrangères avec les nouvelles mesures françaises, 156
Tableau de comparaison des monnaies étrangères, *ibid.*

FIN DE LA TABLE.

Errata.

Page 129, lignes 5 et 15 en remontant, $\frac{295}{324}$, *lis.* $\frac{280}{324}$ ou $\frac{70}{81}$.

ligne 6, en remontant, $\frac{590}{648}$, *lis.* $\frac{560}{648}$.

Explication des chiffres romains.

Un	I	j
Deux	II	ij
Trois	III	iij
Quatre	IV	iv
Cinq	V	v
Six	VI	vj
Sept	VII	vij
Huit	VIII	viij
Neuf	IX	ix
Dix	X	x
Vingt	XX	xx
Trente	XXX	xxx
Quarante	XL	xl
Cinquante	L	l
Soixante	LX	lx
Soixante-dix	LXX	lxx
Quatre-vingts *	LXXX	lxxx
Quatre-vingt-dix	XC	xc
Cent	C	c
Deux cents	CC	cc
Trois cents	CCC	ccc
Quatre cents	CCCC	cccc
Cinq cents	D ou IↃ	d
Six cents	DC	dc
Sept cents	DCC	dcc
Huit cents	DCCC	dccc
Neuf cents	DCCCC	dcccc
Mille	M ou CIↃ	m
Onze cents	MC	mc
Douze cents	MCC	mcc
Treize cents	MCCC	mccc
Quatorze cents	MCCCC	mcccc
Quinze cents	MD	md

* En Suisse et dans une grande partie de la France, on dit *septante*, *octante*, *nonante*, ce qui est plus régulier.

Observat. *Tout numéro placé entre deux parallèles indique l'article sur lequel s'appuie celui où il est cité; il faut relire le premier, si l'on ne se rappelle pas le rapport qu'il a avec celui qui contient le second.*

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE D'ARITHMÉTIQUE.

De la Numération.

1. La comparaison des divers objets qui tombent sous nos sens, nous fait bientôt apercevoir, dans tous ces objets, un attribut (ou qualité) par lequel on peut les concevoir susceptibles d'augmentation et de diminution : cet attribut est la *grandeur*. Elle se montre en général sous deux formes différentes :

Tantôt comme une collection de plusieurs choses pareilles ou de plusieurs parties séparées; on la désigne alors par le mot *nombre* :

Tantôt comme un seul tout, sans distinction de parties : c'est ainsi que l'on conçoit la distance entre deux points, ou la longueur de la ligne qui va de l'un à l'autre; les contours ou les enveloppes, qui déterminent la figure et l'*étendue* des corps; enfin cette *étendue* elle-même.

Le caractère propre à cette dernière forme de la grandeur, c'est la liaison qu'on envisage dans ses parties ou leur *continuité;* tandis que dans le nombre on considère seulement combien il contient de parties, circonstance à laquelle se rapportait d'abord le mot *quantité* qu'on a ensuite appliqué à la grandeur en général, en observant d'appeler *quantité continue* la grandeur considérée sous la forme continue, pour la distinguer du nombre, qu'on nomme *quantité discrète* ou *discontinue*.

2. Tout ce qui concerne la *grandeur* est l'objet de la science appelée *Mathématiques;* les nombres sont spécialement l'objet de l'*Arithmétique*.

La grandeur continue appartient à la *Géométrie*, qui s'occupe particulièrement des propriétés que présentent les formes des corps par rapport à *l'étendue*.

3. Le nombre étant la collection de plusieurs choses pareilles, ou de plusieurs parties distinctes, mais de l'existence d'une de ces choses ou de ces parties, prise pour terme de comparaison et qu'on appelle alors *unité*.

La manière la plus naturelle de former les nombres, est de joindre d'abord une unité avec une autre, puis encore une autre avec la réunion des précédentes; et en continuant ainsi, on compose des collections d'unités, qu'on exprime par des noms particuliers : l'ensemble de ces noms, qui change d'une langue à une autre, compose la *numération parlée*.

4. Comme rien ne limite la grandeur à laquelle on peut porter le nombre, puisqu'il est toujours possible, quelque grand que soit un nombre, d'y joindre une unité de plus, on conçoit qu'il existe une infinité de nombres différens, et qu'il serait par conséquent impossible de les exprimer, dans quelque langue que ce fût, par des noms isolés ou indépendans les uns des autres.

De là sont nées les nomenclatures, dans lesquelles on a tâché de se procurer, par les combinaisons d'un petit nombre de mots assujettis à des formes régulières et par conséquent faciles à retenir, un grand nombre d'expressions distinctes.

Celles qui sont en usage dans la langue française, se tirent, à quelques expressions près, des noms assignés aux neuf premiers nombres, et de ceux qui expriment ensuite les collections de *dix*, de *cent* et de *mille unités*.

En effet, les unités se comptent par *un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit* et *neuf;*

Les collections de dix unités ou les *dixaines*, par *dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, soixante et dix, quatre-vingt, quatre-vingt-dix* (*);

Les collections de dix dixaines, ou les *centaines*, se comptent avec les noms affectés aux unités. On dit : *cent, deux cents, trois cents,..... neuf cents.*

Les collections de dix centaines, ou les *mille*, se comptent, soit avec les noms affectés aux neuf premiers nombres, soit par dixaines et centaines ; ainsi on dit :

mille, deux mille,.....neuf mille,
dix mille, vingt mille, etc.,
cent mille, deux cent mille, etc.

Les collections de dix centaines de mille, ou de mille fois mille, portent le nom de *millions*, et se comptent comme les mille.

Les collections de dix centaines de millions ou de mille millions, se nomment *billions*, et se comptent comme les millions (**).

Chacune des collections désignées précédemment, est considérée comme formant une *unité d'un ordre de plus en plus élevé*, à mesure qu'on s'éloigne des *unités simples*. On voit aussi que les noms de *dixaine* et de *centaine* se répètent toujours, et qu'il ne s'en introduit de

(*) Pour rendre régulière cette partie de la nomenclature, il faudrait, comme l'a proposé Condorcet, substituer les mots *unante* et *duante* aux mots *dix* et *vingt*, et remplacer, ainsi qu'on le fait encore dans plusieurs parties de la France, les dénominations composées, *soixante et dix, quatre-vingt* et *quatre-vingt-dix*, par les mots *septante, octante* et *nonante*. Il est à propos de remarquer que les premières sont le reste d'une ancienne manière de compter par vingtaines, et d'après laquelle on disait *six-vingt* pour exprimer le nombre *cent-vingt*.

(**) Les billions se nomment *milliards* dans les calculs de finance.

nouveaux, tels que *mille*, *million*, *billion*, que de trois en trois ordres seulement. Suivant cette loi, aux billions on fait succéder les *trillions*, *quatrillions*, *quintillions*, etc., qui ont, comme les billions, leurs unités et leurs centaines.

Les nombres exprimés de cette manière entrent plus d'un mot dans leur énonciation, parce qu'ils sont décomposés en plusieurs des collections, ou classes d'unités, désignées ci-dessus; par exemple, le nombre exprimé par *cinq cent mille trois cent deux*, se trouve décomposé en trois parties, qui sont *cinq centaines de mille*, *trois centaines d'unités simples* et *deux de ces dernières unités*.

5. La longueur de l'expression *en toutes lettres*, des nombres, lorsqu'ils sont un peu grands, a fait imaginer des caractères exclusivement affectés à leur représentation abrégée; et de là est venu l'art d'écrire les nombres par ces caractères appelés *chiffres*, ou la *numération écrite*.

Celle qui est adoptée aujourd'hui, suit une marche à peu près analogue à la numération parlée. D'abord, les neuf premiers nombres y sont représentés chacun par un caractère particulier, savoir :

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Un, *deux*, *trois*, *quatre*, *cinq*, *six*, *sept*, *huit*, *neuf*.

Quand un nombre est composé de dixaines et d'unités, on en écrit successivement, de gauche à droite, les dixaines et les unités, par le caractère affecté à leur nombre. Le nombre *quarante-sept*, par exemple, s'écrit 47 : le premier chiffre à gauche, 4, exprime les quatre dixaines, et a par conséquent une valeur dix fois plus grande que celle qu'il aurait s'il était seul, tandis que le chiffre 7, placé à droite, exprimant des unités, n'a que la valeur qui lui a été d'abord

On voit dans le nombre *trente-trois*, qui s'écrit 33, le chiffre 3 répété deux fois, mais avec des valeurs différentes : *le premier, vers la gauche, a une valeur dix fois plus grande que celui qui est à sa droite.*

C'est là le principe fondamental de notre numération écrite.

Si on voulait exprimer *cinquante*, ou cinq dixaines, comme il n'y a point d'unités dans ce nombre, on n'aurait à écrire que le chiffre 5, et il faudrait par conséquent désigner par une marque particulière, que dans l'expression du nombre, ce chiffre doit occuper la première place à gauche; pour cela, on mettrait à sa droite le caractère o, ou le *zéro*, qui n'a par lui-même aucune valeur, et qui ne sert qu'à remplir la place des collections d'unités qui manquent dans l'énonciation du nombre proposé, et on aurait 50.

6. C'est avec dix caractères seulement, et la convention établie ci-dessus, sur la valeur que les chiffres tirent du rang qu'ils occupent, qu'on parvient à exprimer tous les nombres possibles.

Avec deux chiffres, on peut écrire jusqu'à neuf dixaines et neuf unités, ce qui forme 99, ou *quatre-vingt-dix-neuf*. Après ce nombre vient la centaine, qui se marque par le chiffre 1, plus avancé d'un rang vers la gauche qu'il ne le serait s'il exprimait des dixaines; et pour cela, on met deux zéros à sa droite, ce qui fait 100.

Les unités et les dixaines qu'on ajoutera ensuite pour former les nombres supérieurs à 100, prendront la place qui leur est propre; ainsi *cent un* s'écrira en chiffres 101, *cent onze* s'écrira 111. On voit dans ce nombre le même chiffre répété trois fois avec des valeurs différentes. Au premier rang, en commençant par la droite, il exprime une unité, au second une dixaine, au troi-

sième une centaine. Il en est de même dans les nombres 222, 333, 444, etc. C'est ainsi que, par suite de la convention établie précédemment à l'égard des dixaines et des unités, *un même chiffre exprime des unités dix en dix fois plus grandes, à mesure qu'on l'avance de la droite vers la gauche, et devient, par un simple changement de place, susceptible de représenter successivement les diverses collections d'unités qui doivent entrer dans l'expression d'un nombre.*

7. On écrit donc un nombre sous la dictée, ou d'après son énoncé, en plaçant successivement à côté les uns des autres, en commençant par la gauche, les chiffres qui expriment les nombres d'unités de chaque collection; mais il faut avoir présent à l'esprit l'ordre dans lequel se succèdent ces collections, pour n'en omettre aucune, et remplir par des zéros la place de celles qui manquent dans l'énoncé du nombre à écrire. Si c'était, par exemple, *trois cent vingt-quatre mille neuf cent quatre*, on mettrait 3 pour les centaines de mille, 2 pour les vingt mille ou deux dixaines de mille, 4 pour les mille, 9 pour les centaines; et comme immédiatement après les centaines viennent les dixaines, qui manquent dans le nombre proposé, on mettrait 0 pour en tenir lieu, puis on poserait le chiffre 4 des unités : on aurait de cette manière 324904.

De même, avec l'attention de remplir par des zéros les places des dixaines de mille, des mille et des dixaines, qui manquent dans le nombre *cinq cent mille trois cent deux*, on écrira 500302.

8. Lorsqu'un nombre est écrit en chiffres, pour l'énoncer ou le traduire dans la langue ordinaire, il faut substituer à chacun des chiffres le mot qui le représente, et, d'après la place qu'occupe ce chiffre, dire si

collection à laquelle appartiennent ses unités. L'exemple suivant éclaircira ceci :

24,	897,	521,	580,	346
dixaines de trillions.	centaines de billions.	dixaines de billions.	centaines de millions.	dixaines de millions.	centaines de mille.	dixaines de mille.	centaines.	dixaines.
TRILLIONS.	BILLIONS.	MILLIONS.	MILLE.	UNITÉS.

Les chiffres de ce nombre sont partagés, par des virgules, en groupes, ou *tranches*, de trois en trois, en commençant par la droite ; mais la dernière tranche à gauche, qui, dans l'exemple actuel, n'a que deux chiffres, pourra quelquefois n'en avoir qu'un seul. Chacune de ces tranches répond aux collections désignées par les mots *unité*, *mille*, *million*, *billion*, *trillion*, et ses chiffres en expriment successivement les unités, les dixaines et les centaines. *On forme par conséquent l'expression en toutes lettres du nombre proposé, en énonçant chaque tranche comme si elle était seule, et en ajoutant après ses unités le nom qu'elles portent.*

Dans l'exemple ci-dessus, on lit : *vingt-quatre trillions, huit cent quatre-vingt-dix-sept billions, trois cent vingt-un millions, cinq cent quatre-vingt mille trois cent quarante-six unités.*

9. Les nombres peuvent se considérer de deux manières, savoir : comme je viens de le faire, en ne particularisant point l'espèce de chose ou d'unité à laquelle ils se rapportent, et alors on les appelle *nombres abstraits*, ou bien en désignant l'espèce de leurs unités, comme quand on dit deux hommes, cinq années, trois heures, etc. ; et ce sont alors des *nombres concrets*.

Il est évident que la formation des nombres, par la réunion successive des unités, ne tient point à la nature de ces unités, et qu'il en est de même de toutes les propriétés qui résultent de cette formation, d'après lesquelles on parvient à composer et à décomposer les nombres les uns par les autres, ce qu'on appelle *calculer*. Je vais donc exposer les principes du calcul des nombres, sans avoir égard à la nature de leurs unités.

De l'Addition.

10. Cette opération qui a pour but de réunir plusieurs nombres en un seul, n'est qu'une abréviation de la formation des nombres par la réunion successive des unités. Si, par exemple, à sept on voulait ajouter cinq, il faudrait, dans la suite des noms *un*, *deux*, *trois*, *quatre*, *cinq*, *six*, *sept*, *huit*, etc., assignés aux nombres, s'élever de cinq degrés au-dessus du mot *sept*, et on parviendrait alors au mot *douze*, qui répond par conséquent à la réunion de sept unités avec cinq. C'est sur ce procédé que sont fondées toutes les additions des petits nombres, et dont les résultats sont appris de mémoire. Son application immédiate aux nombres un peu grands serait impraticable; mais alors on les conçoit décomposés dans leurs diverses collections d'unités, pour effectuer séparément la réunion de celles qui portent le même nom. Pour ajouter, par exemple, 27 avec 32, on réunit les 7 unités du premier nombre avec les 2 du second, ce qui en fait 9, puis les 2 dixaines du premier avec les 3 du second, ce qui fait cinq dixaines. L'ensemble de ces deux résultats forme un total de 5 dixaines et 9 unités, ou 59, qui exprime la somme des nombres proposés.

Quelque grands que soient les nombres qu'il faut

ajouter ensemble, on peut leur appliquer ce qui vient d'être dit; mais il faut observer que les sommes partielles, résultantes de l'addition de deux nombres exprimés par un seul chiffre, peuvent souvent produire des dixaines, ou des unités de la collection supérieure, et qui doivent par conséquent être réunies avec celles de cette collection.

Dans l'addition des nombres 49 et 78, la somme des unités 9 et 8 en produit 17, dont il faut réserver 10, ou une dixaine, pour joindre à la somme des dixaines des nombres proposés : on dira donc 4 et 7 font 11, et en y joignant la dixaine réservée, on aura 12 pour la totalité des dixaines contenues dans la somme de ces nombres, qui renfermera, par conséquent, 1 centaine, 2 dixaines et 7 unités, ce qui fera 127.

11. En partant de ces principes, on a trouvé une manière de disposer les nombres à ajouter, qui facilite la réunion de leurs diverses collections d'unités, et on a formé une règle que l'exemple suivant fera suffisamment connaître.

Soient les nombres 527, 2519, 9812, 73 et 8; pour les ajouter ensemble, on commence par les écrire les uns sous les autres, en plaçant les unités de même ordre dans une même colonne, puis on tire un trait pour les séparer du résultat qu'on met au-dessous.

527
2519
9812
73
8

Somme..... 12939.

On fait d'abord la somme des nombres contenus dans la colonne des unités, et comme on trouve 29, on n'écrit que les 9 unités et on retient les 2 dixaines pour les joindre à celles qui sont contenues dans la colonne suivante, qui, par le moyen de cet accroissement, contient 13 unités de son ordre; on n'écrit [illegible] dessous que les 3 unités, et on retient la dixaine pour la joindre à la colonne suivante. On opère [illegible] comme sur la précédente, et on trouve [illegible] encore que les 9 unités, et on retient [illegible] pour la colonne suivante, dont la somme est alors trouvée de 12 unités; on écrit les 2 unités sous cette colonne, et on place la dixaine à la gauche, ce qui revient à écrire la somme de la dernière colonne telle qu'on l'a trouvée. On a par ce moyen 12939, pour la somme des nombres proposés.

12. Le procédé qu'on vient de suivre peut s'énoncer comme il suit: *écrire, les uns sous les autres, les nombres à ajouter, en plaçant leurs unités de même ordre dans une même colonne; souligner le dernier nombre pour le séparer du résultat; ajouter successivement, en commençant par la droite, les nombres contenus dans chaque colonne; si la somme ne surpasse pas 9, l'écrire telle qu'on l'a trouvée, et si elle renferme des dixaines, les retenir pour les joindre à la colonne suivante: enfin à la dernière colonne, écrire la somme trouvée.*

On pourra s'exercer sur les exemples suivans:

7861	66347	4649
345	46742	928
8023	132684	9298
16229	246373	14875

De la Soustraction.

13. Après avoir appris à composer un nombre par l'addition de plusieurs autres, la première question qui se présente est d'ôter un nombre d'un autre qui le surpasse, ou, ce qui revient au même, de décomposer celui-ci en deux parties, dont une soit l'autre nombre donné. Si l'on avait, par exemple, le nombre 9, et qu'on en voulût retrancher 4, il serait, par cette opération, décomposé en deux parties qui le reproduiraient par l'addition.

Pour parvenir à ôter un nombre d'un autre, lorsqu'ils ne sont pas considérables, il faut suivre une marche opposée à celle qu'on a prescrite au commencement du n° 10, pour trouver leur somme, c'est-à-dire que dans la suite des noms assignés aux nombres, on doit, à partir du plus grand de ceux que l'on considère, descendre d'autant de degré qu'il y a d'unités dans le plus petit, et l'on arrivera au nom appliqué à la différence cherchée; c'est ainsi qu'en descendant de quatre degrés au-dessous du mot *neuf*, on parvient à *cinq*, nom qui exprime le nombre qu'il faut ajouter à 4 pour former 9, ou qui marque de combien 9 surpasse 4.

Sous ce dernier point de vue, 5 est l'*excès* de 9 sur 4. Si l'on ne voulait que marquer l'inégalité des nombres 9 et 4, sans fixer l'attention sur l'ordre de leurs grandeurs, on dirait que leur *différence* est 5. Enfin, si l'on faisait l'opération pour ôter 4 de 9, on dirait que le *reste* est 5. On voit que, quoique synonymes, les mots *reste*, *excès*, *différence*, répondent chacun à une manière particulière d'envisager la décomposition du nombre 9 dans les deux parties 4 et 5, opération qu'on désigne toujours par le nom de *soustraction*.

14. Lorsqu'il s'agit de nombres un peu grands, la soustraction s'opère par parties, en retranchant successivement des unités de chaque ordre, marquées dans le plus grand des deux nombres, celles des ordres correspondans, marquées dans le plus petit. Pour le faire commodément, on dispose ces nombres comme 9587 et 345 dans l'exemple ci-dessous :

9587
345
———
Reste..... 9242

et on place au-dessous de chaque colonne l'excès du nombre supérieur sur le nombre inférieur contenu dans cette colonne, en disant :

5 ôtés de 7, reste 2,
4 ôtés de 8, reste 4,
3 ôtés de 5, reste 2,

et posant ensuite le chiffre 9, duquel il n'y a rien à ôter; le reste 9242 marque de combien 9587 surpasse 345.

L'exactitude du procédé qu'on vient de suivre est incontestable, puisqu'en ôtant du plus grand des deux nombres toutes les parties contenues dans le plus petit, on en a évidemment ôté ce plus petit.

15. L'application de ce procédé demande quelques attentions particulières, lorsque quelques-uns des ordres d'unités du nombre à retrancher en contiennent plus que les ordres correspondans de l'autre nombre.

Soit, par exemple, 397 à retrancher de 524;

524
397

Reste..... 127

Dans l'opération figurée ci-dessus, on ne pourra pas ôter immédiatement les unités du nombre inférieur de celles du nombre supérieur; mais le nombre 524, représenté ici par 5 centaines, 2 dixaines et 4 unités, peut être exprimé d'une manière différente, en décomposant quelques-unes des collections d'unités qu'il contient, pour en réunir une partie avec d'autres d'un ordre inférieur. Au lieu des 2 dixaines et 4 unités qui le terminent, on peut substituer par la pensée une dixaine et 14 unités; retranchant alors de ces dernières les 7 unités du nombre inférieur, on écrira au-dessous le reste 7. Par cette nouvelle décomposition, le nombre supérieur ne renferme plus qu'une dixaine, dont on ne saurait par conséquent ôter les 9 du nombre inférieur; mais sur les 5 centaines exprimées dans le nombre supérieur, on peut en prendre 1 pour la joindre avec la dixaine restante, et l'on aura alors 4 centaines et 11 dixaines; retranchant de celles-ci celles du nombre inférieur, il en restera 2. Enfin on ôtera des 4 centaines laissées dans le nombre supérieur, les 3 du nombre inférieur; on écrira le reste 1, et on aura 127 pour le résultat de l'opération proposée.

Cette manière d'opérer consiste, comme on voit, à *emprunter* dans l'ordre supérieur, une unité pour la joindre, suivant sa valeur, à celles de l'ordre sur lequel on opère, en observant ensuite de compter pour une unité de moins, le chiffre supérieur lorsqu'on y arrivera.

16. Quand il manque des ordres d'unités dans le plus grand des deux nombres, c'est-à-dire qu'il y a des zéros entre ses chiffres significatifs, il faut s'avancer jusqu'au premier de ces chiffres, à gauche, pour faire l'emprunt convenable. En voici un exemple :

$$\begin{array}{r} 7002 \\ 3495 \\ \hline \text{Reste......}\ 3507 \end{array}$$

Ne pouvant ôter les 5 unités du nombre inférieur des 2 du nombre supérieur, on retire 10 unités des 7000 marquées par le chiffre 7, il en reste alors 6990, et en joignant les 10 premières au chiffre 2, le nombre supérieur se trouve décomposé en 6990 et 12; retranchant de ce dernier nombre les 5 unités du nombre inférieur, on aura 7 pour les unités du reste.

Cette première opération a laissé dans le nombre supérieur 6990 unités ou 699 dixaines, au lieu de 700 qui sont exprimées par les 3 derniers chiffres à gauche, ce qui remplace par conséquent les deux zéros par des 9, et diminue de l'unité le premier chiffre significatif à gauche. En continuant sur ce pied la soustraction dans les autres colonnes, elle ne souffre aucune difficulté, et l'on trouve le reste écrit au-dessous de l'exemple.

17. En résumant les remarques qu'on a faites dans les deux nos précédens, la règle à suivre pour opérer la soustraction sur deux nombres quelconques, peut s'énoncer ainsi : *placer le plus petit nombre sous le plus grand, de manière que leurs unités de même ordre soient dans une même colonne, souligner le plus petit pour le séparer du résultat; retrancher successivement dans chaque colonne, en commençant par la droite, le nombre inférieur du nombre supérieur quand cela se peut,*

augmenter le chiffre supérieur de 10 *unités ; compter le premier chiffre significatif qui vient après celui-là pour* 1 *unité de moins, et s'il y a des zéros intermédiaires, les regarder comme des* 9.

18. On peut, pour plus de facilité, lorsqu'il faudrait diminuer le chiffre supérieur d'une unité, le compter pour ce qu'il vaut, et joindre cette unité au chiffre inférieur correspondant, qui se trouvant augmenté, conduit, ainsi que cela doit être, à un reste moindre d'une unité, que celui qui résulterait des chiffres écrits. Dans le premier des exemples ci-dessous, après avoir ôté 6 unités de 14, on comptera le 8 inférieur pour un 9, et ainsi des autres.

16844	103034	49812002
9786	69845	18924983
7058	33189	30887019

De la preuve de l'Addition et de la Soustraction.

19. En effectuant une opération, d'après un procédé dont la légitimité est établie sur des principes sûrs, on peut encore commettre quelques erreurs dans les additions ou soustractions partielles dont on cherche le résultat dans sa mémoire ; pour prévenir cet inconvénient, on a recours à une opération inverse de la première, au moyen de laquelle on reconnaît si les résultats de celle-ci sont exacts : c'est ce qu'on appelle faire la *preuve* de l'opération proposée.

Celle de l'addition consiste à retrancher successivement de la somme des nombres ajoutés, toutes les parties de ces nombres ; et si l'opération a été bien faite,

on ne doit trouver aucun reste. Je vais montrer sur l'exemple du n° 11, comment on effectue à la fois toutes les soustractions.

	527
	2519
	9812
	73
	8
Somme.....	12939
	1129

On ajoute d'abord les nombres contenus dans la colonne la plus à gauche, qui renferme ici des mille, et on retranche la somme 11 du nombre 12 qui commence le résultat. On écrit au-dessous la différence 1, produite par la retenue faite sur la colonne des centaines dans l'opération primitive. La somme de la colonne des centaines, prise isolément, ne s'élève plus qu'à 18; si on la retranche des 9 centaines écrites au résultat et jointes au mille provenant de la colonne précédente, à gauche, et considéré comme dix centaines, le reste 1 écrit au-dessous, marquera encore la retenue faite sur la colonne des dixaines. La somme 11 de celle-ci retranchée de 13, laisse pour reste 2 dixaines provenant de la retenue faite sur la colonne des unités. En joignant ces 2 dixaines avec les 9 unités marquées au résultat, on forme le nombre 29, qui doit être précisément la somme de la colonne des unités, sur laquelle aucune autre n'a pu influer; en ajoutant donc de nouveau les nombres contenus dans cette colonne, on doit encore, si l'opération a été bien faite, parvenir au même résultat et n'avoir par conséquent aucun reste. C'est ce qui [illegible] ce que

marque le 0 écrit sous cette colonne. Le procédé que je viens d'expliquer se résume ainsi: *pour faire la preuve de l'addition, il faut ajouter de nouveau, en commençant par la gauche, chacune des colonnes de l'opération; retrancher la somme obtenue en dernier lieu, de celle qui est marquée au-dessous; écrire les restes qu'on trouve et les joindre comme des dixaines à la colonne suivante à droite; si l'opération a été bien faite, il ne doit rien rester à la dernière colonne.*

20. *La preuve de la soustraction se tire immédiatement de ce que le plus petit nombre ajouté avec le reste, compose le plus grand.* Ainsi, pour s'assurer de l'exactitude de la soustraction suivante,

	524
	297
Reste.....	227
	524

on a ajouté au reste le plus petit nombre, et le résultat s'est trouvé, en effet, égal au plus grand.

De la Multiplication.

21. Lorsque les nombres à ajouter entre eux sont égaux, l'addition prend le nom de *multiplication*, parce que la somme est alors composée de l'un de ces nombres *répété autant de fois qu'il y avait de nombres à ajouter*; réciproquement, si l'on veut répéter un nombre plusieurs fois, on y parviendra en ajoutant ce nombre à lui-même autant de fois, moins une, qu'il doit être répété. Par exemple, par l'addition suivante,

$$\begin{array}{r} 16 \\ 16 \\ 16 \\ 16 \\ \hline 64 \end{array}$$

on répète le nombre 16 quatr[illegible] ajouté 3 fois à lui-même.

Répéter un nombre 2 fois, c'e[illegible] c'est le *tripler;* 4 fois, c'est le *qu*[illegible] suite.

22. Une multiplication renferme trois nombres, savoir : celui qu'on répète, et qui s'appelle *multiplicande;* le nombre qui désigne combien de fois on le répète, et qui s'appelle *multiplicateur ;* enfin le résultat de l'opération, qui se nomme *produit*. Le *multiplicande* et le *multiplicateur*, considérés comme concourant ensemble à former le *produit*, sont appelés *facteurs* de ce *produit*. Dans l'exemple ci-dessus, 16 est le *multiplicande*, 4 le *multiplicateur*, 64 le *produit ;* et on voit que 4 et 16 sont des facteurs de 64.

23. Lorsque le multiplicande et le multiplicateur sont de grands nombres, la formation du produit par l'addition répétée du multiplicande prendrait un temps très considérable; on a cherché en conséquence à l'abréger, en la décomposant en un certain nombre d'opérations partielles, faciles à effectuer de mémoire. On répéterait, par exemple, 4 fois le nombre 16, en prenant séparément le même nombre de fois, les 6 unités et la dixaine dont il se compose : il suffit donc de connaître les produits que donnent les nombres d'unités de chaque ordre du multiplicande par le multiplicateur, lorsque ce dernier nombre n'a qu'un seul

chiffre ; et cela revient, pour tous les cas possibles, à trouver le produit de l'un quelconque des 9 premiers nombres par tout autre de ces nombres.

24. Ces produits sont contenus dans la table suivante, attribuée à Pythagore.

TABLE DE PYTHAGORE.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

25. Pour former cette table, on écrit d'abord sur une même ligne les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. On ajoute ensuite chacun de ces nombres à lui-même, et on écrit la somme sur la seconde ligne, qui se trouve composée alors du double de chaque nombre de la première, ou du produit de ce nombre par 2.

On ajoute de même à chacun des nombres de la se-

conde ligne, celui qui lui correspond dans la première, et on dispose les sommes sur une troisième ligne, qui renferme ainsi le triple de chacun des nombres de la première, ou leurs produits par 3. Par [illegible] nombres de la première ligne avec [illegible] on en formera une quatrième qui [illegible] ple de chaque nombre de la [illegible] ce nombre par 4, et ainsi de suite, [illegible] soit parvenu à la neuvième ligne, [illegible] duits des nombres de la première, [illegible] par 9.

Il est à propos de remarquer que les divers produits d'un nombre quelconque, par les nombres 2, 3, 4, 5, etc., se nomment les *multiples* de ce nombre : ainsi 6, 9, 12, 15, etc., sont les multiples de 3.

26. Quand on a bien conçu la formation de cette table, il est facile d'en connaître l'usage. En effet, si l'on demandait, par exemple, le produit de 7 par 5, il faudrait, dans la cinquième ligne qui renferme les divers produits des neuf premiers nombres multipliés par 5, prendre celui qui répond au-dessous de 7 : on trouverait ainsi 35. Il en est de même pour tout autre exemple : *le produit se trouve dans la ligne du multiplicateur, au-dessous du multiplicande.*

27. En cherchant dans la table de Pythagore, le produit de 5 par 7, on trouvera encore comme ci-dessus 35, quoiqu'on ait considéré cette fois 5 comme le multiplicande, et 7 comme le multiplicateur. Cette observation, qu'on peut répéter sur chacun des produits contenus dans la table, est générale ; et *on peut toujours, dans quelque multiplication que ce soit, renverser l'ordre des facteurs, c'est-à-dire prendre le multiplicateur pour multiplicande et le multiplicande pour multiplicateur.*

Comme la table de Pythagore ne renferme qu'un nombre limité de produits, il ne suffirait pas d'avoir vérifié dans cette table la conclusion énoncée plus haut; car on pourrait craindre qu'elle ne fût pas vraie pour des produits plus grands, dont le nombre est illimité : il n'y a qu'un raisonnement indépendant de toute valeur particulière du multiplicande et du multiplicateur, qui puisse montrer que la conclusion dont il s'agit ne souffre aucune exception. En voici un d'autant plus propre à remplir ce but, qu'il offre une image sensible de la manière dont se forme le produit de deux nombres. Pour le faire mieux concevoir, je l'appliquerai d'abord aux nombres 5 et 3.

Si l'on écrit sur une même ligne 5 fois le chiffre 1, et qu'on place deux lignes semblables au-dessous de la première, comme on le voit plus bas,

1, 1, 1, 1, 1
1, 1, 1, 1, 1
1, 1, 1, 1, 1,

le nombre total des chiffres 1 sera composé d'autant de fois 5 qu'il y a de lignes, c'est-à-dire de 3 fois 5; mais par la disposition de ces lignes, les chiffres 1 sont rangés en colonnes qui en contiennent 3; en les comptant de cette manière, on trouve autant de fois 3 unités qu'il y a de colonnes, ou 5 fois 3 unités, et le résultat ne dépendant point de la manière de compter, il s'ensuit que 3 fois 5, et 5 fois 3 donnent le même produit. Il est facile d'étendre ce raisonnement à des nombres quelconques, en concevant que chaque ligne contienne autant d'unités qu'il y en a dans le multiplicande, et qu'on ait placé les unes sous les autres, un nombre de lignes égal au multiplicateur. En comptant alors le produit par lignes, il résulte du multipli-

cande répété autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur; mais l'assemblage des chiffres ainsi présente autant de colonnes qu'il y a d'unités dans une ligne, et chaque colonne contient autant d'unités qu'il y a de lignes : si donc on veut compter par colonnes, on répétera le nombre de lignes, ou le multiplicateur, autant de fois qu'il y a d'unités dans une ligne, c'est-à-dire autant de fois que le nombre du multiplicande. Il est par conséquent permis dans la formation du produit de deux nombres quelconques de prendre pour multiplicateur celui de ces nombres qu'on voudra.

28. Le raisonnement que je viens de rapporter pour prouver la vérité de la proposition précédente, en est la *démonstration;* et il faut bien remarquer que ce qui constitue l'essence de la méthode suivie dans les Mathématiques pures, c'est qu'on n'y admet aucune proposition ou aucun procédé qui ne soit la conséquence nécessaire des premières notions sur lesquelles on s'est appuyé, ou dont la vérité ne soit établie en général, d'après des raisonnemens indépendans des exemples particuliers, qui ne peuvent jamais former de preuve, et qui ne servent qu'à faciliter au lecteur l'intelligence des raisonnemens, ou la pratique des règles.

29. Connaissant tous les produits que donnent les 9 premiers nombres, combinés entre eux, on peut, suivant la remarque du n° 23, multiplier un nombre quelconque par un nombre d'un seul chiffre, en formant successivement le produit des unités de chaque ordre du multiplicande, par le multiplicateur; et l'opération se dispose de la manière suivante :

526
7

Le produit des unités 6 du multiplicande par le multiplicateur 7, étant 42, on n'écrit que les 2 unités et on retient les 4 dixaines pour les joindre à celles qu'on trouvera plus loin.

Le produit des dixaines 2 du multiplicande par le multiplicateur 7, est 14, et en y ajoutant les 4 dixaines retenues précédemment, on forme le nombre 18, dont on n'écrit encore que les unités, en retenant la dixaine pour l'opération suivante.

Le produit des centaines 5 du multiplicande par le multiplicateur 7, est 35; augmenté de la retenue 1 faite précédemment, il devient 36, et s'écrit tout entier, parce qu'il n'y a plus de chiffres au multiplicande.

30. Ce procédé s'énonce ainsi : *Pour multiplier un nombre composé de plusieurs chiffres par un nombre d'un seul, on place le multiplicateur sous les unités du multiplicande, on tire un trait au-dessous de ces nombres pour les séparer du produit; on multiplie successivement, en commençant par la droite, les unités de chaque ordre du multiplicande, par le multiplicateur; on écrit le produit tout entier lorsqu'il ne passe pas 9, mais s'il renferme des dixaines, on les retient pour les joindre au produit suivant, et on continue ainsi jusqu'au dernier chiffre à gauche du multiplicande, dont on écrit le résultat tel qu'il se trouve.*

Il est évident que lorsque le multiplicande est terminé par des 0, l'opération ne doit commencer qu'au premier chiffre significatif de ce nombre, mais que pour donner au produit la valeur qu'il doit avoir, il faut mettre à sa droite autant de 0 qu'il s'en trouve à celle du multiplicande. A l'égard des 0 qui seraient placés entre les chiffres du multiplicande, ils ne donnent aucun produit,

et l'on doit par conséquent mettre un 0, lorsqu'on n'a rien retenu du produit précédent.

Voici quelques exemples pour exercer le lecteur :

956	8200	7012	80970
6	9	5	4
5736	73800	35060	323880

31. Les nombres les plus simples, exprimés par plusieurs chiffres, étant 10, 100, 1000, etc., il faut d'abord chercher comment on peut multiplier par chacun de ces nombres, un nombre quelconque. Or en se rappelant la convention établie dans le n° 6, d'après laquelle le même chiffre prend une valeur de 10 en 10 fois plus grande à mesure qu'on l'avance vers la gauche, on concevra que pour multiplier un nombre quelconque par 10, il faut rendre dix fois plus grande chacune des collections d'unités dont il se compose, c'est-à-dire, changer les unités en dixaines, les dixaines en centaines, et ainsi de suite, et qu'on opère cet effet, en plaçant un 0 à la droite du nombre proposé, puisque tous ses chiffres significatifs se trouveront avancés d'un rang vers la gauche.

Par la même raison, on multiplierait par 100 un nombre quelconque, en plaçant à sa droite deux zéros, puisque par le premier zéro le nombre devenant 10 fois plus grand qu'il n'était d'abord, deviendrait encore 10 fois plus grand par le second zéro, et serait par conséquent 10 fois 10, ou 100 fois plus grand qu'il n'était en premier lieu.

En continuant ce raisonnement, on verra que, d'après notre système de numération, on multiplie un nombre par 10, 100, 1000, etc., en écrivant à la droite

du multiplicande, autant de zéros qu'il y en a dans le multiplicateur, à la droite de l'unité.

32. Lorsque le chiffre significatif du multiplicateur est différent de l'unité, qu'il s'agit, par exemple, de multiplier par 30, ou par 300, ou par 3000, qui ne sont autre chose que 10 fois 3, ou 100 fois 3, ou 1000 fois 3, etc., l'opération se décompose en deux autres; on multiplie d'abord par le chiffre significatif 3, suivant la règle du n° 30, et ensuite on multiplie le produit par 10, 100 ou 1000, etc. (comme il vient d'être dit dans le n° précédent), en écrivant un, deux, trois, etc., zéros à la droite de ce produit.

Soit, par exemple, 764 à multiplier par 300.

764
300

Produit..... 229200

Les 4 chiffres significatifs de ce produit résultent de la multiplication de 764 par 3; on les recule de deux rangs vers la gauche, pour placer les deux zéros qui terminent le multiplicateur.

En général, *lorsque le multiplicateur sera suivi d'un nombre quelconque de zéros, on multipliera d'abord le multiplicande par le chiffre significatif du multiplicateur, et on placera à la suite du produit, autant de zéros qu'il y en a dans le multiplicateur.*

33. Les règles précédentes s'appliquent au cas où le multiplicateur est quelconque, en considérant à part chacune des collections d'unités dont il est composé. Multiplier, par exemple, 793 par 345, ou, ce qui revient au même, répéter 345 fois le nombre 793, c'est prendre 793, 5 fois, plus 40 fois, plus 300 fois, et

l'opération à faire se trouve décomposée en trois autres dans lesquelles les multiplicateurs 5, 40 et 300, n'ont qu'un chiffre significatif.

Pour réunir facilement le résultat de ces trois opérations, on dispose le calcul comme il suit :

$$\begin{array}{r} 793 \\ 345 \\ \hline 3965 \\ 31720 \\ 237900 \\ \hline 273585 \end{array}$$

On multiplie successivement le multiplicande par les unités, les dixaines, les centaines, etc., du multiplicateur, en observant de placer un zéro à la droite du produit partiel, donné par les dixaines du multiplicateur, et deux zéros à la droite du produit donné par les centaines ; ce qui avance le premier de ces produits d'un rang vers la gauche, et le second de deux. On fait ensuite l'addition des trois produits partiels pour obtenir le produit total des nombres proposés.

Les zéros mis à la suite des produits partiels ne comptant pour rien dans cette addition, on peut se dispenser de les écrire, pourvu qu'on ait soin de placer au rang qu'il doit occuper, le premier chiffre du produit donné par chaque chiffre significatif du multiplicateur, c'est-à-dire au rang des dixaines, le produit donné par les dixaines du multiplicateur; au rang des centaines, le produit donné par les centaines du multiplicateur, et ainsi de suite.

34. D'après ce qui précède, on énonce la règle suivante : *Pour multiplier deux nombres quelconques,*

l'un par l'autre, on forme successivement (selon la règle du n° 30) *les produits du multiplicande par les divers ordres d'unités du multiplicateur, en observant de placer le premier chiffre de chaque produit partiel, sous les unités de l'ordre dont est le chiffre du multiplicateur qui donne ce produit; et on ajoute ensuite tous les produits partiels.*

35. Lorsque le multiplicande est terminé par des zéros, on peut les négliger d'abord, et commencer toutes les multiplications partielles au premier chiffre significatif du multiplicande; mais pour replacer ensuite au rang qui leur convient les chiffres du produit total, il faut écrire à la droite de ce produit, autant de zéros qu'il y en avait à celle du multiplicande.

Si le multiplicateur était terminé par un ou plusieurs zéros, la remarque du n° 32 permettrait de négliger encore ceux-ci, pourvu que l'on en écrivît un pareil nombre à la droite du produit.

Il résulte de là, que, *lorsque le multiplicande et le multiplicateur sont terminés par des zéros, on ne s'occupe d'abord que des chiffres significatifs, et on met à la droite du produit obtenu d'après ces chiffres, autant de zéros qu'il y en avait, tant dans le multiplicande que dans le multiplicateur.*

Lorsqu'il y a des zéros entre les chiffres significatifs du multiplicateur, comme ils ne donnent aucun produit, on les passe en observant de placer dans le rang qui leur convient, les unités du produit résultant du chiffre significatif écrit à la gauche de ces zéros.

Le lecteur pourra s'exercer sur ces exemples :

300	526	9648
40	307	5137
12000	3682	67536
	157800	289440
	161482	964800
		48240000
		49561776

De la Division.

36. Le produit de deux nombres étant formé de l'un de ces nombres répété autant de fois qu'il y a d'unités dans l'autre (21), on peut revenir d'un produit quelconque à l'un de ses facteurs, en cherchant combien de fois ce produit contient son autre facteur : la soustraction seule suffit pour cette recherche. En effet, si l'on voulait savoir combien de fois 64 contient 16, il n'y aurait qu'à retrancher 16 de 64 autant de fois que la chose serait possible ; et comme après quatre soustractions il ne resterait rien, on en conclurait que le nombre 16 est contenu 4 fois dans 64. Cette manière de décomposer un nombre par un autre, pour savoir combien il contient cet autre, se nomme *division*, parce qu'elle sert à diviser ou à partager un nombre donné en parties égales, dont le nombre ou la valeur sont donnés.

Si l'on avait, par exemple, à diviser 64 en 4 parties égales ; pour trouver la valeur de ces parties, il faudrait chercher le nombre qui est contenu 4 fois dans 64, et par conséquent regarder 64 comme un produit ayant pour facteurs 4 et l'une des parties cherchées, qui est ici 16. Si l'on demandait de combien de parties égales à

16 le nombre 64 est composé, il faudrait, pour connaître le nombre de ces parties, chercher combien de fois 64 contient 16, et par conséquent on devrait regarder 64 comme un produit dont un des facteurs serait 16, et l'autre le nombre cherché, qui est ici 4.

Quel que soit donc celui de ses usages que l'on ait en vue, *la division revient à trouver l'un des facteurs d'un produit donné, lorsqu'on connaît l'autre facteur.*

37. Le nombre qu'il faut diviser se nomme *dividende;* le facteur connu, et par lequel on doit diviser, se nomme *diviseur;* le facteur inconnu que l'on trouve par la division, se nomme *quotient*, et indique toujours combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende.

Il suit de ce qui vient d'être dit, que *le diviseur multiplié par le quotient, doit reproduire le dividende.*

38. Lorsque le dividende peut contenir un grand nombre de fois le diviseur, il n'est guère praticable d'employer la soustraction répétée pour parvenir au quotient; il faut alors recourir à une abréviation analogue à celle qu'on a donnée pour la multiplication. Si le dividende n'est pas 10 fois plus grand que le diviseur, ce qu'on peut voir à la seule inspection de ces nombres, et si le diviseur n'a qu'un seul chiffre, on trouvera le quotient par la table de Pythagore, puisqu'elle renferme tous les produits dont les facteurs n'ont qu'un chiffre. Si l'on demandait, par exemple, combien de fois 56 contient 8, il faudrait descendre dans la 8ème colonne, jusqu'à la ligne où se trouve 56; le chiffre 7, placé à la tête de cette ligne, indique le second fac-

teur du nombre 56, ou combien de fois ce nombre contient 8.

On voit par cette même table, qu'il y a des nombres qui ne peuvent être exactement divisés par d'autres. Par exemple, la septième ligne qui contient tous les multiples de 7, ne renfermant pas le nombre 40, il en résulte qu'il n'est pas divisible par 7; mais comme il est compris entre 35 et 42, on voit que le plus grand multiple de 7 qu'il puisse contenir, est 35, dont les facteurs sont 5 et 7. Avec ces élémens, et par les considérations que je vais exposer, on peut effectuer une division quelconque.

39. Soit, par exemple, à diviser 1656 par 3; on peut changer la question en cette autre: *Trouver un nombre tel, qu'en multipliant ses unités, dixaines, centaines, etc., par* 3, *on obtienne pour produit les unités, dixaines, centaines, etc., du dividende* 1656.

Il est visible que ce nombre n'aura pas d'unités d'un ordre plus élevé que les mille; car s'il avait seulement des dixaines de mille, on aurait aussi des dixaines de mille au produit, et c'est ce qui n'a pas lieu. Il n'aura pas non plus d'unités de l'ordre des mille; car s'il en avait seulement une, le produit en contiendrait au moins 3, et c'est encore ce qui n'a pas lieu.

Ceci montre que le mille qui se trouve au dividende est une retenue que l'on obtient quand on multiplie par le diviseur 3, les centaines du quotient.

Cela posé, le chiffre des centaines du quotient cherché doit être tel, qu'en multipliant le nombre qu'il exprime par 3, on ait pour produit 16, ou seulement le plus grand multiple de 3 qui soit contenu dans 16, à cause des retenues qu'a pu fournir la multiplication des autres chiffres du quotient par le diviseur, retenues qui ont dû se réunir au produit des centaines.

Le nombre qui remplit cette condition est 5; mais 5 centaines multipliées par 3 donnent 15 centaines, et le dividende 1656 en contient 16 : la différence 1 centaine provient donc des retenues résultant de la multiplication des autres chiffres du quotient par le diviseur. Si maintenant on retranche le produit partiel 15 centaines, ou 1500, du produit total 1656, le reste 156 contiendra les produits des unités et des dixaines du quotient par le diviseur; et tout se réduira à trouver un nombre qui, multiplié par 3, donne 156, question précisément semblable à celle qui s'est présentée d'abord. Ainsi, lorsqu'on aura trouvé le premier chiffre du quotient dans cette dernière, comme on l'a fait dans la précédente, on multipliera le nombre qu'il exprime, par le diviseur; et retranchant ce produit partiel du produit total, on aura pour résultat un nouveau dividende, sur lequel on opérera comme sur le précédent, et ainsi de suite jusqu'à ce que le dividende primitif soit épuisé.

40. L'opération que je viens de décrire se dispose comme on la voit ci-dessous :

divid. 1656	3 divis.
15	552 quot.
15	
15	
06	
6	
0	

Le dividende et le diviseur sont séparés par un trait; on en tire un autre sous le diviseur pour marquer la place du quotient : cela fait, on prend sur la gauche du

dividende la partie 16, capable de contenir le diviseur 3, et en la divisant par ce nombre, on a 5 pour le premier chiffre à gauche du quotient; formant ensuite le produit du diviseur par le nombre qu'on vient de trouver, et le retranchant du dividende partiel 16, on écrit au-dessous le reste 1, à côté duquel on abaisse les dixaines 5 du dividende. Considérant ce dernier nombre comme un second dividende partiel, on le divise encore par le diviseur 3, et on obtient 5 pour le second chiffre du quotient; on fait le produit de ce nombre par le diviseur, qu'on retranche du dividende partiel, et l'on a o pour reste. On abaisse enfin le dernier chiffre du dividende 6, on divise ce troisième dividende partiel par le diviseur 3, et on a 2 pour le dernier chiffre du quotient.

41. Il est évident que si l'on trouvait un dividende partiel qui ne contînt pas le diviseur, ce ne pourrait être que parce que le quotient n'a pas d'unités de l'ordre de ce dividende, et que celles que ce même dividende renferme, viennent des produits du diviseur par les unités des ordres inférieurs du quotient : il faut donc, quand cela arrive, mettre un o au quotient, pour remplir la place de l'ordre d'unités qui manque.

Exemple : soit

1535	5
15	307
035	
35	
00	

La division des 15 centaines du dividende par le diviseur, ne laissant aucun reste, les dixaines 3 qui for-

ment le second dividende partiel, ne peuvent contenir le diviseur. Il en résulte que le quotient ne doit point avoir de dixaines, et qu'il faut par conséquent en remplir la place par un 0, pour donner au premier chiffre du quotient la valeur qu'il doit avoir par rapport aux autres; puis abaissant le dernier chiffre du dividende, on forme un troisième dividende partiel, qui, divisé par 5, donne 7 pour les unités du quotient, et ce nombre est 307.

42. Les considérations exposées dans le n° 40, s'appliquent également aux cas où le diviseur contient un nombre quelconque de chiffres.

S'il s'agissait, par exemple, de diviser 57981 par 251, on verrait facilement que le quotient n'a pas de chiffres au-delà des centaines, puisque s'il avait seulement des mille, le dividende contiendrait des centaines de mille, ce qui n'a pas lieu; de plus, ce chiffre des centaines devrait être tel, que, multiplié par 251, il donnât pour produit 579, ou le plus grand multiple de 251, qui soit contenu dans 579 : l'excès de ce dernier provenant alors des retenues qu'a fournies la multiplication des autres chiffres du quotient par le diviseur. Le nombre qui vérifie cette condition est 2; mais 2 centaines multipliées par 251 font 502 centaines, et le dividende en contient 579; la différence 77 centaines provient donc des retenues résultantes de la multiplication des unités et dixaines du quotient, par le diviseur.

Si maintenant on retranche le produit partiel 502 centaines, ou 50200, du produit total 57981, le reste 7781 contiendra les produits des unités et des dixaines du quotient par le diviseur; et tout se réduira encore à trouver un nombre qui, multiplié par 251, donne pour produit 7781. Ainsi, lorsqu'on aura déterminé le premier chiffre du quotient, on multipliera le nombre

qu'il exprime par le diviseur ; et retranchant le produit partiel du produit total, on aura pour résultat un nouveau dividende, sur lequel on opérera comme sur le précédent, et ainsi de suite jusqu'à ce que le dividende soit épuisé.

Quant au dividende partiel qui doit donner le premier chiffre du quotient, il se forme toujours en séparant, sur la gauche du dividende total, assez de chiffres pour que le nombre qu'ils expriment, considéré comme représentant des unités simples, puisse contenir le diviseur.

43. En disposant l'opération comme précédemment, les calculs que l'on vient d'indiquer s'exécutent dans l'ordre suivant :

57981	251
502	231
778	
753	
251	
251	
000	

On prend les 3 premiers chiffres à gauche du dividende, pour former le premier dividende partiel ; on le divise par le diviseur ; on écrit au quotient le nombre 2 qui en résulte ; on multiplie le diviseur par ce nombre ; on écrit le produit 502, sous le dividende partiel 579. La soustraction étant faite, on abaisse à côté du reste 77, les dixaines 8 du dividende ; on divise ce nouveau dividende partiel par le diviseur ; on obtient 3 pour le second chiffre du quotient ; on multiplie le diviseur par ce nombre ; on retranche le produit du dividende partiel correspondant, et à côté du reste 25, on abaisse le dernier chiffre 1 du dividende ; ce dernier

dividende partiel 251, étant égal au diviseur, donne 1 pour les unités du quotient.

44. Lorsque le diviseur renferme plusieurs chiffres, on peut trouver quelque difficulté à reconnaître combien de fois ce nombre est contenu dans les dividendes partiels. L'exemple suivant est destiné à montrer comment on y parvient.

423405	485
3880	873
3540	
3395	
1455	
1455	
0000	

Il faut d'abord prendre quatre chiffres sur la gauche du dividende, pour former un nombre qui puisse renfermer le diviseur; et alors on ne voit pas tout de suite combien de fois 4234 peut contenir 485. Pour s'aider dans cette recherche, on observera que ce diviseur est compris entre 400 et 500; et que s'il était exactement l'un ou l'autre de ces nombres, la question serait réduite à trouver combien de fois 4 centaines ou 5 centaines sont contenues dans les 42 centaines du nombre 4234, ou bien, ce qui revient au même, combien de fois les nombres 4 ou 5 sont contenus dans 42. On a, pour le premier, 10, et pour le second, 8; c'est donc entre ceux-ci que se trouve le quotient cherché. On voit d'abord qu'il n'est pas possible d'employer 10, parce que cela supposerait que les unités de l'ordre supérieur aux centaines du dividende, peuvent contenir le diviseur, ce qui n'est pas; il ne reste donc qu'à essayer lequel des deux nombres 9 ou 8, employé comme multiplicateur de 485, donne un produit qu'on puisse

retrancher de 4234, et on trouve que c'est 8 : c'est donc là le premier chiffre du quotient. En retranchant du dividende partiel le produit du diviseur multiplié par 8, on a pour reste 354 ; abaissant ensuite le o des dixaines du dividende, on forme un second dividende partiel, sur lequel on opère comme sur le précédent, et ainsi des autres.

45. Le résumé des articles précédens nous offre cette règle : *Pour diviser un nombre par un autre, on place le diviseur à la droite du dividende ; on les sépare par un trait et on en tire un autre sous le diviseur, pour marquer la place du quotient. On prend sur la gauche du dividende autant de chiffres qu'il en faut pour contenir le diviseur ; on cherche combien de fois le nombre exprimé par le premier chiffre du diviseur est contenu dans celui que représentent le premier ou les deux premiers chiffres du dividende partiel ; on multiplie ce quotient, qui n'est qu'approché, par le diviseur ; et si le produit est plus fort que le dividende partiel, on ôte successivement autant d'unités du quotient qu'il est nécessaire pour obtenir un produit qui puisse se retrancher du dividende partiel ; on fait la soustraction, et s'il restait plus que le diviseur, ce serait alors une preuve que le quotient a été trop diminué ; on l'augmenterait en conséquence. A côté du reste, on abaisse le chiffre suivant du dividende ; on cherche, comme précédemment, combien de fois ce dividende partiel contient le diviseur ; on écrit au quotient le nombre trouvé, qu'on multiplie par le diviseur, pour retrancher le produit du dividende partiel ; on continue ainsi jusqu'à ce qu'on ait abaissé tous les chiffres du dividende proposé. Lorsqu'on rencontre un dividende partiel qui ne contient pas le diviseur, il faut, avant d'abaisser un nouveau chiffre du dividende, poser un zéro au quotient.*

46. On resserre dans un plus petit espace les opéra-

tions qu'exige la division, en effectuant de mémoire la soustraction des produits du diviseur par chaque chiffre du quotient, comme on va le voir dans l'exemple ci-dessous :

1755	39
195	45
000	

Après avoir trouvé que le premier dividende partiel 175 contient 4 fois le diviseur 39, on multiplie d'abord ses 9 unités par 4, ce qui donne 36; et pour retrancher ce produit des unités du dividende partiel, on ajoute aux 5 unités qu'il contient, 4 dixaines, ce qui fait 45; d'où retranchant 36, il reste 9. On retient ensuite les 4 dixaines pour les joindre par la pensée au produit 12 du quotient par les dixaines du diviseur, ce qui fait 16; et en le retranchant de 17, on ôte les 4 dixaines dont on avait augmenté les unités du dividende, pour rendre possible la soustraction précédente. On opère de même sur le second dividende partiel 195, en disant: 5 fois 9 font 45, ôtés de 45, reste zéro, puis 5 fois 3 font 15 et 4 dixaines de retenue font 19, ôtés de 19, reste zéro.

On voit suffisamment par là, comment on se conduirait sur tout autre exemple, quelque compliqué qu'il fût.

47. La division s'abrège encore lorsque le dividende et le diviseur sont terminés par plusieurs zéros, parce qu'on peut en supprimer, à la suite de chacun de ces nombres, autant qu'il y en a dans celui qui en contient le moins.

Si l'on avait, par exemple, 84000 à diviser par 400, on réduirait ces nombres à 840 et à 4; le quotient ne serait pas altéré; car on n'aurait fait que changer le nom des unités, puisqu'au lieu de 84000 ou de 840

centaines, et de 400 ou de 4 centaines, on aurait 840 unités et 4 unités, et le quotient des nombres 840 et 4 demeure toujours le même, quelle que soit l'espèce de leurs unités.

Il faut remarquer aussi qu'en supprimant deux zéros à la suite des nombres proposés, on les a divisés en même temps l'un et l'autre par 100 ; car il suit du numéro 31, qu'en effaçant 1, ou 2, ou 3 zéros à la droite d'un nombre quelconque, on le divise par 10 ou par 100, ou par 1000, et ainsi de suite.

Voici quelques exemples de division :

144	3		16512	344		3049164	6274
24	48		2752	48		53956	486
00			0000			37644	
						00000	

48. La division et la multiplication se servent réciproquement de preuve, comme la soustraction et l'addition, puisque d'après la définition de la division (36), on doit, en divisant un produit par un de ses facteurs, trouver l'autre, et qu'en multipliant le diviseur par le quotient, on doit reproduire le dividende (37).

Des Fractions.

49. La division ne peut pas toujours s'effectuer exactement, parce qu'un nombre quelconque d'unités ne se compose pas d'un autre nombre quelconque d'unités, pris un certain nombre de fois. On en a déjà vu des exemples dans la table de Pythagore, qui ne renferme que les produits des neuf premiers nombres, multipliés deux à deux, et qui ne contient pas tous les nombres compris entre 1 et 81, le premier et le dernier de ceux qu'on y a inscrits. La méthode exposée ci-dessus ne conduit alors qu'à trouver le plus grand multiple du diviseur que puisse contenir le dividende.

Si l'on divisait 239 par 8, en suivant la règle du numéro 46,

239	8
79	29
7	

comme le montre l'opération ci-dessus, on aurait pour dernier dividende partiel le nombre 79, qui ne contient pas 8 exactement, mais qui, tombant entre les nombres 72 et 80, dont l'un contient 9 fois, et l'autre 10 fois, le diviseur 8, fait voir que la dernière partie du quotient est plus grande que 9, et moindre que 10, et que par conséquent le quotient total est entre 29 et 30. Faisant donc le produit des 9 unités du quotient par le diviseur 8, et le retranchant du dernier dividende partiel 79, le reste 7 sera évidemment l'excès du dividende 239 sur le produit des facteurs 29 et 8. En effet, ayant, par les diverses parties de l'opération, retranché successivement du dividende 239, le produit de chaque chiffre du quotient par le diviseur, on a évidemment soustrait le produit du quotient entier par le diviseur, ou 232; et le reste 7, moindre que le diviseur, prouve que 232 est le plus grand multiple de 8 que peut contenir 239.

50. Il est bon de se rappeler que, d'après ce qui vient d'être dit, pour reproduire un dividende quelconque, il faut ajouter au produit du diviseur par le quotient, le reste qu'a laissé la division, lorsqu'elle n'a pu se faire exactement.

51. Si l'on voulait réellement partager en huit parties égales une grandeur, d'espèce quelconque, composée de 239 unités, on ne le pourrait pas sans y mettre des portions d'unités ou des *fractions*. En effet, lorsqu'on aurait ôté du nombre 239 les 8 fois 29 unités qu'il conteint, il resterait 7 unités à partager en 8 parties; pour y parvenir, on pourrait diviser, l'une après l'autre,

toutes ces unités en 8 parties, puis prendre une partie sur chaque unité, ce qui donnerait 7 parties qu'il faudrait joindre aux 29 unités entières, pour former la huitième partie de 239, ou le quotient exact de la division de ce nombre par 8.

Le même raisonnement pourrait se faire sur toute autre division qui laisserait un reste; et, dans ce cas, le quotient se compose de deux parties; l'une est formée d'unités entières, tandis que l'autre ne peut s'obtenir qu'après qu'on a réellement effectué le partage des unités concrètes ou matérielles du reste, dans le nombre de parties marquées par le diviseur : jusque-là on ne fait que l'indiquer, en disant qu'*il faut concevoir l'unité du dividende, divisée en autant de parties qu'il y a d'unités dans le diviseur, et prendre autant de ces parties qu'il y a d'unités dans le reste, pour compléter le quotient cherché.*

52. En général, lorsqu'on a voulu considérer des quantités moindres que l'unité, il a fallu, pour les rapporter à cette unité, la concevoir partagée en un certain nombre de parties assez petites pour pouvoir être contenues un certain nombre de fois dans ces quantités, ou les *mesurer*. Dans l'idée qu'on s'est formée ainsi de leur grandeur, il est donc entré deux élémens, savoir : combien de fois les parties qui les mesurent sont contenues dans l'unité, et combien elles en renferment.

On a composé pour les fractions, une nomenclature qui répond à la manière de les concevoir et de les représenter.

Celle qui résulte de la division de l'unité en 2 parties, se nomme *moitié* ou *demie*,

en 3 parties	*tiers*,
en 4 parties	*quart*,
en 5 parties	*cinquième*,
en 6 parties	*sixième*,

et ainsi de suite, en ajoutant la terminaison *ième* au nombre qui marque combien on conçoit de parties dans l'unité.

Toute fraction s'exprime alors par deux nombres : le premier qui fait connaître de combien de parties elle est composée, se nomme *numérateur*, et le dernier, qui marque combien il faut de ces parties pour former l'unité, s'appelle *dénominateur*, parce qu'on en déduit la dénomination de la fraction. Les *cinq sixièmes* de l'unité sont une fraction dont le numérateur est *cinq*, et le dénominateur est *six*.

Le *numérateur* et le *dénominateur* s'appellent conjointement les deux *termes* de la fraction.

On se sert des chiffres pour abréger l'expression des fractions, en écrivant le dénominateur sous le numérateur, séparés l'un de l'autre par un trait :

un tiers s'écrit $\frac{1}{3}$,
cinq sixièmes, $\frac{5}{6}$.

53. D'après l'idée qu'on attache aux mots *numérateur* et *dénominateur*, il est évident *qu'on augmente une fraction en augmentant son numérateur, sans changer son dénominateur;* car ce dernier, marquant en combien de parties l'unité est divisée, fixe la grandeur de ces parties, qui demeure la même tant qu'il ne change pas; et en augmentant le numérateur on augmente le nombre de parties contenues dans la fraction, et par conséquent cette fraction. C'est ainsi, par exemple, que $\frac{8}{9}$ surpassent $\frac{7}{9}$, que $\frac{13}{30}$ surpassent $\frac{11}{30}$.

Il suit évidemment de cette considération, qu'*en répétant le numérateur* 2, 3, *ou un nombre quelconque de fois, sans toucher au dénominateur, on répète un pareil nombre de fois la quantité représentée par la fraction, ou elle se trouve multipliée par ce nombre;* car

on la compose alors de 2, 3, ou d'un nombre quelconque de fois autant de parties qu'elle en contenait d'abord, et ces parties sont demeurées les mêmes. Ainsi la fraction $\frac{3}{5}$ est le triple de $\frac{1}{5}$, et $\frac{10}{21}$ le double de $\frac{5}{21}$.

On diminue une fraction en diminuant son numérateur, sans changer son dénominateur, puisqu'on prend pour la composer un nombre de parties moindre que celui qu'elle contenait d'abord, et que ces parties ont conservé la même grandeur. Donc, *si l'on divise par 2, 3, ou un nombre quelconque, le numérateur d'une fraction, sans toucher au dénominateur, on la rend un pareil nombre de fois plus petite, ou elle se trouve divisée par ce nombre;* car on la réduit à contenir 2, 3, ou un nombre quelconque de fois moins de parties qu'elle n'en contenait d'abord, et ces parties sont demeurées les mêmes. C'est ainsi que $\frac{1}{5}$ est le tiers de $\frac{3}{5}$, que $\frac{5}{21}$ sont la moitié de $\frac{10}{21}$.

54. Au contraire, *on diminue une fraction lorsqu'on augmente son dénominateur, sans changer son numérateur;* car on conçoit alors plus de parties dans l'unité; elles deviennent donc plus petites, et comme on n'en prend encore que le même nombre pour former la fraction, leur ensemble compose dans le second cas, une quantité moindre que dans le premier. C'est ainsi que $\frac{2}{5}$ sont moins que $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{13}$ moins que $\frac{4}{9}$.

Il suit de là, que *si l'on multiplie par 2, 3, ou par un nombre quelconque, le dénominateur d'une fraction, sans toucher au numérateur, la fraction devient un pareil nombre de fois plus petite, ou se trouve divisée par ce nombre;* car on la compose toujours d'autant de parties qu'elle en contenait d'abord, mais chacune est devenue 2, 3, ou un nombre quelconque de fois plus petite. La fraction $\frac{3}{8}$ est la moitié de $\frac{3}{4}$, et $\frac{4}{15}$ le tiers de $\frac{4}{5}$.

On augmente une fraction lorsqu'on diminue son dénominateur, sans changer son numérateur, puisqu'en concevant alors moins de parties dans l'unité, chacune devient plus grande, et leur ensemble devient aussi plus grand.

Donc, *si l'on divise le dénominateur d'une fraction par 2, 3, ou un nombre quelconque, on rend cette fraction un pareil nombre de fois plus grande qu'auparavant, ou elle se trouve multipliée par ce nombre;* car on la compose toujours du même nombre de parties, mais devenues chacune 2, 3, ou un nombre quelconque de fois plus grandes qu'elles l'étaient d'abord. D'après cela, $\frac{3}{5}$ sont le triple de $\frac{3}{15}$, $\frac{5}{6}$ sont le quadruple de $\frac{5}{24}$.

Il est à propos de remarquer que supprimer le dénominateur d'une fraction c'est la multiplier par ce nombre. Supprimer, par exemple, le dénominateur 3 dans la fraction $\frac{2}{3}$, c'est la changer en 2 entiers, ou la multiplier par 3.

55. On peut résumer comme il suit les propositions précédentes :

En multipliant En divisant	le numérateur	on multiplie ou divise	la fraction.
En multipliant En divisant	le dénominateur	on divise on multiplie	la fraction.

56. La première conséquence qu'on doit tirer de ce tableau, c'est que les opérations faites sur le dénominateur, produisent sur la quantité représentée par la fraction, l'effet des opérations *contraires* ou *inverses*. Il en résulte encore que, *si l'on multiplie à la fois le numérateur et le dénominateur d'une fraction par le même nombre, la fraction ne changera pas de valeur;* car si d'un côté, en multipliant le numérateur, on rend la fraction 2, 3, etc. fois plus grande qu'auparavant, de l'autre, par la seconde opération, on en prend la moitié, le tiers, etc.; en un mot, on la divise par le même

nombre qui l'avait multipliée d'abord. Ainsi $\frac{1}{5}$ est égal à $\frac{3}{15}$, et $\frac{5}{21}$ sont égaux à $\frac{10}{42}$.

57. *On voit de même que si l'on divise à la fois par le même nombre le dénominateur et le numérateur d'une fraction, sa valeur ne change point ;* car si d'un côté, en divisant le numérateur, on rend la fraction 2, 3, etc. fois plus petite qu'auparavant, de l'autre, par la seconde opération, on en prend le double, le triple, etc.; en un mot, on la multiplie par le même nombre qui l'avait divisée d'abord. Ainsi la fraction $\frac{2}{4}$ est égale à $\frac{1}{2}$, et $\frac{3}{9}$ est égale à $\frac{1}{3}$.

58. Il n'en est pas des fractions comme des nombres entiers, dans lesquels une grandeur, tant qu'on la rapporte à la même unité, n'est susceptible que d'une seule expression; par les fractions, au contraire, la même grandeur peut être exprimée d'une infinité de manières. Par exemple, toutes les fractions

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \frac{7}{14}, \text{ etc.},$$

dont le dénominateur contient deux fois le numérateur, expriment, sous des formes différentes, la moitié de l'unité; les fractions

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15}, \frac{6}{18}, \frac{7}{21}, \text{ etc.},$$

dont le dénominateur contient 3 fois le numérateur, représentent toutes, le tiers de l'unité. Mais parmi toutes les formes que prend, dans l'un et l'autre exemple, la fraction proposée, la première est la plus remarquable, comme étant la plus simple ; et il est par conséquent bon de savoir la retrouver dans chacune des autres : or, c'est à quoi l'on parvient en divisant les deux termes de celles-ci par le même nombre, ce qui, comme on l'a vu, n'en change pas la valeur. En effet, si l'on divise par 7 les deux termes de la fraction $\frac{7}{14}$, on retombera sur $\frac{1}{2}$, et faisant aussi la même opération sur la fraction $\frac{7}{21}$, on en déduira $\frac{1}{3}$.

59. C'est en suivant ce dernier procédé qu'on réduit

une fraction à sa *plus simple expression*. Il ne saurait s'appliquer qu'aux fractions dont le numérateur et le dénominateur se trouvent divisibles par le même nombre; et dans tous les autres cas, la fraction proposée est la plus simple de toutes celles qui peuvent représenter la quantité qu'elle exprime.

Ainsi les fractions

$$\frac{5}{7}, \quad \frac{7}{12}, \quad \frac{15}{16},$$

dont les termes ne peuvent être divisés par un même nombre, ou *n'ont aucun diviseur commun*, sont *irréductibles;* et l'on ne saurait par conséquent exprimer d'une manière plus simple, les grandeurs qu'elles représentent : c'est ce qui sera prouvé en Algèbre.

60. Il suit de là que pour simplifier une fraction, il faut essayer de diviser ses deux termes par quelques-uns des nombres 2, 3, etc.; mais par ce tâtonnement on n'arrivera pas toujours à la plus simple expression de la fraction proposée, ou au moins il faudra souvent effectuer un grand nombre d'opérations.

Si l'on avait, par exemple, la fraction $\frac{24}{84}$, on pourrait remarquer d'abord, que chacun de ses termes est un multiple de 2, et en les divisant par ce nombre, on obtiendrait $\frac{12}{42}$; divisant ensuite par 2 les deux termes de cette dernière, on en déduirait $\frac{6}{21}$.

Quoique déjà beaucoup plus simple que la proposée, cette fraction est encore susceptible de réduction; car on peut diviser ses deux termes par 3, et on obtient alors $\frac{2}{7}$.

Si l'on fait attention que diviser un nombre par 2, puis diviser le quotient par 2, puis encore ce nouveau quotient par 3, c'est la même chose que de diviser d'abord le nombre primitif par le produit des nombres 2, 2 et 3, ce qui revient à 12, on verra que les trois

opérations ci-dessus peuvent s'effectuer en une seule fois, en divisant les deux termes de la fraction proposée par 12, et l'on aura encore $\frac{2}{7}$.

Les nombres 2, 3, 4 et 12, divisant chacun en même temps les deux nombres 24 et 84, sont les diviseurs communs de ces nombres; mais 12 se distingue des autres, parce qu'il est plus grand : et c'est en employant ce *plus grand commun diviseur* des deux termes de la fraction proposée, qu'on la réduit tout d'un coup à sa plus simple expression. C'est donc une recherche utile que celle-ci : *deux nombres étant donnés, trouver leur plus grand commun diviseur.*

61. On arrive à la connaissance du commun diviseur de deux nombres par une espèce de tâtonnement facile à découvrir, et qui a l'avantage d'approcher du but à chaque essai qu'on fait. Pour l'expliquer clairement, je vais prendre un exemple.

Soient les deux nombres 637 et 143. Le plus grand diviseur commun à ces nombres ne saurait évidemment surpasser le plus petit des deux; il convient donc d'essayer si le nombre 143, qui se divise lui-même, et donne pour quotient 1, peut diviser aussi le nombre 637, auquel cas il serait lui-même le plus grand diviseur commun cherché : mais dans l'exemple proposé, cela n'arrive pas, et l'on trouve un quotient 4 et un reste 65.

Maintenant il est visible que tout diviseur commun aux deux nombres 637 et 143, doit diviser aussi le reste 65 de leur division; car le plus grand, 637, est égal au plus petit, 143, multiplié par le quotient 4, plus le reste 65 (50); or, en divisant 637 par le diviseur commun cherché, on aura un quotient exact : il faut donc qu'on en ait aussi un semblable, en divisant par le même diviseur chacune des parties dans lesquelles 637 est décomposé, et en réunissant les résultats; mais le

produit de 143 par 4 se divise nécessairement par le diviseur commun qui est facteur de 143 : il faut donc que l'autre partie, 65, se divise aussi par ce diviseur, sans quoi le quotient total serait un entier accompagné d'une fraction, et ne pourrait par conséquent égaler le nombre entier résultant de la division de 637 par le commun diviseur.

Réciproquement, tout diviseur commun à 65 et à 143 divisera 637, composé de 4 fois 143 et de 65.

Par le même raisonnement, on prouvera en général, que *tout diviseur commun à deux nombres doit diviser le reste de la division du plus grand des deux par le plus petit; et que tout diviseur commun à ce plus petit nombre, et au reste, doit diviser le plus grand.*

D'après ces principes, on voit que le plus grand commun diviseur des nombres 637 et 143 doit l'être aussi des nombres 143 et 65, et que celui de ces derniers doit l'être de 637 et de 143; mais 65 ne pouvant être divisé par un nombre plus grand que lui-même, il faut donc l'essayer d'abord. En divisant 143 par 65, on trouve un quotient 2 et un reste 13; 65 n'est donc pas le diviseur cherché. Par un raisonnement semblable à celui qu'on a fait à l'égard des nombres 637, 143, et du reste 65 de leur division, on verra que le plus grand diviseur commun de 143 et de 65, doit l'être aussi des nombres 65 et 13 : or, le plus grand diviseur commun de ces derniers ne saurait surpasser 13; il faut donc essayer si 13 divise 65, ce qui arrive, puisqu'on a pour quotient 5.

Donc 13 est le plus grand diviseur commun cherché, puisque étant le plus grand diviseur commun de lui-même et de 65, il doit l'être de 65 et de 143, et que l'étant de ces nombres, il doit l'être de 143 et de 637.

Il est commode dans la pratique de placer les divi-

sions successives à la suite les unes des autres, et de disposer l'opération comme on le voit ci-après :

637	143	65	13
	4	2	5
65	13	0	

en séparant les quotiens 4, 2, 5, des restes placés au-dessous.

Les raisonnemens employés dans l'exemple précédent, pouvant s'appliquer à des nombres quelconques, conduisent à cette règle générale : *On trouvera le plus grand commun diviseur de deux nombres, en divisant le plus grand de ces nombres par le plus petit, divisant ensuite le plus petit par le reste de la première division, puis divisant ce reste par celui de la seconde division, puis divisant ce second reste par le troisième reste ou celui de la troisième division, et continuant ainsi de diviser le reste de chaque opération par celui de la suivante, jusqu'à ce qu'on parvienne à un quotient exact : le dernier diviseur sera le plus grand commun diviseur demandé.*

62. Voici deux exemples de cette opération :

9024	3760	1504	752
1504	2	2	2
	752	0000	

752 est donc le plus grand diviseur commun entre 9024 et 3760.

937	47	44	3	2	1
467	19	1	14	1	2
44	3	14	1	0	
		2			

On voit par cette dernière opération que le plus grand diviseur commun entre 937 et 47, est seulement 1, c'est-à-dire qu'à proprement parler, ces deux nombres n'ont point de diviseur commun, puisque tous les nombres entiers, quels qu'ils soient, sont divisibles par 1.

Il n'est pas difficile de se convaincre que la règle du numéro précédent doit nécessairement conduire à ce résultat, toutes les fois que les nombres proposés n'auront pas de diviseur commun; car les restes étant toujours moindres que le diviseur, deviennent de plus en plus petits à chaque opération; et il est évident que les divisions se continueront tant qu'on aura un diviseur plus grand que l'unité.

63. D'après ces calculs, les fractions $\frac{143}{637}$, $\frac{3760}{9024}$, se réduisent sur-le-champ à leur plus simple expression, en divisant les deux termes de la première par leur diviseur commun 13, et ceux de la seconde par leur diviseur commun 752 : on obtient ainsi $\frac{11}{49}$, $\frac{5}{12}$. Quant à la fraction $\frac{47}{937}$, elle est absolument irréductible, puisque ses deux termes n'ont d'autre diviseur commun que l'unité.

64. Il n'est pas toujours nécessaire de tenter la recherche du plus grand diviseur commun des deux termes de la fraction proposée; il y a, ainsi que je l'ai fait remarquer plus haut, des réductions qui s'offrent d'elles-mêmes.

Tout nombre terminé par un des chiffres 0, 2, 4, 6, 8, est nécessairement divisible par 2; car, puisqu'en divisant un nombre quelconque par 2, il ne peut rester que 1 sur les dixaines : la dernière division partielle s'effectuera sur les nombres 0, 2, 4, 6, 8, si les dixaines n'ont point laissé de reste, ou sur les nombres 10, 12, 14, 16, 18, si elles en ont laissé, et tous ces nombres sont divisibles par 2.

Les nombres divisibles par 2, se nomment *nombres*

pairs, parce qu'ils peuvent être partagés en deux parties pareilles.

De même, tout nombre terminé par un zéro ou par un 5, est divisible par 5; car, lorsqu'on sera arrivé à la division des dixaines par 5, le reste, s'il y en a un, sera nécessairement 1, 2, 3 ou 4 dixaines; en sorte que si le dernier chiffre est un 0 ou un 5, l'opération se terminera sur un des nombres 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, tous divisibles par 5.

Les nombres 10, 100, 1000, etc., exprimés par l'unité suivie d'un certain nombre de zéros, peuvent être décomposés en 9 plus 1, 99 plus 1, 999 plus 1, et ainsi de suite; et les nombres 9, 99, 999, etc., étant divisibles par 3 et par 9, il suit de là que si l'on divise par 3 ou par 9 les nombres de la forme 10, 100, 1000, etc., le reste de la division sera 1.

Maintenant tout nombre qui, comme 20, 300, 5000, est exprimé par un seul chiffre significatif, suivi d'un certain nombre de zéros, peut être décomposé en plusieurs nombres exprimés par l'unité suivie du même nombre de zéros : 20 est égal à 10 plus 10, 300 à 100 plus 100 plus 100, 5000 à 1000 plus 1000 plus 1000 plus 1000 plus 1000, et ainsi des autres. Il suit de là que si l'on divise 20, ou 10 plus 10, par 3 ou par 9, le reste sera 1 plus 1, ou 2; si l'on divise 300, ou 100 plus 100 plus 100, par 3 ou par 9, le reste sera 1 plus 1 plus 1, ou 3.

En général, si l'on décompose de la même manière un nombre exprimé par un seul chiffre significatif suivi d'un certain nombre de zéros, pour le diviser par 3 ou par 9, le reste de cette division sera égal à autant de fois 1 qu'il y a d'unités dans le chiffre significatif, c'est-à-dire au chiffre significatif lui-même. Or un nombre quelconque étant décomposé en unités, dixaines, centaines, se trouve

formé par la réunion de plusieurs nombres exprimés par un seul chiffre significatif; et si l'on divise chacun de ces derniers par 3 ou par 9, on aura pour reste un des chiffres significatifs du nombre proposé: par exemple, la division des centaines donnera pour reste le chiffre des centaines, celle des dixaines celui des dixaines, et ainsi des autres. Si donc la somme de tous ces restes était divisible par 3 ou par 9, la division du nombre proposé s'acheverait exactement; d'où il suit que si la somme des chiffres d'un nombre est divisible par 3 ou par 9, il en sera de même de ce nombre.

Ainsi les nombres 423, 4251, 15342, sont divisibles par 3, parce que la somme des chiffres significatifs est 9 dans le premier, 12 dans le 2e, et 15 dans le 3e.

De même, 621, 8280, 934218, sont divisibles par 9, parce que la somme des chiffres significatifs est 9 dans le premier, 18 dans le 2e, et 27 dans le 3e.

On observera que tout nombre divisible par 9 est par là même divisible par 3, quoique tout nombre divisible par 3 ne le soit pas par 9.

On pourrait faire encore sur plusieurs autres nombres, des observations analogues à celles que je viens d'exposer sur 2, 3, 5 et 9; mais la recherche de ces propriétés m'écarterait trop de mon sujet pour m'y arrêter.

Les nombres 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, etc., qu'on ne peut diviser que par eux-mêmes, ou par l'unité, s'appellent *nombres premiers*. Deux nombres, comme 12 et 35, ayant, chacun en particulier, des diviseurs, mais dont aucun n'est commun à l'un et à l'autre, sont dits *premiers entre eux* (*).

(*) On trouvera au n° 162, comment il faut s'y prendre pour décomposer un nombre dans ses facteurs simples ou *premiers*.

Une fraction irréductible a par conséquent pour numérateur et pour dénominateur des nombres premiers entre eux.

65. L'addition et la soustraction n'ont aucune difficulté, quand les fractions sur lesquelles on doit effectuer ces dernières opérations, ont le même dénominateur; comme elles ne renferment que des parties de même dénomination, et par conséquent de même grandeur, on peut les ajouter ou les soustraire de même que si c'était des unités, en observant de marquer au résultat la dénomination des parties dont il est composé.

Il est évident, en effet, que $\frac{2}{11}$ et $\frac{3}{11}$ font $\frac{5}{11}$, comme 2 quantités et 3 quantités de la même espèce, en font 5 de cette espèce, quelle qu'elle soit.

De même, la différence entre $\frac{3}{9}$ et $\frac{8}{9}$ est $\frac{5}{9}$, comme la différence entre 3 quantités et 8 quantités de même espèce, est 5 quantités de cette espèce, quelle qu'elle soit.

On doit conclure de là, que *pour ajouter ou soustraire des fractions de même dénominateur, il faut prendre la somme ou la différence de leurs numérateurs, et donner au résultat le dénominateur commun.*

66. L'addition des fractions conduit souvent à des résultats qui surpassent l'unité. Si l'on ajoutait, par exemple $\frac{4}{8}$ et $\frac{7}{8}$, la somme serait $\frac{11}{8}$; cette expression désignant 11 parties, dont 8 réunies composent l'unité, équivaut à l'unité plus trois huitièmes d'unité ou à $1\frac{3}{8}$.

En général, toute expression fractionnaire dont le numérateur surpasse le dénominateur, contient des unités ou des *entiers;* et *on extrait les entiers en divisant le numérateur par le dénominateur : le quotient donne leur nombre; et le reste mis en fraction, est celle qui doit les accompagner.*

L'expression $\frac{307}{53}$, par exemple, désignant 307 par-

ties dont 53 composent l'unité, il y a dans la quantité que représente cette expression, autant d'unités que 307 contient de fois 53 : faisant la division, on obtient 5 pour quotient et 42 pour reste ; ces 42 sont des *cinquante-troisièmes* d'unité : ainsi, au lieu de $\frac{307}{53}$, on peut écrire $5\frac{42}{53}$.

67. L'expression $5\frac{42}{53}$, dans laquelle les entiers sont en évidence, étant composée de deux parties différentes, il est souvent utile de revenir à l'expression primitive $\frac{307}{53}$, c'est ce qu'on appelle *réduire un entier en fraction.*

Pour y parvenir, *il faut multiplier l'entier par le dénominateur de la fraction qui l'accompagne, ajouter son numérateur au résultat, et donner à la somme le dénominateur de la même fraction.*

En effet, il faut d'abord convertir les cinq entiers en cinquante-troisièmes, ce qui s'effectuera en multipliant 53 par 5, puisque chaque unité doit contenir cinquante-trois parties ; le résultat sera $\frac{265}{53}$: réunissant cette partie avec la seconde $\frac{42}{53}$, il viendra $\frac{307}{53}$.

68. Quand les fractions proposées ont des dénominateurs différens, on ne peut plus réunir ensemble ou retrancher l'un de l'autre les nombres de parties dont elles sont composées, puisque ces parties sont de grandeurs différentes ; et pour obvier à cet inconvénient, on fait subir à ces fractions une transformation qui les ramène à des parties de même grandeur, en leur donnant un dénominateur commun.

Soit, par exemple, les fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{5}$; si l'on multiplie par 5, dénominateur de la seconde, les deux termes de la première, on convertira cette première en $\frac{10}{15}$; multipliant ensuite par 3, dénominateur de la première, les deux termes de la seconde, on convertira cette seconde en $\frac{12}{15}$: on formera ainsi deux nouvelles expres-

sions qui auront la même valeur que les fractions proposées (56).

Cette opération, nécessaire pour comparer les grandeurs respectives de deux fractions, ne consiste, au fond, qu'à trouver, pour les exprimer, des parties de l'unité assez petites pour pouvoir être contenues exactement dans chacune de celles dont se forment les fractions proposées. Il est visible, dans l'exemple ci-dessus, que la quinzième partie de l'unité peut mesurer exactement $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{5}$ de cette unité, puisque $\frac{1}{3}$ contient cinq 15^{ièmes}, et que $\frac{1}{5}$ en contient trois. Le procédé appliqué aux fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{5}$, réussirait également sur d'autres quelconques.

En général, *pour réduire au même dénominateur deux fractions quelconques, il faut multiplier les deux termes de chacune, par le dénominateur de l'autre.*

69. *On réduit à la fois au même dénominateur, un nombre quelconque de fractions, en multipliant les deux termes de chacune par le produit des dénominateurs de toutes les autres;* car il est évident que les nouveaux dénominateurs sont les mêmes, puisque chacun est formé du produit de tous les dénominateurs primitifs, et que les nouvelles fractions sont de même valeur que les premières, puisqu'on n'a fait que multiplier les deux termes de celles-ci, par un même nombre (56).

La règle précédente conduit, dans tous les cas, au but qu'on s'est proposé; mais lorsque les dénominateurs des fractions dont il s'agit, ne sont pas premiers entre eux, il existe un dénominateur commun plus simple que celui qu'elle donne; et l'on y parvient par des considérations analogues à celles des numéros précédens. Si l'on a, par exemple, les fractions

$$\frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{6},\ \frac{7}{8},$$

comme il ne s'agit, pour les réduire au même dénomina-

teur, que de diviser l'unité en parties qui soient contenues exactement dans celles dont ces fractions se forment; il suffira de trouver le plus petit nombre qui puisse se diviser exactement par chacun de leurs dénominateurs 3, 4, 6, 8; et on le découvrira en essayant sur les multiples de 3, les divisions par 4, 6 et 8, qui ne réussissent en premier lieu que sur 24: cela fait, il n'y aura plus qu'à convertir les fractions proposées en 24èmes de l'unité.

Pour effectuer cette opération, on cherchera successivement combien de fois les dénominateurs 3, 4, 6 et 8, sont contenus dans 24; et les quotiens seront les nombres par lesquels il faudra multiplier respectivement les deux termes de chaque fraction, pour la ramener au dénominateur 24. On trouvera ainsi, que les deux termes de $\frac{2}{3}$ doivent être multipliés par 8, ceux de $\frac{3}{4}$ par 6, ceux de $\frac{5}{6}$ par 4, ceux de $\frac{7}{8}$ par 3; et on formera les fractions

$$\frac{16}{24}, \quad \frac{18}{24}, \quad \frac{20}{24}, \quad \frac{21}{24}.$$

On verra dans l'Algèbre des moyens pour faciliter l'application de ce procédé.

70. La règle donnée précédemment pour la réduction des fractions au même dénominateur, suppose qu'un produit résultant des multiplications successives de plusieurs nombres entre eux, ne change point, dans quelqu'ordre qu'on effectue ces multiplications. Cette vérité, qu'on regarde presque toujours comme évidente, a cependant besoin d'être démontrée.

Il faut commencer par prouver que multiplier un nombre par le produit de deux autres, c'est la même chose que de le multiplier d'abord par l'un d'eux, et de multiplier ensuite le produit résultant, par l'autre. Au lieu de multiplier, par exemple, 3 par 35, produit des nombres 5 et 7, on aurait pu multiplier 3 par 5, et

multiplier ensuite le produit de ces nombres par 7. La proposition serait évidente si, à la place du nombre 3, on prenait l'unité; car 1 multiplié par 5 donne 5, et le produit de 5 par 7 donne 35, aussi bien que le produit de 1 par 35 : mais 3, ou tout autre nombre, n'étant que l'assemblage de plusieurs unités, il n'arrivera à ce nombre que ce qui arrive à chacune des unités dont il est composé, c'est-à-dire que les produits de 3 par 5 et par 7, obtenus de l'une et de l'autre manière, étant dans les deux cas, le triple des résultats que donne l'unité multipliée par 5 et par 7, seront nécessairement les mêmes. On prouverait de la même manière que si l'on avait à multiplier 3 par le produit des nombres 5, 7 et 9, cela reviendrait à multiplier 3 par 5, puis le produit trouvé par 7, et ce dernier produit par 9, et ainsi de suite, en quelque nombre que soient les facteurs.

Pour indiquer d'une manière abrégée plusieurs multiplications successives, telles que celles des nombres 3, 5 et 7 entre eux, j'écrirai 3 par 5 par 7.

Cela posé, dans le produit 3 par 5 on peut changer l'ordre des facteurs 3 et 5 (27), et on aura encore le même produit. Il suit immédiatement de là que 5 par 3 par 7 est la même chose que 3 par 5 par 7.

On peut aussi changer l'ordre des facteurs 3 et 7 dans le produit 5 par 3 par 7, puisque ce produit équivaut à 5 multiplié par le produit des nombres 3 et 7; on aura donc encore dans 5 par 7 par 3, le même produit que les précédens.

En rapprochant les trois arrangemens,

3 par 5 par 7,
5 par 3 par 7,
5 par 7 par 3,

on voit que le facteur 3 s'est trouvé successivement le premier, le second et le troisième, et qu'il pourrait en être de même de l'un quelconque des deux autres. Cet exemple, dans lequel on n'a point considéré la valeur particulière de chaque nombre, doit prouver qu'un produit de trois facteurs ne change point, quelqu'ordre qu'on établisse dans les multiplications.

Si l'on avait un produit de quatre facteurs, tel que 3 par 5 par 7 par 9, on pourrait, d'après ce qui vient d'être dit, arranger comme on voudrait les trois premiers ou les trois derniers, et faire ainsi passer par toutes les places l'un quelconque de ces facteurs. Considérant ensuite un des nouveaux arrangemens, par exemple celui-ci, 5 par 7 par 3 par 9, on pourrait intervertir l'ordre des deux derniers facteurs, ce qui donnerait 5 par 7 par 9 par 3, et mettrait 3 à la dernière place. On étendra sans peine ces raisonnemens à tel nombre de facteurs qu'on voudra.

71. Au moyen de la réduction au même dénominateur, l'addition et la soustraction des fractions s'effectuent comme dans le n° 65.

72. Lorsqu'on a des entiers accompagnés de fractions, il faut d'abord opérer sur celles-ci. Pour ajouter, par exemple, $3\frac{2}{7}$ avec $5\frac{4}{9}$, on commencera par réduire au même dénominateur les fractions $\frac{2}{7}$ et $\frac{4}{9}$, qui deviendront $\frac{18}{63}$ et $\frac{28}{63}$; puis on joindra leur somme à celle des entiers 3 et 5; le total sera $8\frac{46}{63}$.

La soustraction s'opérera de même toutes les fois que la fraction qui entre dans le nombre à soustraire sera la plus petite des deux. Dans le cas contraire, pour rendre la soustraction possible, il faut faire un emprunt sur l'entier joint à la plus petite fraction. Si l'on avait, par exemple, $\frac{4}{5}$ à ôter de $3\frac{1}{4}$, les deux fractions réduites au même dénominateur devenant $\frac{15}{20}$ et $\frac{5}{20}$, on

verrait que la première ne peut être retranchée de la seconde; mais en empruntant 1, ou $\frac{20}{20}$, sur l'entier 3, on changerait le nombre $3\frac{1}{4}$, ou $3\frac{5}{20}$, en $2\frac{25}{20}$, d'où retranchant $\frac{15}{20}$, il resterait $2\frac{9}{20}$.

73. Je reprends maintenant l'examen du tableau du n° 55,

En multipliant En divisant	le numérateur	on multiplie on divise	la fraction.
En multipliant En divisant	le dénominateur	on divise on multiplie	la fraction,

pour en déduire de nouvelles conséquences.

On voit d'abord, à la seule inspection de ce tableau, que l'on peut multiplier une fraction de deux manières, savoir : en multipliant son numérateur, ou en divisant son dénominateur, et qu'on peut aussi la diviser de deux manières, savoir : en divisant son numérateur, ou en multipliant son dénominateur; d'où il suit que la multiplication seule, selon qu'on l'effectue sur le numérateur ou sur le dénominateur, suffit pour opérer la multiplication et la division des fractions par des nombres entiers. Ainsi $\frac{3}{15}$ multipliés par 7 unités, font $\frac{21}{15}$; $\frac{4}{9}$ divisés par 3, font $\frac{4}{27}$, etc.

74. Dans le numéro précédent, le multiplicateur étant un nombre entier indiquait encore, comme dans le n° 22, combien de fois on devait répéter le multiplicande; mais, quand on dit, par exemple, que prendre le 5me d'un nombre quelconque, c'est multiplier ce nombre par $\frac{1}{5}$, le mot *multiplier* n'a plus la même acception que ci-dessus, puisqu'il indique un résultat cinq fois plus petit que le multiplicande; néanmoins on peut comprendre les deux cas dans le même énoncé, en disant que *multiplier un nombre par un autre, c'est composer avec le premier un nombre, de la même manière que le second est composé avec l'unité.* En effet,

lorsqu'il s'agit de multiplier par 2, par 3, etc., le produit est composé de 2 fois, 3 fois, etc., le multiplicande, de même que le multiplicateur est composé de 2, 3, etc., unités; et multiplier un nombre quelconque par la fraction $\frac{1}{5}$, par exemple, c'est en prendre la cinquième partie, parce que le multiplicateur $\frac{1}{5}$ étant la cinquième partie de l'unité, exprime que le produit doit être la cinquième partie du multiplicande (*).

De même, multiplier un nombre quelconque par $\frac{4}{5}$, c'est prendre sur ce multiplicande une partie qui en soit les quatre cinquièmes, ou égale à quatre fois un cinquième de ce multiplicande.

On voit par là que le mot *multiplier* étendu aux expressions fractionnaires n'emporte pas toujours l'idée d'augmentation, comme pour les nombres entiers. Toutes les fois que le multiplicateur sera moindre que l'unité, le produit sera plus petit que le multiplicande, auquel il serait seulement égal, si le multiplicateur était 1.

75. Puisque *la multiplication par une fraction, quel que soit le multiplicande, a pour objet de prendre sur ce multiplicande les parties marquées par la fraction multiplicateur*, cette opération est composée de deux autres, savoir, d'une division et d'une multiplication, dans lesquelles le diviseur et le multiplicateur sont des nombres entiers.

En effet, pour prendre les $\frac{4}{5}$ d'un nombre quelconque,

(*) On est conduit à cet énoncé par une question qui se présente souvent : celle où l'on cherche le prix d'une quantité quelconque d'une chose, lorsqu'on connaît le prix de l'unité de cette chose. La question demeure évidemment la même, soit qu'il s'agisse d'une quantité plus grande ou plus petite que cette unité.

par exemple, il faut d'abord en trouver la cinquième partie en le divisant par 5, et répéter cette cinquième partie quatre fois, en la multipliant par 4.

En général, on voit qu'*il faudra toujours diviser le multiplicande par le dénominateur de la fraction multiplicateur, et multiplier le résultat par le numérateur de cette fraction.*

Si le multiplicande est un nombre entier divisible par 5, par exemple, 35, la cinquième partie sera 7, multipliant ce résultat par 4, on aura 28 pour les $\frac{4}{5}$ de 35, ou pour le produit de 35 par $\frac{4}{5}$. Si le multiplicande, toujours entier, n'est pas divisible exactement par 5, qu'il soit, par exemple, 32, la division par 5 donnera pour quotient $6\frac{2}{5}$; répétant ce quotient quatre fois, il viendra $24\frac{8}{5}$, ce qui revient à $25\frac{3}{5}$: telle est la valeur des $\frac{4}{5}$ de 32.

On aurait évité la conversion de $24\frac{8}{5}$ en $25\frac{3}{5}$ si l'on eût commencé par multiplier 32 par le numérateur 4; divisant alors le produit 128, par le dénominateur 5, on aurait obtenu tout de suite le dernier résultat $25\frac{3}{5}$.

76. Je passe maintenant à la multiplication d'une fraction par une fraction.

Je suppose qu'on ait à multiplier, par exemple, $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$: d'après le n° précédent, l'opération se réduit à diviser $\frac{2}{3}$ par 5, et à multiplier ensuite le résultat par 4; et par le tableau du n° 55, la première opération s'effectuera en multipliant le dénominateur 3 du multiplicande par 5, et la seconde, en multipliant le numérateur 2 du multiplicande par 4, ce qui donnera pour le produit cherché $\frac{8}{15}$.

Il en serait de même de tout autre exemple; et on doit par conséquent conclure de ce qui précède, que *pour former le produit de deux fractions, il faut mul-*

tiplier les numérateurs l'un par l'autre, et placer sous ce produit, celui des deux dénominateurs.

77. Il peut arriver que l'on ait à multiplier les uns par les autres des entiers joints à des fractions, comme, par exemple, $3\frac{5}{7}$ par $4\frac{8}{9}$. Le moyen le plus simple pour obtenir le produit, est de réduire les entiers en fractions, suivant le procédé du n° 67; les deux facteurs seront exprimés alors par $\frac{26}{7}$, $\frac{44}{9}$, leur produit, par $\frac{1144}{63}$ ou par $18\frac{10}{63}$, en extrayant les entiers (66).

78. On donne quelquefois au produit de plusieurs fractions le nom de *fractions de fractions*; c'est dans ce sens qu'on dit *les* $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{4}{5}$. Cette expression marque les $\frac{2}{3}$ de la quantité représentée par $\frac{4}{5}$ de l'unité primitive, et prise à son tour pour unité. On réduit ces deux fractions à une seule par la multiplication (76), et le résultat, $\frac{8}{15}$, exprime la valeur de la quantité cherchée rapportée à l'unité primitive; c'est-à-dire que les $\frac{2}{3}$ de la quantité représentée par les $\frac{4}{5}$ de l'unité, équivalent aux $\frac{8}{15}$ de cette unité. Si l'on voulait prendre les $\frac{7}{9}$ de ce résultat, cela reviendrait à prendre les $\frac{7}{9}$ des $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$, et en réduisant ces fractions à une seule, on aurait $\frac{56}{135}$ pour la valeur de la quantité cherchée, rapportée à l'unité primitive.

79. Le mot *contenir* ne convient pas plus, en toute rigueur, aux différens cas que présente la division, que le mot *répéter* à ceux que présente la multiplication; car on ne peut pas dire que le dividende contient le diviseur, lorsqu'il est moindre que ce dernier: cependant on s'exprime encore ainsi, mais seulement par analogie et par extension.

Pour généraliser la division, *il faut regarder le dividende comme composé avec le quotient de la même ma-*

nière que le diviseur l'est avec l'unité, puisque le diviseur et le quotient sont les deux facteurs du dividende (36). Cette considération se prête à tous les cas que peut offrir la division. En effet, lorsque le diviseur est 5, par exemple, le dividende est égal à 5 fois le quotient, et celui-ci est par conséquent la cinquième partie du dividende. Si le diviseur est une fraction, $\frac{1}{2}$, par exemple, le dividende ne doit être que la moitié du quotient, ou ce dernier doit être double de l'autre.

Il est visible que toutes les fois que le diviseur sera moindre que l'unité, le quotient surpassera le dividende, puisque ce diviseur doit être contenu dans le dividende un plus grand nombre de fois que l'unité, qui, prise pour diviseur, donne, dans tous les cas, un quotient exprimé par le dividende lui-même.

La définition que je viens de poser conduit facilement à la manière d'opérer, lorsque le diviseur est une fraction. Je prends pour exemple $\frac{4}{5}$: dans ce cas, le dividende doit être seulement les $\frac{4}{5}$ du quotient; mais $\frac{1}{5}$ étant $\frac{1}{4}$ de $\frac{4}{5}$, on aurait donc $\frac{1}{5}$ du quotient en prenant le quart du dividende, ou en le divisant par 4. Connaissant par là $\frac{1}{5}$ du quotient, il n'y aurait qu'à prendre ce résultat 5 fois, ou le multiplier par 5, pour obtenir le quotient. Dans cette opération, on divise le dividende par 4, et on multiplie le résultat par 5; c'est donc (75) comme si l'on avait pris les $\frac{5}{4}$ du dividende, ou comme si l'on avait multiplié le dividende par $\frac{5}{4}$, qui n'est autre chose que la fraction diviseur $\frac{4}{5}$ renversée.

Cet exemple montre qu'en général, *pour diviser un nombre quelconque par une fraction, il faut le multiplier par cette fraction renversée.*

Soit pour exemple 9 à diviser par $\frac{3}{4}$; cela s'effectuera en multipliant 9 par $\frac{4}{3}$, et on trouvera $\frac{36}{3}$ ou 12. De

même 13 à diviser par $\frac{5}{7}$ reviendra à 13 multiplié par $\frac{7}{5}$, ou à $\frac{91}{5}$. Le quotient cherché sera $18\frac{1}{5}$, en extrayant les entiers (66).

80. Lorsque le dividende est une fraction, l'opération revient à *multiplier* (76) *la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.*

Soit $\frac{7}{8}$ à diviser par $\frac{2}{3}$; il faudra multiplier $\frac{7}{8}$ par $\frac{3}{2}$, ce qui donnera $\frac{21}{16}$.

Il est évident que l'opération ci-dessus peut encore être énoncée ainsi : *Pour diviser une fraction par une autre, il faut multiplier le numérateur de la première par le dénominateur de la seconde, et le dénominateur de la première par le numérateur de la seconde.*

S'il y avait des entiers joints aux fractions proposées, on les réduirait en fractions, et on appliquerait aux résultats la règle ci-dessus.

81. Il est important d'observer que l'on indique, par le moyen d'une expression fractionnaire, une division quelconque, soit qu'elle puisse s'opérer en nombres entiers, ou autrement. $\frac{36}{3}$, par exemple, expriment évidemment le quotient de 36 par 3, aussi bien que 12; car $\frac{1}{3}$ étant contenu trois fois dans l'unité, $\frac{36}{3}$ seront contenus trois fois dans 36 entiers, comme doit l'être le quotient de 36 par 3.

82. On remarquera sans doute que la multiplication et la division des fractions s'opèrent immédiatement par les remarques énoncées dans le tableau de la page 43, au lieu que l'addition et la soustraction des fractions demandent une préparation préliminaire. Cela tient à ce que les fractions proviennent de la division,

qui tient de si près à la multiplication. On aura souvent occasion par la suite de se convaincre de cette vérité : que les opérations à faire sur des quantités sont d'autant plus faciles, qu'elles se rapprochent davantage de l'origine de ces quantités.

Des fractions décimales.

83. Quoiqu'on puisse, par les règles précédentes, effectuer dans tous les cas, sur les fractions, les quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique, on a dû sentir de bonne heure, que si l'on avait assujetti à une même loi de décroissement, les diverses subdivisions de l'unité, qui servent à mesurer les quantités plus petites que cette unité, le calcul des fractions serait devenu beaucoup plus commode par la facilité qu'on aurait eue à les convertir les unes dans les autres. En prenant cette loi conforme à la base de notre système de numération, on a donné au calcul le plus haut degré de simplicité auquel il soit possible d'atteindre, et voici comment.

On a vu, dans le n° 3, que chacune des collections d'unités, contenues dans un nombre, se compose de dix unités de l'ordre précédent, comme la dixaine se forme des unités simples; mais rien ne s'oppose à ce qu'on regarde cette unité simple, comme contenant dix parties dont chacune sera un *dixième* :

Le dixième, comme contenant dix parties, dont chacune sera un *centième* de l'unité :

Le centième comme contenant dix parties, dont chacune sera un *millième* de l'unité, ainsi de suite.

En poursuivant ainsi, on formera des quantités aussi petites que l'on voudra, et au moyen desquelles on

pourra par conséquent mesurer des quantités, quelque petites qu'elles soient.

Ces fractions, qu'on nomme *décimales*, parce qu'elles sont composées de parties de l'unité de dix en dix fois plus petites, se convertissent les unes dans les autres, de la même manière que les *dixaines*, les *centaines*, les *mille*, etc., se convertissent en unités. En effet,

l'unité valant 10 dixièmes,
le dixième 10 centièmes,
le centième 10 millièmes,

il en résulte que le dixième vaut 10 fois 10 millièmes ou 100 millièmes.

Par exemple, 2 dixièmes, 3 centièmes et 4 millièmes, seront équivalens à 234 millièmes, comme 2 centaines, 3 dixaines et 4 unités, font 234 unités; et il en sera de même dans tout autre cas, puisque la subordination des parties de l'unité est semblable à celle des divers ordres d'unités.

84. Par cette remarque, on peut, au moyen des chiffres, écrire les fractions décimales de la même manière que les nombres entiers; puisque, d'après la convention qui rend dix fois plus petite la valeur d'un chiffre mis à la droite d'un autre, les *dixièmes* trouvent naturellement leur place à la droite des unités, puis les *centièmes* à la droite des dixièmes, et ainsi de suite : mais, pour empêcher que l'on ne puisse confondre les chiffres qui expriment des parties décimales, avec ceux qui représentent des unités entières, on met une virgule à la droite des unités. Pour exprimer, par exemple, 34 unités et 27 centièmes, on écrira 34,27. S'il n'y avait pas d'unités, on remplirait leur place par un zéro, et on ferait de même pour toutes les parties décimales qui

pourraient manquer entre celles qui sont énoncées dans le nombre proposé.

Ainsi 19 centièmes s'écrivent 0,19 ,

304 millièmes	0,304,
3 millièmes	0,003.

85. Si l'on rapproche les expressions des fractions décimales ci-dessus, des suivantes, $\frac{19}{100}$, $\frac{304}{1000}$, $\frac{3}{1000}$, qu'on tirerait de la manière de représenter, en général, une fraction, on verra que, *pour représenter sous la forme entière, une fraction décimale écrite comme une fraction ordinaire, il faut prendre tel qu'il est le numérateur de cette fraction, et le placer de manière qu'il y ait après la virgule, autant de chiffres qu'il y a de zéros à la suite de l'unité dans le dénominateur.*

Réciproquement, *pour ramener une fraction décimale presentée sous la forme d'un entier, à celle d'une fraction ordinaire, il faut donner pour dénominateur aux chiffres qu'elle contient, l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a de chiffres à la droite de la virgule.*

C'est ainsi que les fractions 0,56, 0,036, se changent en $\frac{56}{100}$ et $\frac{36}{1000}$.

86. *L'expression en chiffres, des nombres contenant des parties décimales, se lit en énonçant d'abord les chiffres placés à la gauche de la virgule, puis ceux qui sont à la droite, et en ajoutant au dernier de ceux-ci, la dénomination des parties qu'il représente.*

Le nombre 26,736 s'énonce 26 unités 736 millièmes;
Le nombre 0,0673 s'énonce 673 dix-millièmes;
Enfin 0,0000673 s'énonce 673 dix-millionièmes.

87. Les chiffres décimaux ne tirant leur valeur que du rang qu'ils occupent par rapport à la virgule, il est

indifférent d'écrire ou d'effacer sur leur droite tel nombre de zéros qu'on voudra. Par exemple, 0,5 est la même chose que 0,50; 0,784, la même chose que 0,78400; car dans le premier cas, le nombre qui exprime la fraction décimale est devenu dix fois plus grand, mais les parties sont devenues des centièmes, et par conséquent dix fois plus petites qu'elles n'étaient d'abord; dans le second cas, le nombre qui exprime la fraction est devenu cent fois plus grand, mais les parties étant devenues des cent-millièmes, sont cent fois plus petites qu'elles n'étaient d'abord : cette transformation revient donc à celle qu'on opère sur une fraction ordinaire, lorsqu'on multiplie ses deux termes par le même nombre; et ce serait les diviser par le même nombre, si l'on supprimait des zéros.

88. L'addition des fractions décimales et des nombres qui en sont accompagnés, ne demande pas d'autre règle que celle des nombres entiers, puisque les parties décimales se composent les unes des autres, en allant de droite à gauche, de la même manière que les unités entières.

Soient, pour exemple, 0,56, 0,003, 0,958; en les disposant comme il suit :

	0,56
	0,003
	0,958
Somme.....	1,521

on trouve par la règle du n° 12, que leur somme est 1,521.

Soient encore les nombres 19,35, 0,3, 84,5 et 110,02, qui contiennent des unités entières; on les disposera ainsi :

19,35
0,3
84,5
110,02

Somme..... 214,17

et l'on trouvera de même que leur somme est 214,17.

En général, *l'addition des nombres décimaux se fait comme celle des nombres entiers, en observant de placer à la somme, la virgule dans la même colonne où se trouvent toutes celles des nombres à ajouter.*

89. Les règles prescrites pour la soustraction des nombres entiers, conviennent aussi, comme on va le voir, aux nombres décimaux. Soit, par exemple, 0,3697, à retrancher de 0,62; on observera d'abord que le second nombre, qui ne contient que des centièmes, tandis que le premier renferme des dix-millièmes, peut aussi être converti en dix-millièmes, en mettant deux zéros à sa droite (87), ce qui le change en 0,6200. On disposera ensuite l'opération comme ci-dessous :

0,6200
0,3697

Différence..... 0,2503

et par la règle du n° 17, on trouvera une différence de 0,2503.

Soit encore le nombre 7,364 à ôter de 9,1457; l'opération étant disposée ainsi :

9,1457
7,3640

Différence..... 1,7817

on trouve la différence marquée ci-dessus. Il eût été égal de ne pas mettre le zéro à la suite du nombre à retrancher, pourvu qu'on eût placé ses divers chiffres au-dessous de ceux qui marquent, dans le premier nombre, des ordres d'unités ou des parties correspondantes.

En général, *la soustraction des nombres décimaux s'opère comme celle des nombres entiers, pourvu qu'on rende le nombre des chiffres décimaux le même dans les deux nombres proposés, en écrivant à la droite de celui qui en a le moins, autant de zéros qu'il est nécessaire; et on place à la différence une virgule dans la colonne où se trouvent celles des nombres proposés.*

Les preuves de l'addition et de la soustraction des nombres décimaux se font absolument comme celles des mêmes opérations sur les nombres entiers.

90. La virgule séparant, des parties décimales, les collections d'unités entières, son déplacement change nécessairement la valeur du nombre total. En la reculant vers la droite, on fait passer dans la partie entière, des chiffres qui se trouvaient dans la partie fractionnaire; on augmente par conséquent la valeur totale du nombre proposé. Au contraire, en avançant la virgule vers la gauche, on fait passer dans la partie fractionnaire, des chiffres qui se trouvaient dans la partie entière, et par conséquent on diminue la valeur totale du nombre proposé.

Le premier changement rend le nombre proposé dix, cent, mille, etc., fois plus grand, suivant qu'on recule la virgule d'un, deux, trois, etc., rangs vers la droite, parce que chaque fois qu'on recule ainsi la virgule d'un rang, tous les chiffres, comparés à cette virgule, avancent d'un rang vers la gauche, et prennent par conséquent

une valeur dix fois plus grande que celle qu'ils avaient d'abord.

Si, par exemple, dans le nombre 134,28, on porte la virgule entre le 2 et le 8, on aura 1342,8; les centaines seront devenues des mille, les dixaines des centaines, les unités des dixaines, les dixièmes des unités, et les centièmes des dixièmes. Toutes les parties du nombre étant devenues dix fois plus grandes, c'est comme si on l'avait décuplé, ou multiplié par dix.

Le second changement rend le nombre proposé dix, cent, mille, etc., fois plus petit, selon qu'on avance la virgule d'un, deux, trois, etc., rangs vers la gauche, parce que chaque fois qu'on avance ainsi la virgule d'une place, tous les chiffres comparés à cette virgule, reculent d'un rang vers la droite, et prennent par conséquent une valeur dix fois plus petite que celle qu'ils avaient d'abord.

Si dans le nombre 134,28, on porte la virgule entre le 3 et le 4, on aura 13,428; les centaines seront devenues des dixaines, les dixaines des unités, les unités des dixièmes, les dixièmes des centièmes, les centièmes des millièmes. Toutes les parties du nombre étant devenues dix fois plus petites, c'est comme si l'on en avait pris le dixième, ou qu'on l'eût divisé par dix.

91. Il est facile de prévoir, d'après les considérations précédentes, l'avantage que les fractions décimales ont sur les fractions ordinaires: toutes les multiplications ou les divisions qu'il faut opérer par le dénominateur de celles-ci, s'effectuent dans les autres par l'addition, ou la suppression d'un certain nombre de zéros, ou par le simple déplacement de la virgule. En adaptant ces modifications à la théorie des fractions ordinaires, on en déduit sur-le-champ celle des fractions décimales, et la manière d'effectuer la multiplication et la division sur ces fractions; mais on peut y arriver directement par les considérations suivantes.

Je supposerai d'abord que le multiplicande seul ait des chiffres décimaux. Si l'on y fait abstraction de la virgule, il deviendra dix, cent, mille, etc., fois plus grand, suivant le nombre de ses chiffres décimaux; et le produit que donnera dans ce cas la multiplication, sera un pareil nombre de fois plus grand que celui qu'on cherchait : on obtiendra donc ce dernier en divisant l'autre par dix, cent, mille, etc.; ce qui s'effectuera en séparant sur sa droite (90), autant de chiffres décimaux qu'il y en avait dans le multiplicande.

Si, par exemple, on avait à multiplier 34,137 par 9, on formerait d'abord le produit de 34137 par 9, ce qui donnerait 307233; et comme la suppression de la virgule aurait rendu le multiplicande mille fois plus grand qu'il n'était, il faudrait diviser par mille le produit trouvé, ou séparer par une virgule, ses trois derniers chiffres à droite : on aurait ainsi 307,233.

En général, *pour multiplier par un nombre entier, un nombre accompagné de chiffres décimaux, on fait abstraction de la virgule dans celui-ci; mais on sépare sur la droite du produit autant de chiffres décimaux que le multiplicande en contient.*

92. Lorsque le multiplicateur contient des chiffres décimaux, et qu'on y fait abstraction de la virgule, on le rend, dix, cent, mille, etc., fois plus grand, selon le nombre de ses chiffres décimaux; en l'employant dans cet état, il donnera évidemment un produit dix, cent, mille, etc., fois plus grand que celui qu'on aurait dû avoir, et qu'on obtiendra par conséquent en divisant le premier par l'un de ces nombres; c'est-à-dire, en séparant sur la droite du produit autant de chiffres décimaux qu'en contient le multiplicateur, ou en avançant d'un pareil nombre de places, vers la gauche (90), la virgule qui se trouverait dans le produit, si le multiplicande avait aussi des décimales.

Soit pour exemple 172,84 à multiplier par 36,003; en faisant abstraction de la virgule dans le multiplicateur seulement, on aurait, d'après le numéro précédent, le produit 6222758,52; mais le multiplicateur se trouvant mille fois plus grand qu'il n'aurait dû l'être, il faudra diviser ce produit par mille, ou avancer la virgule de trois places vers la gauche, ce qui donnera 6222,75852 pour le produit demandé, dans lequel il se trouvera par conséquent autant de chiffres décimaux qu'il y en a, tant dans le multiplicande que dans le multiplicateur.

En général, *pour multiplier l'un par l'autre deux nombres accompagnés de chiffres décimaux, on fera abstraction de la virgule dans l'un et dans l'autre; mais on séparera sur la droite du produit, autant de chiffres décimaux qu'ils en contiennent tous deux.*

Dans certains cas, il faut mettre un ou plusieurs zéros sur la gauche du produit, pour lui donner le nombre des chiffres décimaux qu'il doit avoir suivant la règle précédente. Si l'on avait, par exemple, 0,624 à multiplier par 0,003, en formant d'abord le produit de 624 par 3, on aurait le nombre 1872 qui ne contient que quatre chiffres; et comme il faudrait séparer 6 chiffres décimaux, on ne pourrait le faire qu'en mettant à la gauche de ce nombre trois zéros, dont un tiendrait la place des unités, ce qui ferait 0,001872.

93. Il est évident (47) que le quotient de deux nombres ne dépend point de la grandeur absolue de leurs unités, pourvu que ce soit la même dans l'un et dans l'autre. S'il s'agissait donc de diviser 451,49 par 13, on observerait que le premier revient à 45149 centièmes, et le second à 1300 centièmes, et que ces derniers nombres doivent donner le même quotient que s'ils exprimaient des unités entières. On serait conduit ainsi

à supprimer la virgule dans le premier des nombres proposés, et à mettre deux zéros à la suite du second; et on n'aurait plus à diviser que le nombre 45149 par 1300, ce qui donnerait pour quotient $34\frac{949}{1300}$.

On conclura de là, que *pour diviser par un nombre entier, un nombre accompagné de chiffres décimaux, il faut supprimer la virgule dans celui-ci, mettre à la suite de l'autre autant de zéros que ce dividende contenait de chiffres décimaux; et il n'y aura rien à changer au quotient.*

94. Lorsque le dividende et le diviseur sont tous deux accompagnés de chiffres décimaux, on doit, avant de supprimer la virgule, mettre à la suite de celui des deux nombres qui a le moins de chiffres décimaux, assez de zéros pour qu'il se termine au même ordre de décimales que l'autre. Les deux nombres proposés étant alors rapportés aux mêmes parties de l'unité, donneront le même quotient que s'ils exprimaient des unités entières.

Soit, par exemple, 315,432 à diviser par 23,4; on changera ce dernier nombre en 23,400, et on divisera ensuite 315432 par 23400: le quotient sera $13\frac{11232}{23400}$.

Ainsi, *pour diviser l'un par l'autre, deux nombres accompagnés de chiffres décimaux, on met à la suite de celui qui en a le moins, autant de zéros qu'il en faut pour que le nombre des chiffres décimaux soit le même dans le dividende et dans le diviseur; on fait alors abstraction de la virgule, et il n'y a rien à changer au quotient.*

95. Comme on n'a recours aux décimales que pour éviter l'emploi des fractions ordinaires, il est naturel de s'en servir pour approcher des quotiens qu'on ne peut obtenir exactement, ce qui se fait en convertissant en dixièmes, centièmes, millièmes, etc., le reste, afin

qu'il puisse contenir le diviseur, comme on le voit dans l'exemple ci-dessous.

45149	1300
6149	34,73
Reste 949	
dixièmes. ...9490	
centièmes. ...3900	
0000	

Lorsqu'on est parvenu au reste 949, on y joint un zéro pour le multiplier par dix, ou le convertir en dixièmes ; on forme alors un nouveau dividende partiel composé de 9490 dixièmes, et donnant pour quotient 7 dixièmes qu'on écrit à la droite des unités, après avoir mis une virgule. Il reste encore 390 dixièmes que l'on réduit en centièmes, par l'addition d'un nouveau zéro, ce qui forme un second dividende composé de 3900 centièmes, et donnant au quotient 3 centièmes qu'on place à la suite des dixièmes. L'opération se termine là, et l'on a pour résultat exact 34,73 centièmes. Si elle avait laissé un troisième reste, on l'aurait poussée plus loin, en convertissant ce reste en millièmes, et en continuant toujours de même jusqu'à ce qu'on fût parvenu à un quotient exact, ou à un reste composé de parties assez petites pour qu'on pût les regarder comme de nulle importance.

Il est évident qu'il faut toujours, comme dans l'exemple ci-dessus, mettre une virgule après les unités entières du quotient, pour les distinguer des chiffres décimaux, dont le nombre doit être égal à celui des zéros successivement écrits à la suite des restes (*).

(*) L'opération que l'on vient d'effectuer sur les décimales n'est qu'un cas particulier de cette autre plus générale : *Évaluer le quotient d'une division, en fractions d'une espèce donnée* ; et pour

96. Le numérateur d'une fraction, étant converti en parties décimales, pourra se diviser par le dénominateur, comme dans l'exemple précédent, et par ce moyen la fraction sera convertie en décimales. Soit, pour exemple, la fraction $\frac{1}{8}$; on opérera comme ci-dessous.

1	8
10	0,125
20	
40	

Soit encore la fraction $\frac{4}{797}$; il faut d'abord convertir le numérateur en millièmes avant de pouvoir commencer la division écrite plus bas.

4	797
4000	0,005018
1500	
7030	
654	

(*)

97. Quelque loin qu'on pousse cette dernière division,

---

le faire, on convertit le dividende en fraction de la même espèce, en le multipliant par le dénominateur donné. Ainsi, pour évaluer en quinzièmes le quotient de 7 par 3, on multipliera 7 par 15, et on divisera le produit 105 par 3; on aura 35 quinzièmes ou $\frac{35}{15}$, pour le quotient demandé.

(*) On peut aussi se proposer de convertir une fraction donnée en fraction d'une autre espèce, mais plus petite que la première, de transformer, par exemple, $\frac{3}{4}$ en dix-septièmes; c'est à quoi l'on parviendra en multipliant 3 par 17, et divisant le produit par 4. On trouvera de cette manière $\frac{51}{4}$ de dix-septième, ou $\frac{12}{17}$ et $\frac{3}{4}$ de dix-septième; or $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{17}$ équivalent à $\frac{3}{68}$: le résultat $\frac{12}{17}$ est donc approché à $\frac{3}{68}$ près.

Cette opération et celle de la note précédente reposent sur le même principe que l'opération correspondante dans le système décimal.

on n'obtiendra jamais un quotient exact, parce que la fraction $\frac{4}{797}$ ne peut, comme la fraction $\frac{1}{8}$, s'exprimer rigoureusement avec les décimales.

Cette différence tient à ce que le dénominateur de la fraction, ne divisant point le numérateur, ne peut donner un quotient exact que lorsqu'il divise l'un des nombres 10, 100, 1000, etc., par lesquels on multiplie successivement ce numérateur, parce que c'est un principe qu'on trouvera démontré dans l'Algèbre, que tout nombre ne peut diviser un produit, qu'autant que ses facteurs premiers divisent ceux de ce produit. Or, les nombres 10, 100, 1000, etc., étant tous formés du nombre 10, dont les facteurs premiers sont 2 et 5, ne sont divisibles que par des nombres formés de ces mêmes facteurs; 8 est dans ce cas, puisqu'il résulte de 2 par 2 par 2.

Les fractions qui ne peuvent pas s'évaluer rigoureusement par des décimales, offrent dans leur expression approchée, lorsqu'on la pousse assez loin, un caractère qui sert à les faire retrouver; c'est le retour périodique des mêmes chiffres.

Si l'on convertit en décimales la fraction $\frac{12}{37}$, on trouvera 0,324324....., et les chiffres 3, 2, 4, reviendront toujours dans le même ordre, sans que l'opération puisse jamais s'arrêter.

En effet, comme il ne peut y avoir pour reste, dans chaque division, que l'un des nombres entiers qui précèdent le diviseur, il faut nécessairement, que quand on aura fait plus de divisions qu'il n'y a de ces nombres, on retombe sur quelqu'un des restes précédens, et que, par conséquent, les dividendes partiels reviennent dans le même ordre. Dans l'exemple ci-dessus, trois divisions suffisent pour amener ce retour; mais il en faudrait six pour la fraction $\frac{1}{7}$, parce qu'on trouverait alors pour restes les six nombres

qui sont au-dessous de 7, et il viendrait 0,142857.... La fraction $\frac{1}{3}$ conduit seulement à 0,3333.....

98. Les fractions qui ont pour dénominateur un nombre quelconque de 9, n'ont dans leur période que le chiffre significatif 1;

$\frac{1}{9}$ donne 0,1111.....
$\frac{1}{99}$..... 0,010101.....
$\frac{1}{999}$..... 0,001001001.....

et ainsi des autres, puisque chaque division partielle s'effectuant sur les nombres 10, 100, 1000, etc., laisse toujours pour reste l'unité.

En profitant de cette remarque, on passe aisément d'une fraction décimale périodique, à la fraction ordinaire dont elle dérive. On voit, par exemple, que 0,33333..... revient à la fraction 0,11111..... multipliée par 3; et comme cette dernière est le développement de $\frac{1}{9}$, on en conclut que la première est celui de $\frac{1}{9}$ multiplié par 3, ou de $\frac{3}{9}$, ou enfin de $\frac{1}{3}$.

Quand il s'agit des fractions dont la période est composée de deux chiffres, on les compare au développement de $\frac{1}{99}$, à celui de $\frac{1}{999}$ lorsque leur période renferme trois chiffres, et ainsi de suite.

Soit pour exemple 0,324324.....; il est évident que cette fraction se formerait en multipliant 0,001001..... par le nombre 324: en multipliant donc $\frac{1}{999}$, dont celle-ci est le développement, par 324, on aura $\frac{324}{999}$ pour la première; et les deux termes de ce résultat étant divisés par 27, on retombera sur la fraction $\frac{12}{37}$.

En général, *la fraction ordinaire d'où résulte une fraction décimale périodique, se forme en écrivant comme dénominateur, sous le nombre qu'exprime une période, autant de 9 qu'il y a de chiffres dans cette période.*

Si la période de la fraction ne commençait pas au premier chiffre décimal, on pourrait transporter, pour un moment, la virgule immédiatement avant son pre-

mier chiffre, et évaluer la fraction à partir de ce chiffre seulement, en considérant comme des unités ceux qui sont à gauche; il n'y aurait plus ensuite qu'à diviser le résultat par 10, 100, 1000, etc., d'après le nombre de places dont on aurait reculé la virgule vers la droite.

La fraction 0,324141....., par exemple, s'écrira d'abord ainsi 32,4141.....; la partie 0,4141.... répondant à $\frac{41}{99}$, on aura le résultat $32\frac{41}{99}$, qu'il faudra diviser par 100, puisque la virgule a été reculée de deux places vers la droite, et il viendra en conséquence $\frac{32}{100}$ et $\frac{41}{9900}$, ou, en réduisant au même dénominateur, $\frac{3209}{9900}$, fraction qui reproduirait le développement proposé.

Pour se former une idée bien exacte de la nature de ces expressions, il suffit de considérer la fraction 0,999..... En cherchant à remonter à sa valeur primitive, on trouve qu'elle répond à 9 divisé par 9, ce qui n'est autre chose que l'unité; cependant, quel que soit le nombre des chiffres auquel on s'arrête dans son expression, on ne formera jamais l'unité. Si l'on se borne au premier, il s'en faudra de $\frac{1}{10}$, au second de $\frac{1}{100}$, au troisième de $\frac{1}{1000}$, et ainsi de suite : en sorte que l'on peut arriver aussi près de l'unité que l'on voudra, mais sans jamais l'atteindre. L'unité n'est donc ici qu'une *limite* dont l'expression 0,999..... approche d'autant plus qu'on y insère plus de chiffres.

99. Ce qui précède renferme les règles vraiment essentielles de l'arithmétique des nombres abstraits; mais pour les appliquer aux usages de la société, il faut connaître les diverses unités dont on se sert pour comparer entre elles, ou évaluer les quantités, sous quelque forme qu'elles se présentent. Ces unités, qui sont les *mesures* en usage, ont varié avec les temps et les lieux; leur enchaînement ne s'est formé que peu à peu, selon

que le besoin et le progrès des arts et des sciences ont obligé de mettre plus d'exactitude dans l'appréciation des matières et dans la construction des instrumens.

Après avoir montré pendant long-temps les inconvéniens d'un système composé de parties incohérentes, et dont le défaut de liaison mettait dans les calculs une complication inutile et même nuisible à l'instruction générale, les plus illustres Savans français ont enfin obtenu l'établissement de nouvelles mesures liées entre elles, assujetties à la marche du système de numération, prises immédiatement sur les dimensions du globe que nous habitons, et sur la plus répandue des substances qu'il nous présente. L'étendue de ce Traité et la place qu'il occupe dans l'enseignement, ne me permettent pas de présenter l'extrait de tous les travaux scientifiques exécutés pour l'établissement de ce système, et qui en font le plus beau des monumens élevés à la gloire des sciences et à l'utilité publique dans le siècle dernier; je me bornerai à en exposer sommairement les principes et l'usage.

Exposition du nouveau système métrique, et applications usuelles de l'Arithmétique.

100. Les mesures prennent des formes et des noms différens, suivant l'espèce de grandeurs à laquelle on les applique. Ces grandeurs peuvent être classées ainsi :

Les longueurs, d'où naissent les mesures linéaires;

Les superficies ou les aires;

Les volumes ou les capacités, par lesquels on compare entre eux les corps, soit solides, soit liquides;

Enfin les pesanteurs ou les poids, qui servent aussi à la comparaison des corps.

L'unité de longueur ou l'unité linéaire s'appelle *mètre;*
L'unité de superficie, *are;*
L'unité de volume, *stère* ou *mètre cube* (*);
L'unité de capacité, *litre;*
L'unité de poids, *gramme.*

Pour composer des mesures plus grandes ou plus petites que les précédentes, on se sert des mots *myria, kilo, hecto, déca, déci, centi, milli, etc.* tirés du grec et du latin, et qui désignent respectivement des dixaines de mille, des mille, des centaines, des dixaines, des dixièmes, des centièmes, des millièmes, etc. Les mesures de longueur forment donc la série suivante : *myriamètre, kilomètre, hectomètre, décamètre,* MÈTRE, *décimètre, centimètre, millimètre, etc.*

Chacune de ces mesures est dix fois plus grande que celle qui la suit, et dix fois plus petite que celle qui la précède immédiatement dans l'ordre de la série.

Le *litre* est une mesure de capacité ; sa contenance équivaut au décimètre cube.

Les noms des mesures de capacité se composent comme ceux des mesures de longueur ; ainsi on dira : *hectolitre, décalitre,* LITRE, *décilitre, centilitre, etc.*

Le *gramme* est un poids égal au poids d'un centimètre cube d'eau pure (**). Le *myriagramme*, le *kilogramme*, l'*hectogramme*, le *décagramme*, le GRAMME, le *décigramme*, le *centigramme, etc.*, forment une série décimale, de même que les autres mesures.

(*) On nomme *cube* un corps terminé par six faces quarrées et égales.

(**) Pour obtenir plus d'exactitude dans la détermination de cette unité, on s'est servi d'eau distillée, qu'on a ramenée à son *maximum* de densité, par un refroidissement convenable.

TABLEAU DES MESURES DÉCIMALES,

montrant le système méthodique de leur nomenclature.

RAPPORTS DES MESURES de chaque espèce A LEUR MESURE PRINCIPALE.		PREMIÈRE PARTIE du nom qui indique le rapport à la mesure principale.	MESURES PRINCIPALES					EXEMPLES DES NOMS COMPOSÉS pour exprimer différentes unités de mesures.
EN LETTRES.	EN CHIFFRES.		DE LONGUEUR.	DE CAPACITÉ.	DE POIDS.	AGRAIRE.	POUR LE BOIS de chauffage.	
Dix mille...	10000	Myria.....(M.)						MYRIAMÈTRE, longueur de dix mille mètres.
Mille.....	1000	Kilo.....(K.)						KILOGRAMME, poids de mille grammes.
Cent.....	100	Hecto.....(H.)						HECTARE, mesure agraire de cent ares.
Dix.....	10	Déca.....(D.)						DÉCALITRE, mesure de capacité de dix litres.
Un.....	1	.....	MÈTRE (mè.)	LITRE (li.)	GRAMME (gr.)	ARE (ar.)	STÈRE (st.)	DÉCIMÈTRE, dixième partie du mètre.
Un dixième.	0,1	Déci.....(d.)						CENTIGRAMME, centième partie du gramme.
Un centième.	0,01	Centi.....(c.)						
Un millième.	0,001	Milli.....(m.)						
Rapports des mesures principales entre elles et avec la grandeur du Méridien.			Dix-millionième partie de la distance du pôle à l'équateur.	Un décimètre cube.	Poids d'un centimètre cube d'eau distillée.	Cent mètres quarrés.	Un mètre cube.	*Nota.* Plusieurs composés, tels que *décare*, *hilitre*, et tous ceux qui sont formés avec le stère, ne sont point d'usage.

L'unité monétaire s'appelle TRANC.

Le franc se divise en dix DÉCIMES,

Et le décime en dix CENTIMES.

La valeur du franc est celle d'une pièce d'argent à neuf dixièmes de fin, pesant cinq grammes.

L'*are* est une mesure de superficie, égale au décamètre quarré, c'est-à-dire à un quarré dont le côté serait un décamètre, ou bien encore à cent mètres quarrés. Il n'y a que deux multiples de l'are qui paraissent avoir quelque utilité : l'un est l'*hectare*, qui vaut cent *ares ;* l'autre est le *myriare*, qui en vaut dix mille.

Le *stère* pour le bois de chauffage est un mètre cube, ce qui suppose des bûches de la longueur d'un mètre, placées dans un châssis quarré, d'un mètre de côté, ou tout autre arrangement équivalent. Les composés du stère ne paraissent pas devoir servir aux usages ordinaires.

Enfin, les unités de monnaie sont connues maintenant sous le nom de *franc*, de *décime*, de *centime*. Leurs valeurs relatives sont également de dix en dix fois plus petites.

Le franc a été formé sur une pièce d'argent du poids de 5 grammes, et alliée de $\frac{1}{10}$ de cuivre (*).

Le tableau ci-joint est très propre à faire sentir les avantages de l'uniformité introduite dans la nomenclature des multiples et des subdivisions des mesures prises pour unités. A côté de chaque nom se trouve, entre parenthèses, l'abréviation proposée par M. Dillon, alors vérificateur général des poids et mesures.

101. Toutes les questions dans lesquelles il s'agit de

(*) Un caractère essentiel qui assure à ce système la supériorité sur tout ce qui a été fait en ce genre, c'est que toutes les mesures sont liées entre elles, et ont un rapport immédiat avec les dimensions mêmes du sphéroïde terrestre. Le mètre est la dix-millionième partie de la distance du pôle à l'équateur, comptée sur le méridien qui passe à Paris. L'arc de ce méridien, qui traverse la France, ayant été mesuré avec une exactitude inconnue jusqu'ici, et calculé avec la plus grande précision par les méthodes de M. Delambre, on en a conclu la distance qui se trouve entre le pôle et l'équateur, d'après laquelle on a formé le mètre.

réunir en un seul plusieurs nombres d'une même espèce de mesures, se rapportent évidemment à l'addition.

Ainsi, pour savoir ce qu'ont produit trois marchés dans lesquels on a vendu successivement pour $1334^{fr.},45$, $1951^{fr.},17$, $183^{fr.},11$ d'une certaine denrée, il suffit d'ajouter les trois nombres ci-dessus, et la réponse à la question proposée se trouvera dans le total $3468^{fr.},73$.

Je suppose encore qu'on achète quatre pièces d'étoffe dont les longueurs soient exprimées par $217^{mè},43$ $97^{mè},21$, $194^{mè},07$, $51^{mè},34$; la somme de ces nombres, exprimée par $560^{mè},05$, donnera la quantité totale d'étoffe.

L'application de la soustraction est trop facile pour m'y arrêter.

102. Il est visible que c'est avec le secours de la multiplication qu'on trouve la valeur d'un nombre donné de choses de même espèce et de même valeur, lorsqu'on connaît cette dernière, qu'il s'agit alors de répéter autant de fois qu'il y a de choses, quelles que soient ces choses.

On voit que le produit ne dépend pas de l'espèce des unités du multiplicateur, mais qu'il est de celle du multiplicande, et que le multiplicateur doit être envisagé comme un nombre abstrait. Cette considération sert à déterminer dans une multiplication de nombres concrets, celui qu'on doit prendre pour multiplicateur.

Si, par exemple, le mètre d'une certaine étoffe coûte $19^{fr.},25$, et que l'on demande le prix d'une pièce contenant $37^{mè},14$, il suffira de multiplier $19^{fr.},25$ par $37,14$; le produit $714^{fr.},95$ sera le prix demandé.

En effet, il est évident que le prix de la pièce doit être composé avec celui du mètre, de la même manière que la longueur de cette pièce est composée avec le mètre. Ainsi, la pièce contenant 37 fois le mètre plus $\frac{14}{100}$ de cette mesure, doit coûter 37 fois $19^{fr.},25$ plus

$\frac{14}{100}$ de ce prix; il faut donc multiplier $19^{fr.},25$ par 37 et $\frac{14}{100}$, et ces deux opérations sont réunies en une seule lorsqu'on prend 37,14 pour multiplicateur.

On peut encore concevoir l'opération sous ce point de vue, fort simple : en regardant d'abord la somme de $19^{fr.},25$ comme le prix du centimètre d'étoffe, c'est-à-dire de l'unité du dernier ordre du multiplicateur, il devient évident que le prix total doit s'obtenir en répétant 3714 fois la somme de $19^{fr.},25$; mais 3714 étant un nombre cent fois plus grand que le véritable multiplicateur 37,14, on ramènera le produit à sa juste valeur, en prenant la centième partie, ou séparant deux chiffres décimaux de plus.

Enfin, en troisième lieu, on reconnaît sans peine que le prix du mètre étant de $19^{fr.},25$, celui de l'unité du dernier ordre du multiplicateur ou du centimètre, dans l'exemple actuel, devant en être la centième partie, sera exprimé par $0^{fr.},1925$, et l'on aura le prix de $37^{m\acute{e}},14$, ou 3714 centimètres, en multipliant $0^{fr.},1925$ par 3714.

103. Cette manière d'envisager la question repose sur la facilité de convertir, les unes dans les autres, les subdivisions d'une même espèce de mesures, par le simple changement de place de la virgule, suivant les remarques du numéro 90. Si l'on voulait, par exemple, convertir $314^{m\acute{e}},513$ en décimètres, il suffirait de reculer la virgule d'un rang vers la droite, ce qui donnerait $3145^{dm\acute{e}},13$, puisqu'alors on prendrait le décimètre pour l'unité.

En supprimant la virgule, les millimètres deviennent des unités, et l'on a par conséquent le nombre de millimètres contenus dans la grandeur proposée, exprimé par $314513^{mm\acute{e}}$.

104. On reviendrait de cette dernière subdivision à

celles qui la précèdent, c'est-à-dire au centimètre, au décimètre, au mètre, en séparant successivement une, deux ou trois décimales. Si l'on en séparait quatre, on prendrait le décamètre pour unité, et l'on aurait $31^{Dm\acute{e}},4513$; continuant de la même manière, il viendrait $3^{Hm\acute{e}},14513$, etc.

Ces considérations et celles du numéro précédent s'appliqueraient sans peine à toute autre espèce de mesures du système décimal, et offrent un des plus grands avantages de ce système.

105. Je vais indiquer à présent quelques usages de la division. Elle sert premièrement à résoudre toutes les questions du genre de la suivante : *Connaissant ce qu'a coûté un certain nombre de choses de la même valeur, trouver cette valeur?* Cela se voit en observant que le prix connu est nécessairement le produit du prix d'une chose, multiplié par le nombre des choses (102); car il résulte de là qu'en divisant ce produit par le facteur connu, qui est le nombre des choses, on doit obtenir pour quotient l'autre facteur, ou le prix d'une seule chose (36).

Je suppose, par exemple, qu'ayant payé $19^{m\acute{e}},13$ d'étoffe, $315^{fr.},45$, on demande à combien revient le mètre? Pour le trouver on divisera $315^{fr.},45$ par 19,13; on obtiendra $16^{fr.},49$.

On parviendrait encore au même résultat, si l'on convertissait $19^{m\acute{e}},13$ en 1913 centimètres, et qu'on divisât $315^{fr.},45$ par 1913; on aurait alors le prix du centimètre, qu'il faudrait multiplier ensuite par 100 pour avoir celui du mètre : or il est évident qu'en employant un diviseur tel que 19,13, cent fois plus petit que 1913, on obtiendra un quotient cent fois plus grand, et par conséquent égal à celui qu'on cherche. En divi-

sant donc $315^{fr.},45$ par 19,13, on trouvera $16^{fr.},49$ pour le prix du mètre d'étoffe.

106. Voici une seconde question dans laquelle le dividende et le diviseur sont tous deux de même nature, et où le quotient est d'une nature différente.

On demande combien, pour $529^{fr.},35$, l'on aura de kilogrammes d'une certaine marchandise qui coûte $14^{fr.},5$ le kilogramme ? Il est clair que le nombre cherché est composé avec le kilogramme (son unité), comme $529^{fr.},35$ l'est avec $14^{fr.},5$, prix du kilogramme. Si donc on divise 529,35 par 14,5, le quotient 36,50689 sera des kilogrammes et des subdivisions de cette espèce d'unités.

107. L'emploi des fractions s'offre de lui-même par l'énoncé des questions. Si, par exemple, il fallait évaluer les $\frac{3}{4}$ de $219^{fr.},6$, on aurait à multiplier $219^{fr.},6$ par $\frac{3}{4}$, c'est-à-dire à multiplier ce nombre par 3, et à diviser ensuite le résultat par 4, ce qui donnera $164^{fr.},7$ (75).

On pourrait multiplier beaucoup les diverses questions qui se résolvent par les quatre règles, mais ce soin est inutile; car l'application de ces règles ne saurait présenter aucune difficulté, lorsque l'on comprend bien la définition et le but de chacune.

Des Proportions.

108. On a vu, dans ce qui précède, les diverses méthodes nécessaires pour effectuer sur les nombres, soit entiers, soit fractionnaires, les quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique, l'addition, la soustraction, la multiplication et la division; et toutes les questions relatives aux nombres doivent être regardées comme résolues, lorsque, par l'examen attentif de leur énoncé, on est parvenu à les réduire à quelques-unes de ces

opérations. Je pourrais en conséquence terminer ici ce que j'ai à dire sur l'Arithmétique ; car le reste est, à proprement parler, du ressort de l'Algèbre : mais cependant je vais résoudre quelques questions qui, en exerçant les lecteurs sur ce qu'ils ont déjà vu, les prépareront à l'analyse algébrique, et les conduiront à une théorie bien importante, celle des rapports et des proportions, que l'on comprend ordinairement dans l'Arithmétique.

109. *Une pièce de drap contenant* 13 *mètres a été payée* 130 *francs : on demande combien coûterait une pièce du même drap, qui aurait* 18 *mètres de longueur ?*

Il est évident que si l'on savait à combien revient le mètre du drap qu'on a acheté, on répéterait ce prix dix-huit fois, et on aurait pour résultat le prix de la pièce composée de 18 mètres ; or, puisque 13 mètres ont coûté 130 fr., un mètre seul aurait coûté la treizième partie de 130 fr. ou $\frac{130}{13}$: faisant la division, on trouve pour résultat 10 fr., et multipliant ce nombre par 18, il vient 180 fr. pour la somme demandée. Telle est, en effet, la valeur de la pièce de dix-huit mètres.

Un courrier qui va toujours également vite, ayant fait 5 *myriamètres en* 3 *heures, on demande combien il en ferait en* 11 *heures ?*

En raisonnant comme dans l'exemple précédent, on voit que ce courrier ferait en une heure, $\frac{1}{3}$ de 5 myriamètres, ou $\frac{5}{3}$, et que dans 11 heures il en ferait 11 fois plus, ou $\frac{5}{3}$ de myriamètre multipliés par 11, ou enfin $\frac{55}{3}$, ce qui vaut 18 myriamètres et $\frac{1}{3}$.

Je suppose encore qu'*on demande dans combien de temps le courrier de la question précédente ferait* 22 *myriamètres* ?

On voit que si l'on connaissait le temps qu'il met à

faire un myriamètre, on répéterait ce temps 22 fois, et l'on aurait pour résultat le nombre d'heures cherché; or le courrier dont il s'agit, mettant 3 heures à faire 5 myriamètres, n'emploiera que $\frac{1}{5}$ de ce temps, ou $\frac{3}{5}$ d'heure, pour faire un myriamètre : ce nombre étant multiplié par 22, donne $\frac{66}{5}$ ou 13 heures $\frac{1}{5}$; et comme l'heure est de 60 minutes, on aura 13 heures 12 minutes au lieu de 13 heures et $\frac{1}{5}$.

110. C'est par l'analyse de chacun des énoncés précédens, que j'ai découvert la quantité inconnue; mais dans toutes ces questions, les nombres connus et les nombres cherchés dépendent les uns des autres d'une manière qu'il est à propos d'examiner.

Pour cela, je reprends la première question, dans laquelle il s'agit de connaître le prix de 18 mètres de drap, dont 13 ont été payés 130 fr.

Il est évident que la somme à payer pour une pièce de l'étoffe dont il s'agit, deviendrait double si cette pièce contenait un nombre de mètres double du premier; que si ce nombre devenait triple, le prix triplerait aussi, et ainsi de suite; enfin, que pour la moitié ou les $\frac{2}{3}$ de la pièce, on n'aurait à payer que la moitié ou les deux tiers du prix total.

D'après ces notions, que tous ceux qui entendent la propriété des termes admettent sans difficulté, on voit que si l'on a deux pièces du même drap, le prix de la seconde doit contenir celui de la première autant que la longueur de la seconde contient celle de la première; et cette circonstance s'énonce en disant que les prix sont en *proportion* des longueurs, ou sont entre eux dans le même *rapport* que les longueurs.

Cet exemple va servir à fixer le sens de plusieurs expressions qui reviennent souvent.

111. Le *rapport* des longueurs est le nombre, entier, soit fractionnaire, qui exprime combien de fois des longueurs contient l'autre. Si la première a 4 mètres et la seconde 8, le rapport de celle-ci à l'autre serait 2, puisque 8 contient 4 deux fois. Dans l'exemple ci-dessus, la première pièce ayant 13 mètres et la seconde 18, le rapport de celle-ci à l'autre est donc $\frac{18}{13}$, ou $1\frac{5}{13}$. En général, *le rapport ou la raison de deux nombres, est le quotient de l'un par l'autre.*

Les prix ayant entre eux le même rapport que les longueurs, il faut que 180, prix de la seconde pièce, étant divisé par 130, prix de la première, donne $\frac{18}{13}$ pour quotient, et c'est ce qui a lieu en effet; car en réduisant $\frac{180}{130}$ à sa plus simple expression, on a $\frac{18}{13}$.

Les quatre nombres 13, 18, 130, 180, écrits dans l'ordre où on les voit ici, sont donc tels, que *le deuxième contient le premier, autant de fois que le quatrième contient le troisième;* et ils forment ainsi ce qu'on appelle une *proportion.*

Les nombres 13, 18, 130 et 180, se nomment les termes de la proportion.

On dit aussi qu'*une proportion est l'assemblage de deux rapports égaux.*

Il faut observer à cette occasion, qu'un rapport ne change pas lorsqu'on multiplie ou qu'on divise ses deux termes par un même nombre; et cela est évident, puisque ce rapport n'étant que le quotient d'une division, peut toujours être mis sous une forme fractionnaire. C'est ainsi que le rapport $\frac{18}{13}$ est le même que $\frac{180}{130}$.

Les mêmes considérations s'appliquent encore au deuxième exemple. Le courrier qui fait 5 myriamètres en 3 heures, ferait un chemin double dans un temps double, triple dans un temps triple; ainsi, 11 heures,

nombre qui exprime le temps que ce courrier a employé pour faire 18 myriamètres et $\frac{1}{3}$, ou $\frac{55}{3}$ de myriamètre, doit contenir 3 heures, nombre qui marque le temps qu'il met à faire 5 myriamètres, autant que $\frac{55}{3}$ contient 5 : les quatre nombres 5, $\frac{55}{3}$, 3, 11, sont donc en proportion; et en effet, si l'on divise $\frac{55}{3}$, par 5, on aura $\frac{55}{15}$, résultat équivalent à $\frac{11}{3}$. Il sera facile maintenant de reconnaître tous les cas où il y aura proportion entre quatre nombres.

112. Pour indiquer qu'il y a proportion entre les nombres 13, 18, 130 et 180, on les écrit ainsi : 13 : 18 :: 130 : 180 ; et on énonce : 13 *est à* 18 *comme* 130 *est à* 180; ce qui veut dire que 13 est la même partie de 18, que 130 l'est de 180, ou que 13 est contenu dans 18 autant de fois que 130 l'est dans 180, ou enfin que le rapport de 18 à 13 est le même que celui de 180 à 130.

Le premier terme d'un rapport s'appelle *antécédent*, et le second se nomme *conséquent*. Dans une proportion, il y a deux *antécédens* et deux *conséquens*, savoir, l'antécédent du premier rapport et celui du second, le conséquent du premier rapport et celui du second. Dans la proportion 13 : 18 :: 130 : 180, les antécédens sont 13, 130, les conséquens sont 18 et 180.

Je continuerai de prendre le conséquent du rapport pour le numérateur de la fraction qui exprime le rapport, et l'antécédent pour le dénominateur.

113. Pour s'assurer qu'il y a proportion entre les quatre nombres 13, 18, 130 et 180, il faut voir si les fractions $\frac{18}{13}$ et $\frac{180}{130}$ sont égales, et pour cela, réduire la seconde à sa plus simple expression; mais on peut aussi faire la même vérification en observant que si les deux fractions $\frac{18}{13}$ et $\frac{180}{130}$ sont équivalentes comme on le suppose, il s'ensuit qu'en les réduisant au même

dénominateur, le numérateur de l'une de [illegible] égal à celui de l'autre, et que par conséquent [illegible] par 130 donnera le même produit que [illegible] C'est ce qui a lieu, en effet; et le raisonnement fait connaître, étant indépendant de la particulière des nombres, prouve que *si quatre nombres sont en proportion, le produit du premier et du dernier, ou des deux extrêmes, est égal à celui du second et du troisième, ou des deux moyens.*

On voit en même temps que si les quatre nombres proposés n'étaient pas en proportion, ils n'auraient pas la propriété énoncée ci-dessus; car la fraction qui exprime le premier rapport n'étant pas équivalente à celle qui exprime le second, le numérateur de l'une ne deviendrait pas égal à celui de l'autre, lorsqu'on les réduirait toutes deux au même dénominateur.

114. La première conséquence qui se déduit naturellement de ce qui précède, c'est qu'on peut changer l'ordre des termes d'une proportion, pourvu que celui qu'on établit soit tel, que le produit des extrêmes demeure égal à celui des moyens. Dans la proportion 13 : 18 :: 130 : 180, on peut donc faire les arrangemens suivans :

13 : 18 :: 130 : 180
13 : 130 :: 18 : 180
180 : 130 :: 18 : 13
180 : 18 :: 130 : 13
18 : 13 :: 180 : 130
18 : 180 :: 13 : 130
130 : 13 :: 180 : 18
130 : 180 :: 13 : 18;

car dans chacun d'eux le produit des extrêmes et le produit des moyens demeurent formés des mêmes fac-

teurs. Le second arrangement, dans lequel les moyens ont changé de place entre eux, est un de ceux qui se pratiquent le plus souvent (*).

115. Il fait voir qu'on peut multiplier ou diviser par un même nombre, les deux antécédens ou les deux conséquens d'une proportion sans la troubler; car ce changement fait des deux antécédens le premier rapport, et des deux conséquens le second. Si l'on avait, par exemple, 55 : 21 :: 165 : 63, en changeant les moyens de place, il viendrait 55 : 165 :: 21 : 63; on pourrait alors diviser les deux termes qui forment le premier rapport par le nombre 5 (111), ce qui donnerait 11 : 33 :: 21 : 63; changeant de nouveau les moyens de place, on trouverait 11 : 21 :: 33 : 63, proportion qui est elle-même vraie, et qui ne diffère de la proposée qu'en ce que les deux antécédens ont été divisés par 5.

116. Puisque le produit des extrêmes est égal à celui des moyens, on peut prendre l'un pour l'autre; et comme en divisant le produit des extrêmes par un extrême, on trouverait nécessairement l'autre au quo-

(*) Je crois à propos d'observer que la proportion 13 : 130 :: 18 : 180 se serait présentée immédiatement sous cette forme, d'après la solution même de la question du numéro 109; car on peut avoir la valeur d'un mètre de drap de deux manières, savoir : en divisant le prix de la pièce de 13 mètres par 13, ou en divisant celui de la pièce de 18 mètres par 18. Il suit donc de là que le prix de la première doit contenir 13 autant que le prix de la seconde contient 18; on aura donc 13 : 130 :: 18 : 180. On pourrait raisonner de même sur la deuxième question du même numéro, ainsi que sur toutes celles de ce genre, et dériver de là les proportions; mais j'ai préféré le point de vue du numéro 109, parce qu'il conduit à comparer entre elles des quantités de même espèce, tandis qu'ici il faut comparer les prix, qui sont des sommes d'argent, à des mètres, qui sont des mesures de longueur, ce qui ne peut se faire qu'en considérant les uns et les autres comme des nombres abstraits.

tient, *il faudra qu'en divisant le produit des moyens par un extrême, on trouve de même l'autre extrême.* Par la même raison, *si l'on divise le produit des extrêmes par un des moyens, on obtiendra l'autre moyen.*

On peut donc trouver un terme quelconque d'une proportion, lorsqu'on connaît les trois autres; car le terme cherché ne peut être que l'un des extrêmes ou l'un des moyens.

La question du n° 109 se résout par l'une des règles ci-dessus. En effet, lorsqu'on a reconnu que les prix des deux pièces de drap sont en proportion avec le nombre de mètres contenus dans chacune, on écrit ainsi cette proportion :

$$13 : 18 :: 130 : x,$$

en mettant la lettre x pour tenir la place du prix cherché de la pièce de 18 mètres; et on trouve ce prix, qui est l'un des extrêmes, en multipliant entre eux les deux moyens 18 et 130, ce qui donne 2340, et en divisant ce produit par l'extrême connu 13 : on a pour résultat 180.

L'opération par laquelle trois quelconques des termes d'une proportion étant donnés, on trouve le quatrième, s'appelle *règle de trois*. Les auteurs de la plupart des livres d'Arithmétique en ont distingué de plusieurs espèces; mais cet échafaudage est inutile lorsque l'on a bien conçu ce qui constitue la proportion, et qu'on entend bien l'énoncé de la question proposée. Quelques applications vont éclaircir ceci.

117. Un ouvrier ayant fait $217^{mé},5$ d'ouvrage en 9 jours, on demande combien il mettrait de temps à en faire 423,9, en supposant qu'il travaillât toujours de la même manière?

Dans cette question, l'inconnue est un nombre de jours qui doit contenir les 9 jours employés à faire

$217^{mt},5$ autant que 423,9 contient 217,5; on a donc la proportion suivante : 217,5 : 423,9 :: 9 : x, et on trouve pour x, 17,54.

118. Toute la difficulté des questions qu'on peut rencontrer, ne consiste que dans la manière d'établir la proportion; et voici des règles sûres pour la former dans tous les cas.

Parmi les quatre termes qui doivent composer la proportion, il y a deux nombres qui sont d'une même espèce, et deux nombres qui sont aussi d'une même espèce, mais différente de la première. Dans l'exemple précédent, deux des termes exprimaient des mètres, et les autres des jours.

Il faut donc d'abord distinguer les deux termes de chaque espèce; et quand cela sera fait, on aura nécessairement le quotient du plus grand terme de la seconde espèce divisé par le plus petit terme de cette espèce, égal au quotient du plus grand terme de la première espèce, divisé par le plus petit de cette espèce, ce qui donnera cette proportion :

le plus petit terme de la première espèce
est
au plus grand terme de cette espèce,
comme
le plus petit terme de la seconde espèce
est
au plus grand de cette espèce.

Dans l'exemple précédent, cette règle donne tout de suite, 217,5 : 423,9 :: 9 : x; car le terme inconnu doit être plus grand que 9, puisqu'il faut d'autant plus de jours qu'il y a plus d'ouvrage à faire.

119. Si l'on s'était proposé de trouver combien 27 ouvriers mettraient de jours à exécuter un ouvrage que 15

ouvriers, qui travaillaient autant que ceux-ci, ont fait en 18 jours, on verrait qu'il faut d'autant moins de jours qu'il y a plus d'ouvriers, et réciproquement. Il y a bien encore proportion dans ce cas, mais d'un ordre inverse; car si le nombre des ouvriers de la seconde bande était triple de celui de la première, par exemple, il ne leur faudrait que le tiers du temps employé par ceux-ci : ce serait donc le premier nombre de jours qui devrait contenir le second, autant que le second nombre d'ouvriers contient le premier.

L'ordre dans lequel ces quantités se contiennent étant l'inverse de celui qui leur est assigné par l'énoncé de la question, on dit que les deux nombres d'ouvriers sont en *raison inverse* des nombres de jours. Si l'on comparait les deux premiers et les deux derniers dans l'ordre où ils se présentent, le rapport des uns serait 3 ou $\frac{3}{1}$, et celui des autres serait $\frac{1}{3}$, fraction inverse de $\frac{3}{1}$.

On voit bien en effet qu'on renverse un rapport en renversant la fraction qui l'exprime, puisqu'on fait ainsi passer l'antécédent à la place du conséquent, et le conséquent à la place de l'antécédent : $\frac{2}{3}$ ou 2 : 3 est l'inverse de $\frac{3}{2}$ ou de 3 : 2.

La règle du numéro précédent simplifie beaucoup ces considérations; car en prenant les deux nombres d'ouvriers pour les quantités de la première espèce, les deux nombres de jours pour celles de la seconde, et posant les unes et les autres d'après leur ordre de grandeur, on a cette proportion :

$$15 : 2[illegible] :: x : 18,$$

de laquelle on tire [illegible]

120. Voici encore quelques exemples pour exercer le lecteur.

1°. Un homme a placé 3575 fr. dans un commerce, à raison de 5 pour cent d'intérêt par an; on demande à combien doit se monter, au bout d'un an, l'intérêt de son capital?

L'expression 5 pour 100 d'intérêt, qu'on écrit ainsi : 5 p. $\frac{0}{0}$, signifie qu'une somme de 100 fr. rapporterait 5 fr. au bout d'un an; en prenant donc les deux capitaux pour les quantités de la première espèce, et les intérêts pour celles de la seconde, on aura

$$100 : 3575 :: 5 : x,$$

proportion qui se réduit à $20 : 3575 :: 1 : x$, d'après l'observation du numéro 115 : divisant encore les deux termes du premier rapport par 5, on trouve enfin

$$4 : 715 :: 1 : x, \text{ d'où } x \text{ est égal à } \frac{715}{4} \text{ ou à } 178^{fr.},75.$$

On peut encore résoudre cette question en observant que 5 sont $\frac{1}{20}$ de 100, et que par conséquent on aura l'intérêt d'une somme quelconque à ce taux, en prenant le vingtième de cette somme; or $\frac{1}{20}$ de 3575 est $178^{fr.},75$, résultat conforme à celui qu'on a déjà trouvé ci-dessus.

2°. Un marchand a promis de payer 800 fr. dans un an; ne pouvant attendre ce terme, on passe son billet à un banquier huit mois avant l'époque du paiement : on demande combien doit donner le banquier? Celui-ci sortant de sa caisse une somme qui n'y doit rentrer que dans huit mois, il faut nécessairement qu'il trouve dans le remboursement qui lui sera fait alors, l'intérêt de ses fonds.

Que l'intérêt pour un an soit de 6 pour 100, l'intérêt pour huit mois en sera les $\frac{8}{12}$ ou les $\frac{2}{3}$: donc une somme de 100 fr. prêtée pour huit mois, doit produire 4 fr. d'intérêt, c'est-à-dire que celui qui l'a

empruntée doit rendre 104 fr. La somme avancée par le banquier n'étant qu'un semblable prêt, on aura la proportion :

$$104 \text{ fr.} : 100 \text{ fr.} :: 800 : x,$$

d'où il viendra $769^{fr.},23$ pour la valeur de x, c'est-à-dire pour la somme que le banquier doit donner (*).

Règle de trois composée.

121. La règle de trois s'applique encore à des questions dans lesquelles le rapport de la quantité cherchée à la quantité donnée de même espèce, dépend de plusieurs circonstances qu'il faut combiner, et elle prend alors le nom de *règle de trois composée*. En voici quelques exemples.

Je suppose que l'on demande combien de myriamètres parcourrait en 17 jours un voyageur marchant 10 heures par jour, lorsqu'on sait qu'il a employé 29 jours à faire 112 myriamètres, en marchant 7 heures par jour.

Cette question peut se résoudre de deux manières : voici celle qui donne lieu à la règle de trois composée.

Le nombre de myriamètres parcourus dans chaque cas dépend de deux circonstances, savoir : du nombre de jours de route du voyageur, et du nombre d'heures pendant lesquelles il marche chaque jour.

On peut d'abord faire abstraction de cette dernière,

(*) L'opération ci-dessus, qui s'appelle *règle d'escompte*, est réduite ordinairement à prélever l'intérêt de la somme entière portée sur le billet, ce qui ne répond pas à l'énoncé de la question, et n'est pas exact. Dans notre exemple, l'intérêt à 5 p. % monterait à 32 fr.; le banquier ne donnerait donc que 768 fr.

De cette manière l'escompte est *en dehors*, de l'autre il l'est *en dedans*, de la somme portée sur le billet.

et supposer que le nombre d'heures reste le même dans le second cas que dans le premier. Alors la question serait posée ainsi : *Un voyageur a mis 29 jours à faire 112 myriamètres ; combien en ferait-il en 17 jours ?* et l'on aurait la proportion

$$29\text{ j.} : 17\text{ j.} :: 112\text{ myr.} : x.$$

Le quatrième terme serait égal à 112 multiplié par 17 et divisé par 29, ou $\frac{1904}{29}$ myriamètres.

Maintenant, pour avoir égard à la différence des nombres d'heures de marche, on dirait : *Si, en marchant 7 heures par jour, pendant un certain nombre de jours, ce voyageur a fait* $\frac{1904}{29}$ *myriamètres, combien en ferait-il dans le même temps, s'il marchait 10 heures par jour ?* ce qui conduirait à la proportion

$$7\text{ h.} : 10\text{ h.} :: \frac{1904}{29}\text{ myriamètres} : x,$$

dont le quatrième terme donnerait 93,793 pour le nombre de myriamètres demandé.

La question se résoudrait aussi en observant que 29 jours de marche, à 7 heures par jour, équivalent à 203 heures de marche ; que 17 jours, à 10 heures par jour, donnent 170 heures, et que par conséquent le problème est ramené à cette proportion :

$$203\text{ h.} : 170\text{ h.} :: 112\text{ myr.} : x,$$

par laquelle on trouve le chemin que doit faire le voyageur en 170 heures, d'après celui qu'il a fait en 203.

122. Secondement, si 9 ouvriers, en travaillant 8 heures par jour, ont mis 24 jours à creuser un fossé de 65 mètres de longueur sur 13 de largeur et 5 de profondeur, combien faudrait-il de jours à 71 ouvriers de la même force que les premiers, et qui travailleraient 11 heures par jour, pour creuser un fossé de 327 mètres de longueur sur 18 de largeur et 7 de profondeur?

Voilà encore une question fort compliquée en apparence, et qui se résout également par la règle de trois.

Si tout, à l'exception du nombre de jours et du nombre d'hommes, était semblable dans les deux cas énoncés, la question se réduirait à trouver combien il faudrait de jours à 71 hommes pour faire l'ouvrage qu'ont effectué 9 hommes en 24 jours; on aurait donc (118)

$$9 : 71 :: x : 24 ;$$

mais ici, au lieu de calculer le nombre de jours, je me contente d'indiquer, comme dans le numéro 70, les nombres à multiplier entre eux, et de placer au dénominateur ceux par lesquels il faut diviser : j'ai ainsi pour le nombre x de jours,

$$\frac{24 \text{ par } 9}{71}.$$

Mais les premiers ouvriers ne travaillant que 8 heures par jour, tandis que les seconds en travaillent 11, il faudra d'autant moins de jours à ceux-ci; on aura donc

$$8 : 11 :: x : \frac{24 \text{ par } 9}{71},$$

d'où l'on conclura que le nombre de jours, dans cette circonstance, est

$$\frac{24 \text{ par } 9 \text{ par } 8}{71 \text{ par } 11}.$$

Ce nombre est celui des jours nécessaires aux 71 ouvriers, travaillant 11 heures par jour, pour creuser le premier fossé.

Les fossés étant d'inégales longueurs, il faudra d'autant plus de jours que le second fossé sera plus long que le premier; on aura ainsi

$$65 : 327 :: \frac{24 \text{ par } 9 \text{ par } 8}{71 \text{ par } 11} : x,$$

et le nombre de jours relatif à cette nouvelle circonstance sera

$$\frac{24 \text{ par } 9 \text{ par } 8 \text{ par } 327}{71 \text{ par } 11 \text{ par } 65}.$$

En ayant égard aux largeurs, qui ne sont pas les mêmes pour chaque fossé, j'ai

$$13 : 18 :: \frac{24 \text{ par } 9 \text{ par } 8 \text{ par } 327}{71 \text{ par } 11 \text{ par } 65} : x,$$

et par conséquent le nombre de jours cherché se change en

$$\frac{24 \text{ par } 9 \text{ par } 8 \text{ par } 327 \text{ par } 18}{71 \text{ par } 11 \text{ par } 65 \text{ par } 13}.$$

Enfin les profondeurs étant différentes, on a

$$5 : 7 :: \frac{24 \text{ par } 9 \text{ par } 8 \text{ par } 327 \text{ par } 18}{71 \text{ par } 11 \text{ par } 65 \text{ par } 13} : x$$

et le nombre de jours résultant du concours de toutes les circonstances, est

$$\frac{24 \text{ par } 9 \text{ par } 8 \text{ par } 327 \text{ par } 18 \text{ par } 7}{71 \text{ par } 11 \text{ par } 65 \text{ par } 13 \text{ par } 5}.$$

En effectuant les multiplications et les divisions, on arrivera au résultat cherché, 21 jours $\frac{1902871}{3299745}$.

123. Ce nombre est égal à 24 multiplié par la quantité fractionnaire

$$\frac{9 \text{ par } 8 \text{ par } 327 \text{ par } 18 \text{ par } 7}{71 \text{ par } 11 \text{ par } 65 \text{ par } 13 \text{ par } 5};$$

mais cette dernière quantité, qui exprime le rapport du nombre de jours donné au nombre de jours cherché, est elle-même le produit des fractions suivantes :

$$\frac{9}{71}, \frac{8}{11}, \frac{327}{65}, \frac{18}{13}, \frac{7}{5};$$

or, en remontant aux dénominations des nombres donnés dans l'énoncé de la question, on voit que $\frac{9}{71}$ est l'inverse du rapport des nombres d'hommes, qui, pris dans l'ordre de l'énonciation, serait 9 à 71, puisqu'il y a 9 hommes dans le premier cas et 71 dans le second; $\frac{8}{11}$ est pareillement l'inverse du rapport du nombre d'heures que chaque bande d'ouvriers doit travailler;

$$\frac{327}{65}, \frac{18}{13} \text{ et } \frac{7}{5},$$

sont les rapports directs des longueurs, des largeurs et des profondeurs des deux fossés. Il suit de là que le

rapport du nombre de jours donné au nombre de jours cherché, est égal au produit de tous les rapports directs et de tous les rapports inverses qui résultent de la comparaison des termes relatifs à chacune des circonstances de la question.

On résoudra la question très simplement, en évaluant d'abord chacun de ces rapports; car en multipliant entre elles les fractions qui les expriment, on formera celle qui représente le rapport de la quantité cherchée à la quantité donnée de même espèce.

Cette dernière fraction, qui sera le produit de tous les rapports qui entrent dans la question, aura pour numérateur le produit de tous leurs conséquens, et pour dénominateur celui de tous leurs antécédens. Un rapport qui résulte ainsi de la multiplication de plusieurs autres, s'appelle *rapport composé*.

En mettant l'expression fractionnaire

$$\frac{9 \text{ par } 8 \text{ par } 327 \text{ par } 18 \text{ par } 7}{71 \text{ par } 11 \text{ par } 65 \text{ par } 13 \text{ par } 5}$$

sous la forme d'un rapport, on en tirera, avec le nombre 24, des jours donnés, la proportion

$$71 \text{ par } 11 \text{ par } 65 \text{ par } 13 \text{ par } 5 : 9 \text{ par } 8 \text{ par } 327 \text{ par } 18 \text{ par } 7 :: 24 : x,$$

qu'il est aisé d'imiter dans tous les cas semblables.

Règle de Société.

124. Cette règle a pour objet de partager un nombre en parties qui aient entre elles des rapports donnés; on verra dans l'exemple suivant, son origine et d'où elle a tiré son nom.

Trois marchands se sont associés pour un commerce : le premier a mis 25000 fr., le second 18000,

et le troisième 42000; ils se séparent, et veulent partager entre eux le bénéfice commun, qui se monte à 57225 fr.; on demande combien chacun doit avoir pour sa part?

Pour résoudre cette question, il faut considérer que le gain de chacun d'eux doit être composé avec le gain total, comme sa mise l'est avec la somme des mises ou le fonds total; car celui qui aurait fourni à lui seul la moitié ou le tiers de ce fonds, par exemple, aurait évidemment droit à la moitié ou au tiers du gain. Dans l'exemple proposé, la somme des mises formant 85000 fr., les mises particulières en seront respectivement les

$$\frac{25000}{85000}, \quad \frac{18000}{85000}, \quad \frac{42000}{85000};$$

et en multipliant par ces fractions le gain total 57225 fr., on obtiendra le gain relatif à chaque mise. Il est d'ailleurs évident que la somme des parts égalera le gain total, puisque la somme des fractions ci-dessus ayant son numérateur égal à son dénominateur, est nécessairement l'unité.

Les opérations indiquées plus haut donnent les proportions

85000 : 25000 :: 57225 : au gain du premier march.
85000 : 18000 :: 57225 : au gain du second,
85000 : 42000 :: 57225 : au gain du troisième,

qui peuvent s'énoncer ainsi.

la mise totale : une mise particulière :: le gain total : au gain particulier.

En simplifiant le premier rapport de chacune de ces trois proportions, on a

25 :: 57225 : au gain du 1er ou 16830 fr. $\frac{75}{85}$.
18 :: 57225 : au gain du 2e ou 12118 fr. $\frac{45}{85}$.
42 :: 57225 : au gain du 3e ou 28275 fr. $\frac{75}{85}$.

Si toutes les mises étaient égales, l'opération se réduirait à diviser le gain total par le nombre des mises; on ramène la question à ce point dans l'exemple proposé, en concevant la mise totale 85000 fr., partagée en 85 mises partielles, ou *actions*, de 1000 fr. : le gain de chacune de ces mises, doit être évidemment la 85e partie du gain total; et il ne reste plus qu'à multiplier successivement cette partie par 25, 18 et 42, en considérant les mises 25000 fr., 18000 fr., 42000 fr., comme les réunions de 25 actions, de 18 actions et de 42 actions.

Il est bon de savoir qu'en terme de commerce, la mise totale se nomme *capital*, et le gain à partager *dividende*.

La question suivante a beaucoup d'analogie avec celle qui vient d'être résolue.

125. On demande de partager une succession de 67250 fr. entre trois héritiers, de manière que la part du second soit les $\frac{2}{5}$ de celle du premier, et que la part du troisième soit les $\frac{7}{8}$ de celle du second.

Il est évident que la part du troisième, comparée à celle du premier, en sera les $\frac{7}{8}$ des $\frac{2}{5}$, ou les $\frac{14}{40}$, ou les $\frac{7}{20}$; ces trois parts cherchées seront donc entre elles dans les mêmes rapports que les trois nombres 1, $\frac{2}{5}$ et $\frac{7}{20}$. En réduisant ceux-ci au même dénominateur, on trouvera $\frac{20}{20}$, $\frac{8}{20}$, $\frac{7}{20}$, et on aura les trois nombres 20, 8, 7, qui seront proportionnels aux premiers; mais leur somme étant 35, on voit que si l'on prend trois parts qui soient exprimées par les fractions $\frac{20}{35}$, $\frac{8}{35}$, $\frac{7}{35}$, elles seront entre elles dans les rapports demandés : la question sera donc résolue en prenant les $\frac{20}{35}$, puis les $\frac{8}{35}$, puis les $\frac{7}{35}$.

de 67250 fr., ce qui donnera les sommes dues aux héritiers, suivant la distribution prescrite, savoir :

$$38428 \text{ fr. } \tfrac{20}{35}, \quad 15371 \text{ fr. } \tfrac{15}{35}, \quad \text{et} \quad 13450 \text{ fr.}$$

126. Enfin soient deux fontaines, dont la première coulant seule pendant 2 heures et $\frac{1}{2}$, remplit un certain bassin, et dont la seconde remplit ce même bassin, en coulant seule pendant 3 heures $\frac{3}{4}$; on demande combien il faudra de temps pour qu'il soit rempli par les deux fontaines coulant à la fois?

Je cherche quelle partie du bassin la première fontaine remplit dans un temps donné, dans une heure, par exemple, et je vois qu'en prenant la capacité de ce bassin pour unité, je n'ai qu'à diviser 1 par $2\frac{1}{2}$ ou $\frac{5}{2}$, ce qui donne $\frac{2}{5}$ pour la partie cherchée. En divisant de même 1 par $3\frac{3}{4}$ ou $\frac{15}{4}$, j'obtiens $\frac{4}{15}$ pour la portion du bassin que la seconde fontaine fournit pendant une heure; les deux fontaines coulant ensemble donneront par conséquent les $\frac{2}{5}$ plus les $\frac{4}{15}$, ou les $\frac{10}{15}$ du bassin, pendant 1 heure : divisant donc 1, ou la capacité du bassin, par $\frac{10}{15}$, on aura le nombre d'heures qu'il mettra à se remplir de cette manière; et on trouvera ainsi $\frac{15}{10}$ ou une heure et demie.

Les auteurs qui ont écrit sur l'Arithmétique, ont multiplié et varié ces questions de beaucoup de manières, et ont érigé en règles les procédés qui servent à les résoudre; mais tous ces préceptes sont au moins inutiles, parce qu'une question de ce genre est toujours facilement résolue par celui qui sait développer les conséquences de l'énoncé, surtout lorsqu'il peut s'aider du secours de l'Algèbre; c'est pourquoi je ne m'y arrêterai pas davantage.

127. A l'instar des proportions qui sont composées

de quatre nombres, dont les deux premiers se contiennent autant que les deux derniers, on a considéré l'assemblage de quatre nombres tels que 2, 7, 9, 14, dont le deuxième surpasse le premier autant que le quatrième surpasse le troisième : ces nombres, qu'on peut appeler *équidifférens*, jouissent d'une propriété remarquable, analogue à celle de la proportion ; car la somme des termes extrêmes 2 et 14 est égale à celle des moyens 7 et 9 (*).

Pour prouver cette propriété en général, il faut observer que le second terme est égal au premier, plus la différence, et que le quatrième est égal au troisième plus la différence ; d'où il suit que la somme des extrêmes, composée du premier et du quatrième terme, sera égale au premier plus le troisième plus la différence. De même la somme des moyens, composée du deuxième et du troisième terme, sera égale au premier plus la différence plus le troisième. Ces deux sommes étant composées des mêmes parties, sont par conséquent égales.

J'ai supposé que le deuxième et le quatrième terme

(*) Les Anciens avaient très bien séparé la théorie des proportions des opérations de l'Arithmétique. Euclide donne cette théorie dans le cinquième livre de ses *Élémens ;* et comme il applique les proportions aux lignes, c'est apparemment de là qu'elles ont pris dans la suite le nom de *proportions géométriques*, et qu'on a donné le nom de *proportion arithmétique* à l'assemblage des nombres équidifférens, dont on ne s'est occupé que beaucoup plus tard. Ces dénominations sont très vicieuses ; le mot de *proportion*, dans notre langue, a un sens déterminé qui ne convient nullement aux nombres équidifférens. D'ailleurs, la proportion qu'on appelle *géométrique* n'est pas moins *arithmétique* que celle qui porte exclusivement ce nom. Lagrange, dans ses leçons à l'École Normale, a rectifié le langage à cet égard, et j'ai suivi son exemple.

L'*équidifférence*, ou l'assemblage de quatre nombres équidifférens, ou enfin la *proportion arithmétique*, s'écrit ainsi : 2.7 : 9.14.

étaient plus grands que le premier et le troisième; le contraire pourrait avoir lieu comme dans les quatre nombres 8, 5, 15, 12; alors le second terme serait égal au premier moins la différence, et le quatrième serait égal au troisième moins la différence. En changeant le mot *plus* en *moins*, dans le raisonnement précédent, on prouverait encore que, dans le cas actuel, la somme des extrêmes est égale à celle des moyens.

Je ne pousserai pas plus loin cette théorie des nombres équidifférens, parce qu'elle ne peut être d'aucun usage pour le moment.

Règle d'Alliage.

128. Je n'omettrai point la *règle d'alliage*, dont le but est de trouver la valeur moyenne de plusieurs choses de même espèce, mais de prix différens; les exemples suivans la feront suffisamment connaître.

Un marchand a acheté plusieurs espèces de vins, savoir : 130 bouteilles qui lui reviennent à 10 décimes chaque,

75	à 15,
231	à 12,
27	à 20;

et il les mêle ensuite : on demande à combien lui revient la bouteille du mélange. Il est aisé de voir qu'il n'y a qu'à évaluer ce que lui coûte la totalité de ce mélange, combien elle forme de bouteilles, et à diviser ensuite le premier de ces résultats par le second, pour avoir le prix cherché.

Or, les 130 bouteilles à 10 déc. font 1300 décimes

75	à 15	font 1125
231	à 12	font 2772
27	à 20	font 540

donc.... 463 bouteilles coûtent 5737 décimes.

Divisant 5737 par 463, le quotient 12,39 est le prix de la bouteille du mélange.

129. On se sert encore de la règle précédente pour prendre un milieu entre divers résultats donnés par l'expérience ou l'observation, et qui ne s'accordent point entre eux. S'il s'agissait, par exemple, de connaître exactement la distance de deux points assez éloignés, et qu'on la mesurât, quelque soin qu'on apportât dans cette opération, il y aurait toujours un peu d'incertitude dans le résultat, à cause des erreurs qu'on commet nécessairement dans la manière de poser les mesures à la suite les unes des autres.

Je suppose donc qu'on ait répété cette opération plusieurs fois de suite pour la vérifier, et que deux fois on ait trouvé $3794^{me},48$, que trois autres mesurages aient donné $3795^{me},27$, qu'on ait eu enfin un dernier résultat de $3793^{me},115$: ces divers nombres n'étant point les mêmes, il est évident qu'il y a erreur dans quelques-uns d'entre eux, et probablement dans tous; et pour l'atténuer, voici comme on raisonne. Si l'on avait obtenu chaque fois la vraie mesure, la somme des résultats serait égale à six fois cette mesure, et il est visible que la même chose aurait encore lieu si les résultats obtenus péchaient les uns par défaut, les autres par excès, de manière que l'augmentation produite par l'addition des excès compensât ce qui manque aux résultats moindres que la vraie valeur : on parviendrait donc, dans ce dernier

cas, à la vraie mesure, en divisant la somme des résultats par leur nombre.

Ce cas est trop particulier pour espérer qu'il se rencontre fréquemment; mais il arrive presque toujours que les erreurs dans un sens détruisent une partie de celles qui sont dans l'autre, et celle qui reste, se trouvant répartie également sur chacun des résultats, est d'autant plus diminuée, que le nombre des résultats est plus grand.

D'après ces considérations, on opérera ainsi qu'il suit :

On prendra	2 fois 3794,48	ou	7588,96
	3 fois 3795,27	ou	11385,81
	1 fois 3793,115	ou	3793,115

6 résultats donnant en tout 22767,885.

Divisant 22767,885 par 6, on trouvera que la valeur moyenne de la distance demandée est $3794^{m\acute{e}},647$.

Au reste, c'est au calcul des probabilités qu'il faut avoir recours pour discuter et apprécier les avantages et les inconvéniens de cette méthode; et ce sujet a occupé les plus grands géomètres de notre siècle.

De la comparaison des diverses mesures de même genre.

130. L'uniformité des mesures était depuis longtemps l'objet des vœux de tous les savans, lorsqu'on a établi en France le système décimal, que j'ai exposé plus haut (100); mais ce système n'étant pas encore adopté par les nations étrangères, et succédant à un

ancien système par lequel on a exprimé beaucoup de résultats numériques importans, on a souvent besoin de comparer avec les mesures décimales, soit les anciennes mesures françaises, soit les mesures étrangères : je vais en conséquence indiquer les moyens de faire cette comparaison.

Les données nécessaires sont les rapports des mesures à comparer. Ces rapports s'obtiennent en exprimant l'une des mesures par l'autre.

131. Les mesures linéaires les plus usitées en France étaient la *toise* et l'*aune*.

La toise	se divise en	6 pieds,
Le pied	en	12 pouces,
Le pouce	en	12 lignes,
La ligne	en	12 points.

L'aune (de Paris) contient 3 pieds 7 pouces 10 lignes $\frac{5}{9}$. Je compare d'abord la toise au mètre.

Le mètre, déterminé définitivement, a été trouvé de 3 pieds 0 pouces 11 lignes, 296.

Ce nombre étant réduit en fraction de la toise, donne le rapport du mètre à la toise.

Pour faire cette réduction, il faut d'abord convertir les pieds en lignes; ce qui se fera en observant que puisque le pied vaut 12 pouces, 3 pieds font 36 pouces; et comme le pouce vaut 12 lignes, on multipliera 36 par 12, ce qui donnera 432 pour la valeur de 3 pieds convertis en lignes, à quoi il faut ajouter les 11 lignes; 296 de surplus, et il viendra 443 lignes, 296.

D'un autre côté, la toise, composée de 6 pieds, contient 6 fois 12 pouces, ou 72 pouces, et 72 fois 12

lignes, ou 864 lignes. La toise contenant donc 864 lignes, tandis que le mètre en contient seulement 443,296, le rapport du mètre à la toise est celui des nombres 443,296 et 864, ou des nombres 443296 et 864000, mille fois plus grands que les précédens. La toise est donc les $\frac{864000}{443296}$ du mètre, fraction qui se réduit à $\frac{27000}{13853}$, en divisant ses deux termes par 32.

132. Il suit de là et du n° 75, que pour convertir un nombre quelconque de toises en mètres, il faut le multiplier par la fraction $\frac{27000}{13853}$.

On demande, par exemple, combien 43 toises font de mètres; le résultat est $\frac{1161000}{13853}$: extrayant les entiers de cette fraction, il vient $83\frac{11491}{13853}$, et en réduisant en décimales la fraction qui accompagne l'entier, on a 83,80856.

Comme il suffit, pour les usages ordinaires, d'une réduction approchée, il est commode de convertir immédiatement en décimales la fraction $\frac{27000}{13853}$, ce qui donne pour la valeur de la toise $1^{mé},94904$; et multipliant ce nombre par celui des toises proposées, on opérera sur-le-champ leur conversion en mètres.

133. Les pieds, les pouces, les lignes, dont le rapport avec la toise est connu, se convertissent facilement en parties décimales du mètre.

1°. Le pied étant la 6e partie de la toise, vaudra la 6e partie de la fraction $\frac{27000}{13853}$, ou les $\frac{4500}{13853}$ du mètre, et en décimales, $0^{mé},32484$, ou $3^{dmé},2484$.

2°. Le pouce étant la 12e partie du pied, vaudra la 12e partie de la fraction $\frac{4500}{13853}$, ou les $\frac{375}{13853}$ du mètre, et en décimales, $0^{mé},02707$, ou $2^{cmé},707$.

3°. La ligne étant la 12e partie du pouce, vaudra la

12e partie de la fraction $\frac{375}{13853}$, ou les $\frac{125}{55412}$ du mètre, et en décimales, $0^{mé},00226$, ou $2^{mmé},26$.

On obtiendrait de même la valeur du point.

134. Rien de plus aisé maintenant que de réduire en mètres et en parties décimales du mètre, un nombre quelconque de toises, pieds et pouces. Soient, par exemple, 13 toises 5 pieds 3 pouces 8 lignes.

Les 13 toises donnent	25,33752
Les 5 pieds.....	1,62420
Les 3 pouces.....	0,08121
Les 8 lignes.....	0,01808
Total.....	27,06101.

135. L'aune de Paris, contenant 3 pieds 7 pouces 10 lignes $\frac{5}{6}$, réduite en lignes, revient à la fraction $\frac{3161}{5184}$ de la toise; et la toise étant les $\frac{27000}{13853}$ du mètre, l'aune sera les $\frac{3161}{5184}$ des $\frac{27000}{13853}$ du mètre, ce qui revient, en décimales, à $1^{mé},18845$.

136. Le poids se mesurait autrefois en *livres*, *marcs*, *onces*, *gros*, *grains*, *et fractions de grains*.

La livre est composée de 2 marcs,
Le marc..... de 8 onces,
L'once..... de 8 gros,
Le gros..... de 72 grains.

On a trouvé, par des expériences très délicates, que le kilogramme pesait 18827 grains. En convertissant ce nombre en fraction de la livre, comme je l'ai fait pour celui qui exprime le mètre par le pied, on aura le rapport de la livre au kilogramme, et on déduira

de là les rapports des subdivisions de la livre avec les parties décimales du gramme.

On trouvera, 1°. que la livre est les $\frac{9216}{18827}$ du kilogramme, ou $0^{kgr.},48951$ en décimales;

2°. Que l'once, ou la 16e partie de la livre, vaut les $\frac{576}{18827}$ du kilogramme, ou $0^{kgr.},03059$ en décimales;

3°. Que le gros, ou la 8e partie de l'once, vaut les $\frac{72}{18827}$ du kilogramme, ou $0^{kgr.},00382$ en décimales;

4°. Que le grain, ou la 72e partie du gros, vaut le $\frac{1}{18827}$ du kilogramme, ou $0^{kgr.},00005$ en décimales.

Avec ces résultats, rien de plus facile que de convertir en mesures décimales, un poids quelconque exprimé par les anciennes mesures. Soit, pour exemple, 23 livres 4 onces 5 gros 31 grains.

	kgr.
On a pour 23 livres	11,25873
pour 4 onces	0,12236
pour 5 gros	0,01910
pour 31 grains	0,00155
Total....	11,40174.

137. L'unité monétaire de l'ancien système était la livre tournois. La valeur du franc, donnée par la pièce de 5 fr., ayant été comparée à celle de la livre tournois, donnée par l'écu de 6 liv., il en est résulté que la valeur du franc est à celle de la livre tournois comme 81 est à 80. Pour convertir donc une somme de livres tournois en francs, il faudra en prendre les $\frac{80}{81}$, ou la multiplier par 0,98765.

Réciproquement, pour évaluer une somme de francs en livres tournois, il en faut prendre les $\frac{81}{80}$, ou la multiplier par 1,0125.

Si la somme à réduire était 100 francs, il viendrait 101,25, ou 101 liv. $\frac{1}{4}$.

La livre tournois se divise en 20 sous, chaque sou en 12 deniers. Dans l'usage ordinaire, on confond la *livre seule* avec le franc. Par cette hypothèse, qui n'est qu'approchée, chaque sou vaut $\frac{1}{2}$ décime ou 0,05; et un denier étant la 12e partie du sou, vaut un $\frac{1}{12}$ de 0,05, ou 0,0041666 etc.

Pour faciliter les conversions des anciennes mesures en nouvelles, on a réuni dans des tables placées à la fin de ce Traité, les résultats obtenus dans le n° 133, ainsi que dans le précédent, avec tous ceux qu'on trouverait en comparant de la même manière, les mesures correspondantes de l'ancien système métrique et du système décimal. On y a joint aussi les rapports des principales mesures et monnaies étrangères avec celles du même système.

138. De même que, par le rapport de l'aune à la toise, j'ai comparé cette première mesure avec le mètre, de même aussi j'aurais pu comparer avec le mètre toutes les mesures étrangère sdont le rapport avec nos anciennes est connu. L'exemple suivant, quoique fictif, suffira pour mettre en état d'appliquer la méthode à tous les cas qui peuvent se présenter, et donnera une idée de la *règle conjointe*, qu'on pratique souvent dans les opérations du *change* des monnaies.

Supposé que 3 *livres* de France valent 32 *deniers sterling* d'Angleterre, que 240 deniers sterling valent 408 *deniers de gros* de Hollande, que 50 deniers de gros valent 190 *maravedis* d'Espagne; on demande combien 90 livres de France font de maravedis?

1°. Puisque 3 livres de France font 32 deniers sterling, la livre est les $\frac{32}{3}$ du denier sterling.

2°. Puisque 240 deniers sterling valent 408 deniers de gros, le denier sterling est les $\frac{408}{240}$ du denier de gros.

3°. Puisque 50 deniers de gros valent 190 maravedis, le denier de gros est les $\frac{190}{50}$ du maravedi.

On convertira donc la livre de France en maravedis, en prenant les $\frac{32}{3}$ des $\frac{408}{240}$ de $\frac{190}{50}$, ce qui donnera

$$\frac{32 \text{ par } 408 \text{ par } 190}{3 \text{ par } 240 \text{ par } 50}$$

pour le rapport de la livre au maravedi ; et multipliant ce rapport par 90, on aura la valeur de 90 livres de France, exprimée en maravedis, c'est-à-dire

$$\frac{90 \text{ par } 32 \text{ par } 408 \text{ par } 190}{3 \text{ par } 240 \text{ par } 50}.$$

Ce nombre fractionnaire est susceptible d'une expression beaucoup plus simple, car le numérateur et le dénominateur ont des facteurs communs. Dans le premier, 90 et 190 sont divisibles par 10; il en est de même de 240 et de 50 dans le second, et la division étant effectuée, il viendra

$$\frac{9 \text{ par } 32 \text{ par } 408 \text{ par } 19}{3 \text{ par } 24 \text{ par } 5}.$$

Mais 32 au numérateur étant divisible par 8, ainsi que 24 au dénominateur, on aura

$$\frac{9 \text{ par } 4 \text{ par } 408 \text{ par } 19}{3 \text{ par } 3 \text{ par } 5};$$

et comme 3 par 3 font 9, on pourra supprimer ce fac-

teur dans le numérateur et le dénominateur à la fois, il en résultera $\frac{4 \text{ par } 408 \text{ par } 19}{5}$ ou 6201 $\frac{3}{5}$ maravedis pour 90 livres de France.

Du Calcul des nombres complexes.

139. Les nombres qui contiennent à la fois des *toises, pieds, pouces, lignes, points;* des *livres* (de poids), *onces, gros et grains;* des *livres, sous et deniers,* se trouvant rapportés à des unités différentes, et leur expression étant composée de plusieurs parties, ils ont été nommés *nombres complexes :* ceux qui n'en renferment qu'une seule, sont appelés *incomplexes* (*). On effectue immédiatement sur les nombres complexes les quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique, par des procédés que je vais rapporter ici, pour mettre en état de suivre les anciens calculs, quoiqu'il soit à désirer qu'on renonce tout-à-fait à des opérations que les décimales remplacent si heureusement.

Ce que je dirai sur les nombres complexes usités en France, s'appliquerait sans peine à tous ceux qui peuvent résulter des mesures étrangères et de leurs subdivisions.

De l'Addition des nombres complexes.

140. L'addition des nombres complexes repose sur les mêmes principes que celle des nombres incomplexes; il s'agit toujours de réunir entre elles les parties

(*) Les nombres accompagnés de fractions décimales ne doivent pas recevoir cette dénomination, puisqu'on peut à vue les convertir en une seule espèce d'unités. $34^{mc},95$, par exemple, reviennent à 3495 centimètres.

de même valeur; et lorsqu'on en trouve assez pour former une ou plusieurs parties d'un ordre supérieur, on retient ces dernières pour les comprendre dans la somme de celles qui sont écrites dans les nombres proposés, comme dans l'addition simple on reporte les dixaines d'une colonne sur la suivante à gauche. On doit donc disposer les nombres complexes qu'on veut ajouter ensemble, de manière que leurs unités, ou parties de même valeur, soient dans une même colonne, et faire séparément la somme de chacune de ces colonnes, en se rappelant combien il faut d'unités ou de parties de chaque ordre pour composer celles de l'ordre immédiatement plus considérable.

En voici un exemple, sur des livres, sous et deniers:

$984^{liv.}$	12^{s}	8^{d}
38	6	9
1413	14	10
319	18	2
2756	12	5

En ajoutant d'abord les deniers entre eux, parce que ce sont les parties de moindre valeur, et en embrassant à la fois les unités et les dixaines de ces nombres, on trouve 29 deniers; mais comme 12 font 1 sou, cette somme revient à 2 sous 5 deniers: on n'écrit donc que les 5 deniers, et on retient les sous pour les porter à leur colonne.

Ici on ajoute séparément les unités et les dixaines. Les premières donnent 22, en y joignant les 2 sous retenus sur les deniers; on n'écrit que les deux unités et on retient les deux dixaines pour la colonne suivante, dont la somme s'élève par ce moyen à 5 dixaines; mais

comme la livre, composée de 20 sous, en contient 2 dixaines, on obtient le nombre de livres résultant des sous, en divisant celui des dixaines de sous par 2. On a 2 pour quotient, et 1 de reste qu'on écrit sous la colonne où l'on opère, tandis qu'on retient les livres pour la suivante à gauche. A partir de cette dernière, l'opération s'effectue comme celle des nombres incomplexes, et on trouve $2756^{liv.}$ 10^{s} 5^{d}.

141. Je ne réduirai point en règle ce procédé, qu'il est si aisé d'adapter à telles subdivisions de l'unité qu'on voudra; et pour donner l'occasion de le faire, je mettrai ci-dessous un exemple en toises, pieds, pouces et lignes, qu'on vérifiera soi-même, en se rappelant que 12 points font 1 ligne, 12 lignes 1 pouce, 12 pouces 1 pied, 6 pieds 1 toise.

	34^{toises}	5^{pieds}	6^{pouces}	7^{lignes}	8^{points}
	16	3	2	5	6
	127	4	10	11	9
Somme....	179	1	8	0	11

De la Soustraction des nombres complexes.

142. Cette soustraction s'opère de même que pour les nombres incomplexes, en changeant seulement ce qui se rapporte à la subordination des unités, lorsqu'on est obligé d'emprunter, sur les parties de plus grande valeur, de quoi rendre possibles les soustractions partielles où le nombre inférieur surpasse le supérieur.

Soit, pour exemple,

	$795^{liv.}$	3^{s}	0^{d}
	684	17	4
Différence....	110	5	8

Dans cette soustraction, il faut d'abord emprunter 1 sur la colonne des sous, ou 12 deniers, pour en ôter les 4 deniers du nombre inférieur; et on a pour reste 8 deniers. Pour la colonne des sous, où il n'en reste plus que 2 dans le nombre supérieur, il faut faire sur celle des livres, l'emprunt de 1 livre, ou 20 sous, pour obtenir 22 sous, dont en retranchant 17, il reste 5; alors on passera à la colonne des livres, où l'on comptera le chiffre supérieur pour une unité de moins, et on achèvera l'opération suivant le procédé relatif aux nombres incomplexes.

L'exemple ci-dessous, pris dans les mesures de poids, achèvera d'éclaircir ce procédé.

	19^{livres}	0^{marcs}	4^{onces}	5^{gros}	37^{grains}
	4	1	3	6	49
Différence..	14	1	0	6	60

Pour faire les soustractions dans la colonne des grains, il faut emprunter 1 dans celle des gros, et se souvenir que cette unité vaut 72 grains, les joindre par la pensée aux 37 qui sont écrits dans le nombre supérieur, ce qui fait 109 grains, d'où retranchant 49, il reste 60. On continue la soustraction dans les autres colonnes, en comptant 1 once pour 8 gros, 1 marc pour 8 onces, 1 livre pour 2 marcs.

Je ferai remarquer à cette occasion combien la bigarrure qui se trouve dans les subdivisions des diverses unités, doit apporter d'embarras dans les opérations sur les nombres complexes, et en particulier combien était peu commode la division du gros en 72 grains, qui conduisait toujours à des opérations partielles assez compliquées.

Je donnerai encore un exemple en toises et subdivisions de la toise, tant pour exercer le lecteur sur cette espèce de mesure, que pour montrer comment on s'y prend lorsqu'il manque dans le nombre le plus grand quelques-unes des parties contenues dans l'autre.

	16 toises	0 pieds	0 pouces	0 lignes	0 points
	4	3	6	8	5
Différence	11	2	5	3	7

Pour faire la soustraction dans la colonne des points, on ne peut emprunter que sur celle des toises, et on le fait en décomposant

1 toise en 5 pieds plus 11 pouces plus 11 lignes plus 12 points.

On conçoit ces nombres de pieds, de pouces, de lignes, et de points, respectivement placés dans leurs colonnes pour en retrancher successivement chacun des nombres inférieurs correspondans, ce qui donne les restes écrits au-dessous. On passe ensuite à la colonne des toises, en comptant pour 1 de moins le chiffre des unités.

De la preuve de l'Addition et de la Soustraction des nombres complexes.

143. La preuve de l'addition se fait encore par les mêmes principes que pour les nombres incomplexes; il faut seulement, en passant aux subdivisions de l'unité, substituer au rapport décimal, la valeur de chaque partie à l'égard de celle qui la suit à droite. Soit, par exemple,

$984^{liv.}$	12^{s}	8^{d}
38	6	9
1413	14	10
319	18	2
2756	12	5
xxxx	*xx*	ø

On opère sur les livres, suivant la règle du n° 19, puis on convertit les 2 livres en dixaines de sous, ce qui donne 4 de ces dixaines qui, jointes à celle qu'on trouve écrite dans la colonne, forment le nombre 5, dont on retranche les 3 unités de cette colonne; on place au-dessous le reste 2, que l'on compte pour des dixaines par rapport aux 2 unités de la colonne suivante. Il reste encore 2 sous qu'il faut convertir en deniers; on ajoute les 24 deniers qui en résultent, avec les 5 qui sont écrits, et on a un total de 29, qu'il faut retrouver par l'addition des deniers de tous les nombres, puisque ce sont les parties de moindre valeur. C'est ce qui arrive en effet, et ce qui prouve que l'opération est exacte.

Je ne m'arrêterai point à exposer la preuve de la

soustraction, puisqu'elle se fait par le moyen d'une addition (20), et qu'on a vu précédemment comment s'effectue celle des nombres complexes.

De la Multiplication des nombres complexes.

144. La multiplication des nombres complexes ne présente aucune difficulté, lorsqu'on possède bien la théorie des fractions; car d'abord on peut changer le multiplicande et le multiplicateur en nombres fractionnaires, au moyen des rapports de chaque subdivision de l'unité avec celle qui la précède, comme on l'a fait dans les n°s 131 et 136, pour les valeurs du mètre par rapport à la toise, et du kilogramme par rapport à la livre de poids.

Si l'on avait, par exemple, 15 liv. 12 sous 4 den. on réduirait d'abord les livres en sous, en les multipliant par 20, et on aurait 300 à joindre aux 12 qui sont écrits, ce qui changerait le nombre proposé en 312 sous 4 d.; on multiplierait encore les sous par 12 pour les convertir en deniers: on obtiendrait 3744, et en y ajoutant les 4 den. écrits, il en résulterait 3748 den. Cela fait, on observerait que la livre contenant 20 sous, le sou 12 deniers, la livre contient 20 fois 12 ou 240 deniers; qu'ainsi 1 denier est $\frac{1}{240}$ de la livre, d'où il résulte que 3748 den. font $\frac{3748}{240}$ de la livre.

S'il fallait multiplier ce nombre par 7 toises 4 pieds, on changerait de même 7 toises 4 pieds en 46 pieds ou $\frac{46}{6}$ de toise; on ferait, d'après la règle du n° 76, le produit des fractions $\frac{3748}{240}$ et $\frac{46}{6}$, ce qui donnerait $\frac{172408}{1440}$; et en observant que l'unité du produit doit être de même espèce que celle du multiplicande (102), on évaluerait, comme il suit, cette fraction par la livre tournois et ses subdivisions.

172408	1440
2840	$119^{liv}\ 14^{s}\ 6^{d}\frac{2}{3}$
14008	
1048	
20	
20960^{s}	
6560	
800	
12	
9600	
960	

La partie entière du quotient de la division du numérateur par le dénominateur, donnerait d'abord les livres tournois, puis on multiplierait le reste 1048 par 20 pour le convertir en sous; on diviserait le produit 20960 par le diviseur 1440, et le quotient 14 serait le nombre de sous qui doit accompagner celui des livres déjà trouvé. Le second reste 800 serait ensuite converti en deniers, en le multipliant par 12; enfin on diviserait le produit 9600 par le diviseur 1440, et on aurait 6 deniers à joindre aux deux premières parties du quotient avec la fraction $\frac{960}{1440}$ qui revient à $\frac{2}{3}$.

Cette dernière opération, qui peut s'appliquer à quelqu'espèce de mesure que ce soit, repose sur ce que tout nombre fractionnaire peut être considéré comme l'indication d'une division qu'on rend possible, en convertissant le numérateur en parties de plus en plus petites, comme on l'a fait à l'égard des décimales dans le n° 95.

145. Les procédés que l'on suit ordinairement dans la multiplication des nombres complexes, probablement imaginés par des hommes qui ne s'en occupaient

que pour arriver au résultat, paraissent au premier coup-d'œil moins simples, moins généraux que celui du numéro précédent, mais ils sont peut-être plus commodes dans la pratique; ils offrent d'ailleurs ce caractère ingénieux qu'on trouve dans toutes les inventions suggérées par le besoin, auxquelles on parvient comme par instinct, sans concevoir bien nettement l'étendue et l'ordre du sujet, que développent ensuite ceux qui se sont voués uniquement à la méditation.

Je suivrai la marche que les premiers arithméticiens ont tenue, en commençant par des exemples. Soit la multiplication

de	$25^{liv.}$	12^{s}	
par	16		
	150		
	25		
produit pour 10 sous	8		
pour 2 sous	1	12	
Produit total...	409	12.	

Ici le multiplicande seul est complexe; il s'agit de le répéter 16 fois, ce qu'on effectue à l'ordinaire sur la partie entière; puis on observe que si l'on ajoutait 1 au multiplicande 25, le produit serait augmenté précisément du multiplicateur 16, et qu'il le serait de la moitié seulement, si l'on n'avait joint au multiplicande que la moitié de 1 liv. D'après cela, s'il y avait 10 sous à la suite des livres du multiplicande, il faudrait écrire au produit 8 unités, moitié du multiplicateur; mais au lieu de 10 sous il y en a 12; il reste donc encore 2 sous dont il faut tenir compte: or ces deux sous étant la 5e partie des 10, ne doivent augmenter le produit

que de la 5ᵉ partie de ce qu'ont donné les 10 sous, on prendra par conséquent la 5ᵉ partie des 8 livres trouvées précédemment, pour l'écrire sous le produit, ce qui donnera 1 liv. 12 sous. La somme de tous ces produits partiels sera le produit total demandé, savoir : 409 livres 12 sous.

146. En décomposant de même, en parties qui soient contenues exactement dans l'unité du multiplicande, ou, les unes dans les autres, les subdivisions qui accompagnent les unités de la plus grande valeur, ou les *unités principales* du multiplicande, on n'a plus qu'à prendre des parties semblables sur le multiplicateur ou sur les produits déjà formés. Ces parties se nomment *aliquotes ;* on en sentira bien l'usage par l'exemple que je vais donner.

	$34^{liv.}$	19^{s}	$3^{d}\frac{1}{3}$
	18		
	272		
	34		
Pour 10 sous.....	9		
pour 5 sous.....	4	10	
pour 4 sous.....	3	12	
pour 1 sou.....	0	18	
pour 3 deniers....		4	0
pour 1 denier		1	6
pour $\frac{1}{3}$ de denier ..		0	6
Total.....	$629^{liv.}$	7^{s}	0^{d}.

Après avoir formé les produits des unités principales

du multiplicande par chaque chiffre du multiplicateur, on opère comme il suit, à l'égard des subdivisions du multiplicande.

On décompose 19 sous en 10 sous, plus 5 sous, plus 4 sous.

Pour les 10 sous, on prend la moitié du multiplicateur,

Pour 5 sous, la moitié du produit précédent,

Pour 4 sous, le 5ème du multiplicateur.

Comme il faut passer de là à 3 deniers, qui ne sont que le quart d'un sou, et par conséquent le 16ème de 4 sous, il pourrait être un peu difficile de prendre à vue la 16e partie du produit de 4 sous. Pour éviter cet embarras, on en prend d'abord le quart, ce qui forme le produit que donnerait 1 sou, et puis on prend le quart de ce dernier : on a le produit relatif à 3 deniers ; mais on a l'attention de barrer les chiffres du produit précédent, qui, n'ayant servi qu'à former celui-ci, ne doit pas faire partie du produit total (*). On obtient de même le produit relatif à $\frac{1}{3}$ de denier, en formant d'abord celui de 1 denier par le moyen de celui de 3, et on barre le produit de 1 denier. On réunit ensuite tous les autres produits partiels, et la somme est le produit demandé.

Voici encore un exemple, sur la toise et ses subdivisions :

(*) Quelques arithméticiens donnent aux produits qu'ils ne cherchent que pour en trouver d'autres, la dénomination de *faux produits* qui est assurément bien mauvaise.

	6toises	3pieds	5pouces	2li
	5			
	30			
Pour 3 pieds	2	3		
Pour 1	ø	½		
Pour 3 pouces.....		1	3	
Pour 1		0	5	
Pour 1		0	5	
Pour 2 lignes		0	0	10
Total.....	32	5	1	10

On a formé le produit relatif à 1 pied pour faciliter le passage aux pouces, et on a écrit deux fois le produit de 1 pouce, au lieu de former tout d'un coup le produit de 2 pouces, en prenant le 6ème de celui de 1 pied, parce qu'on avait besoin du produit de 1 pouce pour obtenir commodément celui de 2 lignes.

147. Lorsque le multiplicateur seul est complexe, on décompose, de même que précédemment, en parties aliquotes de l'unité principale, les subdivisions qu'il contient, et on effectue sur le multiplicande les opérations qu'elles indiquent. C'est dans ce cas qu'il est important de distinguer par l'état de la question, lequel des deux nombres proposés doit être pris pour multiplicande; car en déterminant la nature des unités du produit cherché, il fixe les rapports des subdivisions auxquelles il faut descendre, en prenant les produits relatifs aux parties aliquotes, et sur lesquels on pourrait se tromper beaucoup, puisque les subdivisions du multiplicande et du multiplicateur suivent des lois différentes, lorsque ces deux nombres ne sont pas de même espèce. Soit, pour exemple,

$793^{\#}$

	9^{marcs}	3^{onces}	5^{gros}	$7^{grains\ \frac{1}{2}}$
	$7137^{\#}$	s	d	
Pour 2 onces...	198	5		
Pour 1	99	2	6	
Pour 4 gros	49	11	3	
Pour 1	12	7	9	$\frac{3}{4}$
Pour 12 grains..	x	x	x	$\frac{x}{x}$
Pour 6	1	0	7	$\frac{13}{16}$
Pour 1	0	3	5	$\frac{29}{96}$
Pour $\frac{1}{2}$	0	1	8	$\frac{125}{192}$
	7497	12	4	$\frac{96}{192}$.

Dans cet exemple on a pris

pour 2 onces, $\frac{1}{4}$ du multiplicande,
pour 1 , $\frac{1}{2}$ du produit précédent,
pour 4 gros, $\frac{1}{2}$ du produit de 1 once,
pour 1 , $\frac{1}{4}$ du produit précédent.

Mais comme le gros contient 72 grains, on a d'abord pris le 6ème du produit relatif à un gros, afin d'avoir le produit relatif à 12 grains, et l'on a pris ensuite

pour 6 grains, $\frac{1}{2}$ du produit de 12,
pour 1 , $\frac{1}{6}$ du produit précédent,
pour $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ du produit précédent.

Ces divers produits sont accompagnés de fractions qu'il faut ajouter ensemble, ce qui s'opère facilement

par le second procédé du n° 69, parce que le p[illegible] des dénominateurs contenant tous les autres, [illegible] convertir toutes les fractions dans l'espèce de la c[illegible] on trouve, pour leur somme, $\frac{483}{192}$ ou $2\frac{99}{192}$. En joignant ces deniers à ceux qui sont écrits, et continuant l'addition des autres colonnes, on a le produit total.

148. Enfin, lorsque le multiplicande et le multiplicateur sont tous deux complexes, après avoir fait les produits des unités principales du multiplicande par celles du multiplicateur, on prend d'abord, seulement sur les unités principales du multiplicateur, les parties aliquotes dans lesquelles se décomposent les subdivisions du multiplicande, puis on décompose les subdivisions du multiplicateur en parties aliquotes de son unité principale, et on effectue sur tout le multiplicande, les opérations qu'elles indiquent.

Pour sentir l'exactitude de ce procédé, il suffit d'observer que le produit cherché doit renfermer trois parties, savoir : le produit des unités principales du multiplicande par celles du multiplicateur, celui des subdivisions du multiplicande par les unités principales du multiplicateur, et enfin le produit de tout le multiplicande par les subdivisions du multiplicateur.

En effet, on peut ramener cette opération à la multiplication de deux facteurs composés d'un entier joint à une fraction ; et si l'on avait, par exemple, $8\frac{2}{3}$ à multiplier par $6\frac{5}{7}$, le produit se composerait évidemment de 8 et de $\frac{2}{3}$, répétés chacun 6 fois plus $\frac{5}{7}$ de fois.

149. L'exemple [illegible] ces principes et en fera connaître l'application.

$84^{liv.}\,6^{s}\,3^{d}\,\frac{1}{3}$
$15^{toi.}\,4^{p}\,6^{p}\,8^{lig.}$

$420^{liv.\ sous.\ den.}$

84

pour 5 sous. . . .	3	15		
pour 1.	0	15		
pour 3 deniers .	0	3	9	
pour 1.	0	1	3	
pour $\frac{1}{3}$.	0	0	5	
pour 3 pieds. . .	42	3	1	$\frac{2}{3}$
pour 1.	14	1	0	$\frac{2}{9}$
pour 6 pouces .	7	0	6	$\frac{5}{18}$
pour 1.	1	3	5	5
				108
pour 6 lignes. . .	0	11	8	$\frac{113}{216}$
pour 2.	0	3	10	$\frac{545}{648}$
	1328	14	5	$\frac{295}{324}$

On a d'abord pris sur les 15 unités principales du multiplicateur, les parties aliquotes dans lesquelles se décomposent les $6^{sous}\,3^{deniers}$ du multiplicande, et l'on y a joint le $\frac{1}{3}$ du produit auxiliaire de 1 denier; puis on a pris ensuite, sur tout le multiplicande, les parties aliquotes que forment les $4^{pieds}\,6^{pouces}\,8^{lignes}$ du multiplicateur, en faisant le produit auxiliaire de 1 pouce pour passer aux lignes: en réunissant les fractions on a obtenu 2 entiers et $\frac{590}{648}$, fraction dont la plus simple expression est $\frac{295}{324}$, on a joint ces entiers à la somme de la colonne des deniers, et l'on a achevé l'addition suivant la règle du n° 140.

150. Le plus souvent on néglige les fractions, qui compliquent assez le calcul, lorsqu'on veut en tenir

compte, mais aussi le résultat peut se trouver e[illegible] de quelques unités sur la colonne des subdivi[illegible] moindre valeur. On éviterait cette erreur et l'e[illegible] que donne l'addition des fractions ordinaires, en convertissant en dixièmes le reste que laissent, dans la formation de chaque produit partiel, les dernières subdivisions du produit précédent; et tant qu'il n'y aura pas dix de ces produits, on sera sûr d'avoir le résultat exact jusqu'aux dernières unités.

Voici un exemple relatif à l'aune.

Il s'agit de trouver ce qu'on doit payer pour 15 aunes $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{16}$ d'une étoffe, le prix de l'aune étant de $42^l\ 17^s\ 11^d$.

	$42^{liv.}$	17^s	11^d	
	15	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{16}$	
	$210^{liv.}$	sous.	den.	
	42			
pour 10 sous.....	7	10		
5.....	3	15		
2.....	1	10		
pour 6 deniers...		7	6	
3.....		3	9	
2.....		2	6	
pour $\frac{1}{2}$ aune.....	21	8	11,	5
$\frac{1}{4}$.....	10	14	5,	7
$\frac{1}{16}$.....	2	13	7,	4
Produit total.....	678	5	9,	6

On opère sur le multiplicande, comme dans les exemples précédens; et les $\frac{3}{4}$ qui sont écrits dans le multiplicateur, se décomposant en $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$, on prend la $\frac{1}{2}$ de tout le multiplicande, puis pour $\frac{1}{4}$, la $\frac{1}{2}$ du

produit précédent, puis enfin pour $\frac{1}{16}$, le $\frac{1}{4}$ du produit précédent. Dans le produit total on barre le chiffre des dixièmes de denier, parce qu'il n'est pas toujours exact, à cause des fractions de dixièmes qu'on a négligées.

151. Tout ce qu'on vient de voir sur la multiplication des nombres complexes, étant réduit en règle, peut s'énoncer ainsi : *Multiplier d'abord les unités principales du multiplicande par celles du multiplicateur; décomposer les subdivisions du multiplicande en parties aliquotes de son unité principale, ou des parties aliquotes qui les précèdent; évaluer ces fractions sur les unités principales du multiplicateur seulement; décomposer ensuite les subdivisions du multiplicateur en parties aliquotes de son unité principale, ou des parties aliquotes qui les précèdent, et évaluer ces fractions sur tout le multiplicande. Lorsque la fraction à évaluer sera trop petite à l'égard de celle à laquelle on la rapporte, on en facilitera le calcul en prenant une partie aliquote intermédiaire, pour former un produit auxiliaire, duquel on déduira la partie aliquote cherchée, et dont on barrera ensuite les chiffres pour ne pas les comprendre dans l'addition des produits partiels qui doivent composer le produit total.*

De la Division des Nombres complexes.

152. Il est très important, pour opérer la division des nombres complexes, de faire attention à la nature des unités du quotient, puisque de là dépend la conversion des restes dans les subdivisions de ces unités; mais l'examen attentif de la question ne laisse jamais de doute à cet égard, surtout lorsqu'en considérant le dividende comme un produit, on détermine quels ont dû être le multiplicande et le multiplicateur, ainsi qu'on l'a fait dans le n° 105.

On rencontrera de cette manière deux cas dif[illegible] dans l'un, le dividende et le diviseur étant de [illegible] diverse, le quotient doit être de la même espèc[illegible] dividende; dans l'autre, le dividende et le diviseur étant de la même espèce, le quotient doit être d'une espèce différente. L'opération relative à ce dernier cas étant plus simple que pour le premier, je vais d'abord m'en occuper.

153. Voici une question qui mène à ce cas : Le prix d'une toise d'ouvrage étant 36 liv. 15 sous 6 deniers, on demande combien on fera du même ouvrage pour 1689 l. 17 sous? Ici le dividende 1689 liv. 17 sous est composé, avec 36 liv. 15 sous 6 deniers, de la même manière que le nombre qui mesure l'ouvrage cherché, est composé avec la toise et ses subdivisions; ainsi le quotient doit être exprimé par ces dernières mesures.

Pour l'obtenir, on considère que sa valeur ne doit point changer, lorsque l'on convertit le dividende et le diviseur en parties de même valeur, puisque des fractions de même dénominateur donnent pour quotient celui de leurs numérateurs; mais en réduisant en même temps le dividende et le diviseur en deniers qui sont les parties de moindre valeur qu'ils contiennent, on rendra ces nombres incomplexes.

Le dividende 1689 liv. 17 sous donne 405564 deniers, et le diviseur 36 liv. 15 sous 6 deniers en produit 8826; alors on regarde le dividende comme s'il était des toises, et le diviseur comme un nombre abstrait, puisque si la toise ne coûtait qu'un denier, on en aurait 405564, et que coûtant 8826 deniers, il n'en doit être fait que la 8826ème partie du premier nombre : on établit donc ainsi l'opération :

405564	8826
52524	$45^{toises}\ 5^{pieds}\ 8^{pouces}\ 5^{lignes}\ \frac{6270}{8826}$
8394	
6	
50364	
6234	
12	
12468	
6234	
74808	
4200	
12	
8400	
4200	
50400	
6270	

Après avoir obtenu les unités principales du quotient, on multiplie par 6 le reste 8394 toises pour le convertir en pieds, ce qui donne 50364 ; on continue la division, et on place le quotient au rang des pieds ; on multiplie par 12 le reste 6234 de cette dernière opération pour le convertir en pouces; on divise le produit 74808 par le diviseur, et on obtient le nombre de pouces à écrire au quotient; on multiplie encore le reste 4200 par 12, pour le convertir en lignes ; la division du produit 50400 par le diviseur, donne le nombre de lignes à écrire au quotient, et en s'arrêtant là, on termine ce quotient par la fraction $\frac{6270}{8826}$ qu'on réduit à sa plus simple expression. Le résultat final de l'opération est 45 toises 5 pieds 8 pouces 5 lignes $\frac{1045}{1471}$.

La forme de ce procédé demeurerait la même quand

les nombres proposés et leur quotient se rapportent aussi à des unités de toute autre espèce.

154. Lorsque le quotient doit être de même espèce que le dividende, et que le diviseur est incomplexe, l'opération s'effectue comme celle du n° 144.

Par exemple, 27 onces d'un métal ont coûté 169 liv. 11 sous 4 deniers, on demande à combien revient l'once? voici l'opération :

$169^{liv.}\ 11^{s}\ 4^{d}$	27
7	$6^{liv.}\ 5^{s}\ 7^{d}\ \frac{7}{27}$
20	
140	
11	
151	
16	
12	
32	
16	
192	
4	
196	
7	

Lorsqu'on est parvenu aux 6 livres qui doivent entrer dans le quotient, on convertit le reste 7 en sous, et on y joint les 11 qui sont écrits dans le dividende; puis on divise le résultat 151 par le diviseur 27; on a 5 sous au quotient; on multiplie le reste 16 par 12 pour le convertir en deniers, on y joint les 4 du dividende; on divise le total 196 par le diviseur 27; on a pour quotient 7 deniers, et la fraction $\frac{7}{27}$ de résultat complet est donc 6 liv. 5 sous 7 deniers $\frac{7}{27}$.

155. Enfin, quand le dividende et le diviseur sont tous deux complexes et d'espèces différentes, il faut convertir le dernier en fraction, comme on l'a indiqué dans le n° 144; et alors la règle donnée pour les fractions dans le n° 79, conduit à multiplier le dividende par le dénominateur du diviseur, et à diviser le produit, qui peut être un nombre complexe, par le numérateur du diviseur, qui est nécessairement incomplexe. Voici un exemple :

36 toises 5 pieds 6 pouces 8 lignes d'ouvrage ayant été payés 1374 liv. 12 sous 4 deniers, en déduire le prix de la toise.

Le diviseur, converti dans les dernières subdivisions de son unité principale, produit 31904 lignes; et la toise contenant 864 lignes, on a $\frac{31904}{864}$ de toise pour la fraction qui le représente.

En multipliant d'abord le dividende 1374 liv. 12 sous 4 deniers par 864, d'après le procédé du n° 146, on trouve 1187668 liv. 16 sous, et l'on n'a plus qu'à diviser, comme dans le n° précédent, le nombre complexe 1187668 liv. 16 sous par le nombre incomplexe 31904, ce qui donne pour quotient 37 livres 4 sous 6 deniers $\frac{318}{997}$.

156. Il est à propos de remarquer que le dénominateur de la fraction que l'on obtient d'abord pour représenter le diviseur, est le nombre de parties de la plus petite valeur, contenues dans l'unité principale, en sorte, qu'on peut énoncer ainsi la règle précédente :

Pour diviser un nombre complexe par un autre nombre complexe, il faut convertir le diviseur en parties de la plus petite valeur, multiplier le dividende par le nombre de parties de cette valeur contenues dans l'unité principale du diviseur, et diviser le second résultat par le premier.

Cette règle s'appliquerait au cas développé dans le n° 153, si le dividende ne renfermait aucune partie

de moindre valeur que la dernière du d
multiplier alors le dividende par le nombre
de cette valeur contenues dans son unité
c'est le convertir dans ces parties.

157. On ne doit pas négliger les abréviati
offrir la conversion du diviseur en fraction
tion de celle-ci à sa plus simple expressi
sulte souvent plus de facilité et de netteté dans les calculs.

La pratique réitérée de ces opérations suggère aussi des procédés particuliers qui simplifient le calcul, et que je ne saurais indiquer ici ; je me bornerai à montrer comment on convertit sur-le-champ les sous en livres.

Comme il s'agit pour cela de diviser par 20 le nombre de sous proposé, on le divise d'abord par 10, en séparant un chiffre sur sa droite, puis on prend la moitié de ceux qui sont à gauche, ce qui divise par 2, et donne par conséquent des livres. Lorsqu'il reste une unité, elle représente une dixaine de sous, et il faut la joindre au chiffre séparé sur la droite, qui exprime des sous.

C'est ainsi que 3579 sous produisent 357,9, puis $178^{liv.}$ $19^{s.}$.

158. La comparaison des procédés que je viens de présenter successivement, est sûrement la meilleure preuve qu'on puisse donner de l'avantage que procureront les nouvelles mesures lorsqu'elles seront adoptées ; et quelque habitude qu'on ait du calcul des nombres complexes, on ne pourrait s'empêcher de sentir toute la commodité du calcul décimal, si l'on ne continuait pas à se servir des anciennes mesures, ce qui exige, pour chaque résultat, la conversion de ces mesures dans les nouvelles, opération toujours longue, absolument étrangère au nouveau système métrique, et qu'on s'obstine malgré cela à regarder comme inséparable de l'usage du système.

De quelques moyens employés pour abréger les calculs arithmétiques.

159. Lorsque l'on doit multiplier l'un par l'autre deux nombres très considérables, il est commode de former d'abord les produits du multiplicande par chacun des chiffres du multiplicateur qui ne sont pas répétés. Soient, pour exemple, les nombres 2937487541 et 67431456. J'observe que le multiplicateur ne contient que les chiffres 1, 3, 4, 5, 6, 7; en multipliant successivement le multiplicande par chacun de ces chiffres, je forme la table

1	2937487541
2	5874975082
3	8812462623
4	11749950164
5	14687437705
6	17624925246
7	20562412787

dans laquelle je prends les produits du multiplicande par les chiffres 6, 5, 4, 1, 3, 4, 7 et 6 du multiplicateur, pour les placer dans le rang qu'ils doivent occuper, ainsi qu'on le voit ci-dessous, et je n'ai plus qu'une simple addition à effectuer.

17624925246
14687437705.
11749950164..
2937487541...
8812462623....
11749950164....
20562412787.....
17624925246.....

198079061871489696

En suivant ce procédé, on ne peut avoir au p[lus] 9 produits à former, et le reste de l'opération s[e réduit] à une simple addition.

160. On ramène la division à de simples soustractions, en faisant d'abord le produit du diviseur par les 9 premiers nombres. En effet, si l'on avait 453994781 2346 à diviser par 73809, et qu'on formât une table contenant les multiples du diviseur, savoir,

1	73809
2	147618
3	221427
4	295236
5	369045
6	442854
7	516663
8	590472
9	664281

on pourrait opérer comme il suit :

453994781 2346	73809
442854.....	6150940 6 $\frac{64893}{73809}$
111407.....	
73809.....	
375988.....	
369045.....	
694312...	
664281...	
300313..	
295236..	
507746	
442854	

dans la table le multiple le plus approchant exprimé par les six premiers chiffres du dividende partiel, multiple répondant à 6, donne 6 pour le premier chiffre du quotient. En le retranchant du dividende partiel, abaissant un chiffre de plus, et cherchant quel est le multiple le plus approchant du nouveau dividende partiel, on trouve 1 pour le second chiffre du quotient. On poursuit ainsi l'opération jusqu'à la fin, par des soustractions.

161. Quand on emploie les décimales pour arriver à un certain degré d'approximation, on peut abréger sensiblement la multiplication, en opérant comme on va le voir. Je suppose qu'il s'agisse de connaître, à moins d'un millième d'unité près, le produit des nombres 45,6259573 et 28,63549.

On observera qu'il est inutile de faire entrer dans le produit total les chiffres qui, dans les produits partiels, représentent des décimales d'un ordre plus élevé que les 100000mes, parce que la somme des colonnes qui renferment les décimales ultérieures et les retenues qui en résultent, ne peuvent influer sur les millièmes ; et alors, pour avoir un produit composé de cent-millièmes, en partant du chiffre situé sur la gauche du multiplicateur, qui exprime ici des dixaines, il suffit de commencer la multiplication au chiffre 7 des millionièmes du multiplicande. Les chiffres qui suivent celui des dixaines vers la droite, exprimant des unités de dix fois en dix fois plus petites, on ne commencera à leur égard la multiplication que sur les chiffres 5, 9, 5, etc., qui suivent le chiffre 7 vers la gauche, parce que les cent-millièmes 5 du multiplicande multipliés par les unités 8 du multiplicateur, donneront des cent-millièmes, de même que les dix-millièmes du multiplicande par les dixièmes du multiplicateur, de même que les millièmes du multi-

plicande par les centièmes du multiplicateur, et ainsi de suite.

Pour ne pas se tromper dans le commencement de chaque multiplication partielle, on écrit sous le multiplicande les chiffres du multiplicateur, dans un ordre inverse, en plaçant celui des dixaines du second, sous les millionièmes du premier, comme on le voit ci-dessous :

```
 456259573
  9453682
 ---------
  91251914
 36500760
  .2737554
  ..136875
  ...22810
  ....1824
  .....405
 ---------
 130652142
```

De cette manière, chaque chiffre du multiplicateur se trouve placé sous le chiffre du multiplicande par lequel on doit commencer la multiplication ; en sorte qu'on néglige ceux qui sont à la droite, et on écrit tous les produits dans les mêmes colonnes, puisqu'ils commencent tous par des unités de même ordre. En les réunissant, et séparant cinq décimales, puisque la dernière doit être des cent-millièmes, on trouve 1306,52142 ; effaçant les deux derniers chiffres, on a 1306,521, résultat qui s'accorde jusqu'aux millièmes avec celui qu'on aurait obtenu par la multiplication effectuée à l'ordinaire, et qui serait 1306,521644004.

S'il arrivait que l'un des facteurs n'eût pas assez de chiffres pour établir la correspondance comme ci-des- [illegible] des zéros à la suite

de ce facteur. Pour obtenir avec 2 décimales, par exemple, le produit des nombres 54,236 et 532,27, il faut les écrire ainsi :

```
  54236000
     72235
  ---------
 271180000
  16270800
   1084720
    108472
     37961
  ---------
 28868l953
```

On trouve pour le produit demandé 28868,20, en ajoutant une unité au dernier chiffre, parce que les deux qu'on supprime surpassent la moitié de cette unité, c'est-à-dire 50.

C'est une règle générale, lorsqu'on néglige quelques décimales, d'augmenter toujours de l'unité la dernière que l'on conserve, lorsque celles qu'on supprime surpassent la moitié de l'unité du dernier rang qu'on laisse subsister. Pour en apercevoir la raison, il suffit d'observer que 34,546, par exemple, est plus près de 34,55 que de 34,54.

Le procédé de la division est susceptible d'une abréviation analogue ; mais comme elle exige un plus grand nombre de précautions particulières pour être employée avec sûreté, je ne m'y arrêterai pas.

162. On a vu dans les nos 60, 69, le parti qu'on peut tirer de la décomposition des nombres en facteurs, pour simplifier les calculs relatifs aux fractions ; il est donc important de savoir opérer cette décomposition : l'exemple suivant montrera comment on y parvient.

Soit le nombre 360 : je le divise d'abord par 2, et j'ai pour quotient 180 ; je divise ce quotient par 2, et il vient 90, qui se divise encore par 2, et qui donne 45 : ainsi je vois déjà que 360 est égal à 2 par 2 par 2 par 45. Le nombre 45 n'étant plus divisible par 2, je le divise par 3, et j'ai 15, que je divise encore par 3, et qui donne 5, nombre premier qui ne peut être divisé que par lui-même ou par l'unité : 45 est donc égal à 3 par 3 par 5, et par conséquent 360, à

2 par 2 par 2 par 3 par 3 par 5.

Ces six facteurs étant des nombres premiers, sont les *facteurs simples* du nombre 360. Il est visible que tout nombre qui n'est pas premier, peut toujours ainsi se décomposer en un certain nombre de facteurs simples ou premiers.

Pour former tous les diviseurs du nombre proposé, on écrit le quotient qui répond à chaque facteur, et ce facteur, sur deux colonnes, ainsi que le montre la table ci-dessous :

360	1	1
180	2	2
90	2	4
45	2	8
15	3	3 6 12 24
5	3	9 18 36 72
1	5	5 10 15 20 30 40 45 60 90 120 180 360.

Maintenant on voit à la troisième ligne que le nombre proposé a été divisé deux fois de suite par 2 ; il est donc divisible par le produit 2 par 2 ou par 4, que l'on écrira à côté de 2, sur la troisième ligne. Le quotient 90 étant de nouveau divisible par 2, le nombre proposé

sera par conséquent divisible par 2 fois 4 ou par 8; on écrira donc 8 à côté de 2 sur la quatrième ligne. Le quotient 45 écrit à la tête de cette ligne, étant ensuite divisé par 3, le nombre proposé sera évidemment divisible par les produits de 3 multiplié par chacun des diviseurs précédens; on formera donc sur la cinquième ligne les nouveaux diviseurs composés 6, 12, 24. Continuant ainsi de multiplier le facteur simple de chaque ligne par tous les diviseurs qui le précèdent, en observant de ne pas écrire deux fois le même, on aura tous les diviseurs du nombre proposé.

163. Lorsqu'on est conduit par le calcul à une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont un peu grands, et n'ont cependant aucun facteur commun, on cherche des valeurs approchées de cette fraction, qui soient exprimées par des nombres plus simples, afin de pouvoir s'en former une idée.

Si l'on a, par exemple, le nombre fractionnaire $\frac{1103}{887}$, on en extrait d'abord les entiers, et il vient 1 et $\frac{216}{887}$.

Maintenant, pour se former une idée plus simple de la fraction $\frac{216}{887}$, on cherche à la comparer à une partie de l'unité, afin de n'avoir à envisager qu'un seul terme, et pour cela on divise ses deux termes par 216; on trouve 1 pour le quotient du numérateur, et $4\frac{23}{216}$ pour celui du dénominateur: ce dernier quotient, qui se trouve compris par conséquent entre 4 et 5, apprend ainsi que la fraction $\frac{216}{887}$ est entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{5}$. En s'arrêtant à ce point, on voit que la seconde valeur approchée de l'expression $\frac{1103}{887}$ est 1 et $\frac{1}{4}$ ou $\frac{5}{4}$, mais que cette valeur est trop forte, car la vraie valeur serait égale à 1 plus 1 divisé par 4 et $\frac{23}{216}$, ce qui s'écrit ainsi : $1\frac{1}{4\frac{23}{216}}$.

Pour se former une idée exacte de l'expression $\frac{1}{4\frac{23}{216}}$, il faut la considérer comme indiquant le quotient de l'en-

tier 1 divisé par l'entier 4 accompagné de la fraction $\frac{23}{216}$.

Si l'on divise les deux termes de $\frac{23}{216}$ par 23, le quotient sera $\frac{1}{9\frac{9}{23}}$; négligeant les $\frac{9}{23}$ qui accompagnent l'entier 9, il viendra $\frac{1}{9}$ seulement au lieu de $\frac{23}{216}$, et par conséquent $1\frac{1}{4\frac{1}{9}}$ sera une troisième valeur approchée de $\frac{1103}{887}$, valeur qui sera trop faible, parce que 9 étant moindre que le vrai quotient de 216 par 23, la fraction $\frac{1}{9}$ sera plus grande que celle qui doit accompagner 4, et que par conséquent le diviseur $4\frac{1}{9}$ sera plus grand que le diviseur exact $4\frac{23}{216}$, et le quotient $\frac{1}{4\frac{1}{9}}$ plus petit que le véritable.

En réduisant l'entier 4 avec la fraction qui l'accompagne, et faisant la division suivant le procédé du n° 80, il vient $\frac{9}{37}$; et on a 1 et $\frac{9}{37}$ ou $\frac{46}{37}$ pour la troisième valeur approchée de $\frac{1103}{887}$.

L'expression exacte de cette valeur étant

$$1\frac{1}{4\frac{1}{9\frac{9}{23}}},$$

si l'on divise les deux termes de $\frac{9}{23}$ par 9, on aura

$$1\frac{1}{4\frac{1}{9\frac{1}{2\frac{5}{9}}}},$$

négligeant la fraction $\frac{5}{9}$, il restera

$$1\frac{1}{4\frac{1}{9\frac{1}{2}}},$$

valeur trop forte ; car la fraction $\frac{1}{2}$ étant plus grande que $\frac{1}{2\frac{5}{9}}$ dont elle tient la place, elle formera, en se joignant à 9, un dénominateur trop grand ; la fraction à joindre à 4 sera alors trop petite, et le dernier dénominateur étant trop faible rendra la dernière fraction trop forte.

En réduisant d'abord $9\frac{1}{2}$ en fraction, il viendra $\frac{19}{2}$; $\frac{1}{9\frac{1}{2}}$ sera donc $\frac{2}{19}$, et la valeur approchée deviendra $1\frac{1}{4\frac{2}{19}}$: or $\frac{1}{4\frac{2}{19}}$ donne $\frac{19}{78}$; en y ajoutant l'unité, il vient $1\frac{19}{78}$, ou $\frac{97}{78}$ pour une quatrième valeur approchée de $\frac{1103}{887}$.

Reprenant l'expression

$$1\frac{1}{4\frac{1}{9\frac{1}{2\frac{5}{9}}}},$$

je divise les deux termes de la dernière fraction $\frac{5}{9}$ par 5; il vient $\frac{1}{1\frac{4}{5}}$ et $1\frac{1}{4\frac{1}{9\frac{1}{2\frac{1}{1\frac{4}{5}}}}}$;

négligeant la fraction $\frac{4}{5}$, il restera

$$1\frac{1}{4\frac{1}{9\frac{1}{2\frac{1}{1}}}};$$

et l'on verrait comme ci-dessus que cette valeur est plus faible que la valeur exacte.

La fraction $\frac{1}{2\frac{1}{1}}$ se réduit à $\frac{1}{3}$; puis la suivante $\frac{1}{9\frac{1}{3}}$ donnant $\frac{3}{28}$, celle d'après se change en $\frac{1}{4\frac{3}{28}}$, égale à $\frac{28}{115}$; en sorte que la 5e valeur approchée est $1\frac{28}{115}$ ou $\frac{143}{115}$.

Divisant enfin par 4 les deux termes de la fraction $\frac{4}{5}$ qui a été négligée ci-dessus, j'ai pour quotient $\frac{1}{1\frac{1}{4}}$; et en supprimant d'abord la fraction $\frac{1}{4}$, j'obtiens la nouvelle valeur

$$1\frac{1}{4\frac{1}{9\frac{1}{2\frac{1}{1\frac{1}{3}}}}},$$

plus forte que la véritable.

Si l'on en réduit successivement tous les dénominateurs

en fraction, pour obtenir la fraction simple qu'elle représente, on trouvera

$$1\frac{47}{193} \text{ ou } \frac{240}{193}.$$

En restituant la fraction $\frac{1}{4}$ à côté du dernier dénominateur, on forme l'expression

$$1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{4}}}}}},$$

qui, étant réduite comme les précédentes, reproduit le nombre fractionnaire $\frac{1103}{887}$.

On opérerait de même sur toute autre fraction, et l'on en tirerait une suite de valeurs approchées, alternativement plus grandes et plus petites que sa véritable valeur, si c'est une fraction proprement dite, ou alternativement plus petites et plus grandes, si, comme dans l'exemple précédent, le numérateur surpasse le dénominateur.

Les développemens que je viens de trouver pour l'expression $\frac{1103}{887}$, sont des *fractions continues*, que l'on peut en général définir ainsi : *Des fractions dont le dénominateur est composé d'un entier plus une fraction, laquelle a encore pour dénominateur un entier plus une fraction, et ainsi de suite*. Cette espèce de fractions jouit de beaucoup de propriétés importantes, pour lesquelles je renvoie au *Complément des Élémens d'Algèbre*.

Sur l'application de l'Arithmétique à la Banque et au Commerce.

164. A en juger par le grand nombre de règles ou formules que renferment les Traités d'Arithmétique destinés aux banquiers et aux négocians, on croirait qu'il y a pour ces professions une Arithmétique particulière, tandis que toute la difficulté de l'application des règles ordinaires ne repose que sur l'intelligence des termes

techniques introduits par l'usage, et assez souvent sans nécessité. Quand ces termes sont bien expliqués, quelque calculateur que ce soit rendra toujours, en nombre, la véritable réponse aux diverses questions qu'on pourra lui proposer.

L'*escompte* et le *change* sont les opérations les plus usuelles de la banque; on a vu (120) comment l'escompte devrait s'effectuer, d'après le but qu'on se propose; mais les premiers qui l'ont pratiqué ont trouvé plus simple de prélever l'intérêt de la somme entière, comme si c'était cette somme même qu'ils avançassent. (*Voyez* la note de la page 96.)

En général, dans les transactions, toute somme dont on ne pourra disposer que dans un temps futur, a une valeur réelle moindre que sa valeur nominale, à cause de l'intérêt qu'elle rapporte, à compter du moment où on la possède; et par conséquent la jouissance anticipée d'une somme augmente sa valeur réelle. De là vient que pour comparer des sommes payables à diverses époques, il faut tenir compte de l'intérêt qu'elles sont censées produire à celui qui en dispose. Les règles du n° 120 sont suffisantes pour cet objet, toutes les fois que l'intervalle de temps n'excède pas un an, et qu'on n'accumule pas l'intérêt avec le capital : dans le cas contraire, il faut employer les formules relatives à l'*intérêt composé*, rapportées à la fin de mes *Élémens d'Algèbre*.

Le change, qui sert à éviter le transport du numéraire en compensant, les unes par les autres, les dettes que contractent réciproquement des négocians de divers pays, conduit à un calcul dont le but est toujours de trouver ce qu'une somme payable dans une place de commerce, vaut dans une autre, soit par le rapport de deux sommes regardées comme équivalentes dans les monnaies de ces places, soit par une suite de rapports formés de sommes équivalentes, prises dans les monnaies de diverses places, communiquant les unes avec les autres. Le n° 138 offre

un exemple général, dont les formules particulières ne diffèrent que par la suppression des facteurs qui, dans chaque cas, peuvent être communs au numérateur et au dénominateur des rapports comparés. Les sommes équivalentes qui forment ces rapports sont énoncées chaque jour dans les papiers publics, parce qu'elles varient suivant les circonstances, mais ces changemens ne font rien à l'esprit du procédé désigné sous le nom de *règle conjointe* (*).

A l'égard des opérations de commerce, on trouve dans le n° 124 tout ce qu'il faut pour partager les bénéfices ou les pertes résultantes d'une association quelconque; les *droits de commission*, les *retenues*, les *bonifications*, etc., s'évaluant à *tant* p. $\frac{0}{0}$, comme l'intérêt, se calculent de même; les *taxes*, les *impôts*, ont des rapports avec les valeurs des marchandises, ou sont établis sur l'unité, soit de poids, soit de volume, et peuvent se conclure, pour des quantités quelconques, au moyen des proportions et des fractions.

Enfin, *la tenue des livres* n'est que la manière de disposer les *états* des valeurs fournies et des valeurs reçues par le négociant, dans un ordre tel, qu'on puisse à chaque instant comparer les unes aux autres, pour en connaître la différence et établir ainsi la *balance* entre ce qu'il a et ce qu'il doit.

(*) N'ayant en vue ici que l'opération arithmétique, je ne fais aucune distinction entre les papiers, les monnaies de compte et celles d'or et d'argent; mais il faut savoir que les rapports de ces dernières dépendent principalement de ceux des quantités de métal fin, c'est-à-dire d'or ou d'argent purs, qu'elles contiennent, et que l'on détermine par une opération chimique nommée *essai*, qui fait connaître ce qu'on appelle le *titre*. (Voy. pag. 151.)

COMPARAISON *des anciennes Mesures avec les nouvelles.*

Caractères usités pour désigner les anciennes mesures.

Pour les monnaies :

livre tournois, ˢ sou, ᵈ denier (137).

Pour le temps :

ʲ jour, ʰ heure, ′ minute, ″ seconde.

Pour les poids :

lb livre, M marc, O ou ℥ once, G ou ʒ gros ou dragme, D ou ℈ denier ou scrupule, G grain (136).

Observation. Le denier ou scrupule vaut le $\frac{1}{3}$ du gros, ou 24 grains.

Mesures de longueur.

ᵗ toise, ᵖⁱ pied, ᵖᵒ pouce, ˡ ligne, ᵖᵗ point (131).

Observation. Les distances se mesurent quelquefois en pas ordinaires estimés 2 ᵖⁱ $\frac{1}{2}$, et en pas géométriques ou brasses de 5 ᵖⁱ.

Dimensions exactes de la terre.

Le rayon de l'équateur est de 3 271 208 toises.

Le demi-axe, ou la distance du centre au pôle, est de 3 261 443 toises.

La distance du pôle à l'équateur, mesurée sur le méridien de Paris, est de 5 130 740 toises.

Le degré terrestre, qui est la 90ᵉ partie, vaut donc 57 008 toises.

L'arc terrestre d'une minute est donc d'environ 950 toises.

Tables calculées par M. Haros, pour la conversion des Mesures anciennes en nouvelles, et réciproquement.

Chaque colonne contient, en première ligne, la valeur de la mesure désignée dans le titre de la colonne, et ensuite les produits de cette valeur par les nombres écrits dans la colonne marquée N.

Il y a partout cinq décimales, mais dans l'usage ordinaire on peut se borner à trois.

Convertir 8 toises 5 pieds 7 pouces en mètres.

8^t valent.....	$15^m,592$
5^{pi}.....	1 ,624
7^{po}.....	0 ,189
Somme.....	$17^m,405$.

Rép. 17 mètres 40 centimètres.

Convertir 89 aunes $\frac{3}{4}$ de Paris, en mètres.

$80^{aun.}$ valent.....	$95^m,076$
9.....	10 ,696
$\frac{3}{4}$.....	0 ,891
Somme.....	$106^m,663$.

Rép. 106 mètres 66 centimètres.

Convertir 218 arpens (eaux et forêts) en hectares.

$200^{arp.}$ valent.....	$102^{hect.},144$
10.....	5 ,107
8.....	4 ,086
Somme.....	$111^{hect.},337$.

Rép. 111 hect. 34 ares environ.

Convertir 3050 livres (de poids) en kilogrammes.

$3000^{liv.}$ valent.....	$1468^{kilog.},52$
50.....	24 ,48
Somme.....	$1493^{kilog.},00$.

Rép. 1493 kilogrammes.

Les mêmes tables peuvent donner le prix de la nouvelle unité d'une matière par celui de l'ancienne unité, exprimé en francs. Par [illegible] si l'on [illegible] à multi- [illegible] tir $37^m,5$ [illegible] ompter le [illegible]

Par la table qui convertit les mètres en aunes :

30^m	valent.....	$25^{aun.},243$
7	.....	5 ,890
0 ,5	.....	0 ,421
$37^m,5$	.....	$31^{aun.},554$;

et prenant ce résultat pour des francs, on trouve 31 fr. 55 cent. pour le prix du mètre de drap.

Lorsqu'on veut convertir les nouvelles mesures dans les anciennes, on n'obtient, par les tables suivantes, que des entiers et des fractions décimales, et il reste à convertir ces fractions en subdivisions propres à chaque espèce de mesure.

Tableau de comparaison des monnaies étrangères.

L'usage de ce tableau n'a pas besoin d'être expliqué ; mais pour en comprendre la construction, il faut savoir que le *titre* d'une pièce de monnaie est la quantité de métal pur, ou de *fin*, contenu dans la totalité de la pièce, qu'on suppose composée de 1000 parties. Le titre du franc est $\frac{9}{10}$ ou 900 ; son poids étant de 5 grammes (100), il contient $\frac{9}{2}$ grammes d'argent ; ainsi, abstraction faite des frais du monnayage, le gramme d'argent vaut $\frac{2}{9}$ de franc, et le kilogramme $\frac{2000}{9}$ de franc ou 222 fr. 22 c. ; le kilogramme d'or vaut 3444 fr. 44 c., le rapport de la valeur de l'or à celle de l'argent étant établi de $15\frac{1}{2}$ à 1.

En multipliant le poids d'une pièce par son titre, on obtient le poids de la quantité de fin qu'elle renferme, ce qui constitue sa valeur ; car on ne tient aucun compte de l'alliage. Ainsi la guinée pesant $8^g,3802$, au titre de 917, c'est-à-dire 0,917, contient $7^g,6846$ d'or pur ; mais le kilogramme d'or rapporté au franc vaut 3444 fr. 44 c., ce qui donne $3^{fr},44444$ pour le gramme, et par conséquent 26 fr. 47 c. pour la guinée, ainsi qu'on le trouve dans le tableau. C'est sa valeur au *pair*.

[illegible] pour réduire des mesures *linéaires* anciennes, en mesures nouvelles, et réciproquement.

[illegible]	[illegible] lieues marines en [illegible]m.**	Toises en mètres.	Pieds en mètres.	Pouces en mètres.	Lignes en mètres.	N.	Aunes en mètres.***	N.	Fractions d'aune en mètres.	N.	Fractions d'aune en mètres.	N.	Fractions d'aune en mètres.
[illegible]	[illegible]5556	1,94904	0,32484	0,027070	0,002256	1	1,18845	$\frac{1}{2}$	0,594	$\frac{5}{8}$	0,743	$\frac{7}{16}$	0,520
[illegible]	[illegible]1111	3,89807	0,64968	0,054140	0,004512	2	2,37689	$\frac{1}{3}$	0,396	$\frac{7}{8}$	1,040	$\frac{9}{16}$	0,668
[illegible]	[illegible]6667	5,84711	0,97452	0,081210	0,006768	3	3,56534	$\frac{2}{3}$	0,792	$\frac{1}{12}$	0,099	$\frac{11}{16}$	0,817
[illegible]	[illegible]2222	7,79615	1,29936	0,108280	0,009024	4	4,75378	$\frac{1}{4}$	0,297	$\frac{5}{12}$	0,495	$\frac{13}{16}$	0,966
[illegible]	[illegible]7778	9,74519	1,62420	0,135350	0,011280	5	5,94223	$\frac{3}{4}$	0,891	$\frac{7}{12}$	0,693	$\frac{15}{16}$	1,114
[illegible]	[illegible]3333	11,69422	1,94904	0,162419	0,013536	6	7,13068	$\frac{1}{6}$	0,198	$\frac{11}{12}$	1,089		
[illegible]	[illegible]8889	13,64326	2,27388	0,189489	0,015792	7	8,31912	$\frac{5}{6}$	0,990	$\frac{1}{16}$	0,074		
[illegible]	[illegible]4444	15,59230	2,59872	0,216559	0,018048	8	9,50757	$\frac{1}{8}$	0,149	$\frac{3}{16}$	0,223		
[illegible]	[illegible]0000	17,54133	2,92356	0,243629	0,020304	9	10,69601	$\frac{3}{8}$	0,446	$\frac{5}{16}$	0,371		
[illegible]	[illegible]5556	19,49037	3,24840	0,270699	0,022560	10	11,88446						

N.	[illegible]	[illegible] en lieues mar.	Mètres en toises.	Mètres en pieds.	Mètres en pouces.	Mètres en lignes.	N.	Mètres en aunes de Paris.
[illegible]	[illegible]	[illegible],18	0,51307	3,07844	36,9413	443,296	1	0,84144
[illegible]	[illegible]	[illegible],36	1,02615	6,15689	73,8827	886,592	2	1,68287
[illegible]	[illegible]	[illegible],54	1,53922	9,23533	110,8240	1329,888	3	2,52431
[illegible]	[illegible]	[illegible],72	2,05230	12,31378	147,7653	1773,184	4	3,36574
[illegible]	[illegible]	[illegible],90	2,56537	15,39222	184,7067	2216,480	5	4,20718
6	1,350	1,08	3,07844	18,47066	221,6480	2659,775	6	5,04861
7	1,575	1,26	3,59152	21,54911	258,5893	3103,071	7	5,89005
8	1,800	1,44	4,10459	24,62755	295,5306	3546,367	8	6,73148
9	2,025	1,62	4,61767	27,70600	332,4720	3989,663	9	7,57292
10	2,250	1,80	5,13074	30,78444	369,4133	4432,959	10	8,41435

* La lieue de 25 au degré vaut 2280 toises,33

** La lieue marine de 20 au degré vaut 2850 toises,41.

*** L'aune de Paris vaut 3 pieds 7 pouces 10 lignes $\frac{5}{6}$.

TABLE pour réduire des mesures *quarrées* anciennes, en mesures nouvelles, et réciproquement.

N.	Toises quarr. en mètres quarr.	Pieds quarr. en mètres quarr.	Pouces quarr. en mètres quarr.	Lignes quarr. en mètres quarr.	N.	Lieues quarrées en myriamètres quarrés.	Lieues quarrées en myriares.	Arp. Eaux et For. en hec. ou perches quarrées en ares.	Arp. de Paris en hect. ou perch. quarrées en ares.
1	3,798744	0,105521	0,000732-8	0,000005089	1	0,1975309	19,75309	0,510720	0,341887
2	7,597487	0,211041	0,001465556	0,000010178	2	0,3950617	39,50617	1,021440	0,683774
3	11,396231	0,316562	0,002198334	0,000015267	3	0,5925926	59,25926	1,532160	1,025661
4	15,194975	0,422083	0,002931112	0,000020356	4	0,7901234	79,01234	2,042880	1,367548
5	18,993718	0,527604	0,003663890	0,000025445	5	0,9876543	98,76543	2,553600	1,709435
6	22,792462	0,633124	0,004396668	0,000030534	6	1,1851852	118,51852	3,064320	2,051322
7	26,591205	0,738645	0,005129446	0,000035623	7	1,3827160	138,27160	3,575040	2,393209
8	30,389949	0,844166	0,005862224	0,000040712	8	1,5802469	158,02469	4,085760	2,735096
9	34,188693	0,949686	0,006595002	0,000045801	9	1,7777777	177,77777	4,596480	3,076983
10	37,987436	1,055207	0,007327780	0,000050890	10	1,9753086	197,53086	5,107200	3,418870

N.	Mètres quarr. en toises quarr.	Mètres quarr. en pieds quarrés	Mètres quarr. en pouces quarr.	Mètres quarr. en lignes quarr.	N.	Myriamètres quarrés en lieues quarrées.	Myriares en lieues quarrées.	Hectares en arp. Eaux et F. ou ares en perch. quarr.	Hect. en arp. de Paris, ou ares en perch. quarr.
1	0,263345	9,47682	1364,66	196511	1	5,0625	0,050625	1,958020	2,924943
2	0,526690	18,95363	2729,32	393023	2	10,1250	0,101250	3,916040	5,849886
3	0,789035	28,43045	4093,99	589534	3	15,1875	0,151875	5,874060	8,774829
4	1,051380	37,90726	5458,65	786045	4	20,2500	0,202500	7,832080	11,699772
5	1,316725	47,38408	6823,31	982557	5	25,3125	0,253125	9,790100	14,624715
6	1,579469	56,86090	8187,97	1179068	6	30,3750	0,303750	11,748120	17,549658
7	1,842214	66,33771	9552,63	1375579	7	35,4375	0,354375	13,706140	20,474601
8	2,105559	75,81453	10917,30	1572090	8	40,5000	0,405000	15,664160	23,399544
9	2,369204	85,29134	12281,96	1768602	9	45,5625	0,455625	17,622180	26,324487
10	2,632449	94,76816	13646,62	1965113	10	50,6250	0,506250	19,580200	29,249430

TABLE pour réduire des mesures *cubiques* anciennes, en mesures nouvelles, et réciproquement.

N.	Toises cubes en mètres cubes.	Pieds cubes en mètres cubes.	Pouces cubes en mètres cubes.	Lignes cubes en mètres cubes.	N.	Cordes de bois, Eaux et Forêts, en stères.	Solives (charpente) en stères ou mètres cubes.
1	7,[illegible]389	0,0342773	0,000019836	0,00000001148	1	3,8391	0,10283
2	14,[illegible]778	0,0685545	0,000039673	0,00000002296	2	7,6781	0,20566
3	22,[illegible]167	0,1028318	0,000059509	0,00000003444	3	11,5172	0,30850
4	29,[illegible]556	0,1371090	0,000079346	0,00000004592	4	15,3562	0,41133
5	37,[illegible]945	0,1713863	0,000099182	0,00000005740	5	19,1953	0,51416
6	45,[illegible]334	0,2056636	0,000119018	0,00000006888	6	23,0343	0,61699
7	52,[illegible]723	0,2399408	0,000138855	0,00000008036	7	26,8734	0,71982
8	60,[illegible]112	0,2742181	0,000158691	0,00000009184	8	30,7124	0,82265
9	67,[illegible]501	0,3084953	0,000178528	0,00000010332	9	34,5515	0,92549
10	74,[illegible]890	0,3427726	0,000198364	0,00000011480	10	38,3905	1,02832

N.	Mètres cubes en toises cubes.	Mètres cubes en pieds cubes.	Mètres cubes en pouces cubes.	Mètres cubes en lignes cubes.	N.	Stères en cordes de bois Eaux et Forêts.	Mètres cubes en solives.
1	0,[illegible]964	29,1739	50412,42	87112655	1	0,26048	9,7246
2	0,[illegible]928	58,3477	100824,83	174225310	2	0,52096	19,4492
3	1,[illegible]892	87,5216	151237,25	261337965	3	0,78144	29,1739
4	1,[illegible]857	116,6954	201649,66	348450619	4	1,04192	38,8985
5	1,[illegible]821	145,8693	252062,08	435563274	5	1,30241	48,6231
6	2,[illegible]785	175,0431	302474,50	522675929	6	1,56289	58,3477
7	2,[illegible]749	204,2170	352885,91	609788584	7	1,82337	68,0923
8	1,680513	233,3908	403299,33	696901239	8	2,08385	77,7970
9	1,215577	262,5647	453711,74	784013894	9	2,34433	87,5216
10	1,350641	291,7385	504124,16	871126549	10	2,60481	97,2462

TABLE pour réduire des mesures de *capacité* anciennes, en mesures nouvelles, et réciproquement.

N.	Pintes de Paris en litres.	Muids de vin de Paris en hectolitr.	Septiers de blé de Par. en hectolitr.	Boisseaux en litres.	Litrons en litres.
1	0,9313	2,6822	1,5610	13,008	0,8130
2	1,8626	5,3644	3,1220	26,017	1,6260
3	2,7940	8,0466	4,6830	39,025	2,4391
4	3,7253	10,7288	6,2440	52,033	3,2521
5	4,6566	13,4110	7,8050	65,042	4,0651
6	5,5879	16,0932	9,3660	78,050	4,8781
7	6,5192	18,7754	10,9270	91,058	5,6911
8	7,4506	21,4576	12,4880	104,066	6,5042
9	8,3819	24,1398	14,0490	117,075	7,3172
10	9,3132	26,8220	15,6100	130,083	8,1302

N.	Litres en pint. de Par.	Hectolit. en muids de vin de Paris.	Hectolit. en sept. de blé de Paris.	Litres en boisseaux.	Litres en litrons.
1	1,0737	0,3728	0,6406	0,07687	1,2300
2	2,1475	0,7457	1,2812	0,15375	2,4600
3	3,2212	1,1185	1,9219	0,23062	3,6900
4	4,2950	1,4913	2,5625	0,30750	4,9199
5	5,3687	1,8642	3,2031	0,38437	6,1499
6	6,4424	2,2370	3,8437	0,46124	7,3799
7	7,5162	2,6098	4,4843	0,53812	8,6099
8	8,5899	2,9826	5,1250	0,61499	9,8399
9	9,6637	3,3555	5,7656	0,69187	11,0699
10	10,7374	3,7283	6,4062	0,76874	12,2998

TABLE pour réduire des *poids* anciens en poids nouveaux, et réciproquement.

N.	Livres en kilogramm.	Onces en kilogramm.	Gros en kilogramm.	Grains en kilogramm.	Quintaux en myriagram.
1	0,48951	0,03059	0,003824	0,0000531	4,8951
2	0,97901	0,06119	0,007648	0,0001062	9,7901
3	1,46852	0,09178	0,011472	0,0001593	14,6852
4	1,95802	0,12238	0,015296	0,0002124	19,5802
5	2,44753	0,15297	0,019120	0,0002655	24,4753
6	2,93704	0,18356	0,022944	0,0003186	29,3704
7	3,42654	0,21416	0,026768	0,0003717	34,2654
8	3,91605	0,24475	0,030592	0,0004248	39,1605
9	4,40555	0,27535	0,034416	0,0004779	44,0555
10	4,89506	0,30594	0,038240	0,0005310	48,9506

N.	Kilogramm. en livres.	Kilogramm. en onces.	Kilogramm. en gros.	Kilogramm. en grains.	Myriagram. en quintaux.
1	2,04288	32,686	261,49	18827,15	0,20429
2	4,08575	65,372	522,98	37654,30	0,40858
3	6,12863	98,058	784,46	56481,45	0,61286
4	8,17150	130,744	1045,95	75308,60	0,81715
5	10,21438	163,430	1307,44	94135,75	1,02144
6	12,25726	196,116	1568,93	112962,90	1,22573
7	14,30013	228,802	1830,42	131790,05	1,43001
8	16,34301	261,488	2091,90	150617,20	1,63430
9	18,38588	294,174	2353,39	169444,35	1,83859
10	20,42876	326,860	2614,88	188271,50	2,04288

COMPARAISON *de quelques mesures étrangères, avec les nouvelles mesures françaises.*

MESURES LINÉAIRES.	Millim.
Ancien pied français	324,7
Pied anglais	304,7
Vare de Castille	836,6
Pied du Rhin	313,9
De Vienne	316,0
D'Amsterdam	283,0
De Suède	297,1
De Russie	354,1
De la Chine	320,0

POIDS.		Gram.
Liv. poids de marc		489,2
Angl.	livre troy	372,6
	avoir du poise	453,1
Castille		459,4
Cologne		467,4
Vienne		558,6
Amsterdam		491,4
Suède		424,6
Russie		409,5

TABLEAU de comparaison des monnaies étrangères avec les monnaies françaises, toutes supposées droites (exactes) de poids et de titre, d'après les lois de fabrication. (Tiré de l'*Annuaire* de 1821.) *Voy.* p. 151.

Métal.	Détermination des pièces.	Poids légal.	Tit. légal.	Valeurs.
	ANGLETERRE.			
Or.	Guinée de 21 schellings	8,3802	917	26f 47c
	Demi	4,1901	917	13 23,50
	Un quart	2,095	917	6 61,75
	Un tiers, ou 7 schellings	2,7934	917	8 82,33
	Souverain depuis 1818, de 20 schellings	7,9808	917	25 20,80
Arg.	Crown, ou couronne de 5 schell. anciens	30,074	925	6 18
	Schelling ancien	6,015	925	1 23,60
	Crown, ou couronne, depuis 1818	28,2514	925	5 80,72
	Schelling, depuis 1818	5,6503	925	1 16,14
	AUTRICHE ET BOHÊME.			
Or.	Ducat de l'Empereur	3,491	986	11 86
	Ducat de Hongrie	3,491	990	11 90
	Souverain	5,567	917	17 58
	Demi	2,7835	917	8 79
Arg.	Ecu, ou risdale de convention, depuis 1753	28,064	833	5 19,50
	Demi-risdale, ou florin	14,032	833	2 59,75
	Vingt kreutzers	6,682	583	0 86,5
	Dix kreutzers	3,898	500	0 43,25
	HOLLANDE.			
Or.	Ducat	3,513	986	11 93
	Ryder	9,988	920	31 65
	Vingt florins, 1808	13,659	917	43 14
	Dix florins, *idem*	6,8295	917	21 57
	—— de Guillaume, 1818	6,700	900	20 77
Arg.	Florin de 20 sous	10,597	917	3 15,84
	Escalin, ou pièce de 6 sous	4,236	583	0 64
				6 85
				5 48
				9 47
				11 86
				20 95
				5 66
				2 90
				1 91
				0 93

Métal.	Détermination des pièces.	Poids légal.	Tit. légal.	Valeurs.
	ÉTAT ECCLÉSIASTIQUE.			
Or.	Pistoles de Pie VI et Pie VII	5g,471	916 2/3	17f,27c,50
	Demi	2,7355	916 2/3	8 63,75
	Sequin, 1769, Clément XIV et ses successeurs.	3,426	1000	11 80
	Demi	1,713	1000	5 90
Arg.	Ecu de 10 pauls, ou 100 bayoques	26,437	916 2/3	5 38,50
	Trois dixièmes d'écu, ou teston de 30 bayoques.	7,932	916 2/3	1 62
	Un cinquième d'écu, ou papeto de 20 bayoq.	5,287	916 2/3	1 08
	Un dixième d'écu, ou paul de 10 bayoques...	2,644	916 2/3	0 54
	ESPAGNE.			
Or.	Pistole ou doublon de 8 écus, 1772 à 1788....	27,045	901	83 93
	—— de 4 écus	13,5225	901	41 96,50
	—— de 2 écus	6,7613	901	20 98,25
	Demi-pistole, ou écu	3,3806	901	10 49,12
	Pistole ou doublon de 8 écus, depuis 1786....	27,045	875	81 51
	—— de 4 écus	13,5225	875	40 75,50
	—— de 2 écus	6,7613	875	20 37,75
	Demi-pistole ou écu	3,3806	875	10 18,87
Arg.	Piastre, depuis 1772	27,045	903	5 43
	Réal de 2, ou piécette, ou cinquième de piastre.	5,971	813	1 08
	Réal de 1, ou demi-piécette, ou 10e de piastre..	2,9855	813	0 54
	Reallillo, ou réal de veillon, ou 20e de piastre.	1,4928	813	0 27
	Nota. Ces trois dernières pièces sont dénommées *monnaie provinciale*; elles sont fabriquées en Espagne et n'ont cours que dans la péninsule.			
	HAMBOURG.			
Or.	Ducat *ad legem imperii*	3,491	986	11 86
	Ducat nouveau de la ville	3,488	979	11 76
Arg.	Marc banco (*monnaie imaginaire*)	» »	» »	1 88
	Marc ou 16 schell., d'après la convent. de Lubeck.	9,164	750	1 53
	Risdale de constitution, ou écu de banque.	29,233	889	5 78
	TOSCANE.			
Or.	Ruspone, ou 3 sequins aux lys	10,464	1000	36 04
	Un tiers ruspone, ou sequin aux lys	3,488	1000	12 01,33
	Demi-sequin	1,744	1000	6 00,67
	Sequin à l'effigie	3,488	1000	12 01,33
	Rosine	6,976	896	21 54
	Demi	3,488	896	10 77
Arg.	Francescone de 10 paoli, livournine, piastre à la rose, talaro, léopoldine et écu de 10 paoli.	27,507	917	5 61
	Pièce de 5 paoli	13,7535	917	2 80,50
	—— de 2 paoli	5,501	917	1 12,20
	—— de 1 paoli	2,751	917	0 56,10
	SUISSE.			
Or.	Pièce de 32 franken de Suisse	15,297	904	47 63
	—— de 16	7,6485	904	23 81,50
	Ducat de Zurich	3,491	979	11 77
	—— de Berne	3,452	979	11 64
	Pistole de Berne	7,648	902	23 76
Arg.	Ecu de Bâle de 30 batz, ou 2 florins	23,386	878	4 56
	Demi-écu, ou florin de 15 batz	11,693	878	2 28
	Franc de Berne, depuis 1803	7,512	900	1 50
	Ecu de Zurick, de 1781	25,057	844	4 70
	Demi, ou florin, depuis 1781	12,5285	844	2 35
	Ecu de 40 batz de Bâle et Soleure, depuis 1798.	29,486	901	5 90
	Pièce de 4 franken de Berne, de 1799	29,370	901	5 88
	—— de 4 franken de Suisse, en 1803	30,049	900	6 0
	—— de 2 franken de Suisse, en 1803	15,0245	900	3 0
	—— d'un franken de Suisse, en 1803	7,5123	900	1 50

Métal.	Détermination des pièces.	Poids légal.	Tit. légal.	Valeurs.
	NAPLES.			
Or.	Le titre des ducats est trop variable pour pouvoir en donner l'évaluat. en monnaies françaises.	» »	»	» »
	Once nouveau de 3 ducats, depuis 1818.....	3g786	996	12f99c
	Quintuple de 15 ducats, depuis 1818.....	18,933	996	64 95
	Décuple de 30 ducats, depuis 1818.....	37,865	996	129 90
Arg.	12 carlins de 120 grains, depuis 1804.....	27,533	833⅓	5 10
	Ducats de 10 carlins de 100 grains, 1784.....	22,810	839½	4 25
	2 carlins, depuis 1804.....	4,589	833⅓	0 85
	1 carlin, depuis 1804.....	2,2945	833⅓	0 42,5
	Ducat de 10 carlins, de 1818.....	22,943	833⅓	4 25
	PARME.			
Or.	Sequin.....	3,468	1000	11 95
	Pistole de 1784.....	7,498	891	23 01
	Pistole de 1786 à 1791.....	[illegible],141	891	21 91,50
	40 lire de Marie-Louise, depuis 1815.....	2,9032	900	40 »
	20 lire de Marie-Louise, depuis 1815.....	6,4516	900	20 »
Arg.	Ducat de 1784 et 1796.....	25,707	906	5 18
	Pièce de 3 livres, depuis 1790.....	3,672	833	0 68
	—— d'une livre 10 sous, depuis 1790.....	1,836	833	0 34
	5 lire de Marie-Louise, depuis 1815.....	25,000	900	5 »
	2 lire, 1 lira, ½ et ¼ de lira, à proportion.....	» »	»	» »
	GÈNES.			
Or.	Sequin.....	3,487	1000	12 01
	PORTUGAL.			
Or.	Moeda douro, lisbonnine de 4800 reis.....	10,752	917	33 96
	Meia moeda, demi-lisbonnine 2400 reis.....	5,376	917	16 98
	Quartinho, quart de lisbonnine, de 1200 reis..	2,688	917	8 49
	Meia dobra, portugaise de 6400 reis.....	14,334	917	45 27
	Demi-portugaise de 3200 reis.....	7,167	917	22 63,50
	Pièce de 16 testons de 1600 reis.....	3,583	917	11 31,75
	—— de 12 testons de 1200 reis.....	2,538	917	8 02
	—— de 8 testons de 800 reis.....	1,792	917	5 66
	Cruzade de 480 reis.....	1,045	917	3 30
Arg.	Cruzade neuve de 480 reis.....	14,633	903	2 94
	1000 reis.....	» »	»	6 12,50
	PRUSSE.			
Or.	Ducat.....	3,491	979	11 77
	Frédéric.....	6,689	903	20 80
	Demi.....	3,3445	903	10 40
Arg.	Risdale, écu thaler de 24 bons gros, de 1767 à 1807	22,298	750	3 71,63
	Demi, ou 12 bons gros.....	11,149	750	1 85,81
	Gros.....	» »	»	0 15,48
	RAGUSE.			
Or.	*Néant.*			
Arg.	Talaro, dit ragusine.....	29,400	600	3 90
	Demi.....	14,700	600	1 95
	Ducat.....	13,666	450	1 37
	12 grossettes.....	4,140	450	0 41
	6 grossettes.....	2,070	450	0 20,50
	RUSSIE.			
Or.	Ducat de 1755 à 1763.....	3,405	[illegible]	11 79
	—— de 1763.....	[illegible]	[illegible]	[illegible] 59
	Impériale de 10 roubles, de 1755 à 1763.....	[illegible]	[illegible]	[illegible] 38
	Demie de 5 roubles, de 1755 à 1763.....	[illegible]	[illegible]	[illegible] 19
	Impériale de 10 roubles, depuis 1763.....	[illegible]	[illegible]	[illegible] 29
	Demie de 5 roubles, depuis 1763.....	[illegible]	[illegible]	[illegible] 64,50
Arg.	Rouble de 100 copecks, de 1755 à 1763.....	[illegible]	[illegible]	61
	—— depuis 1763 à 1807.....	[illegible]	[illegible]	0

Métal.	Détermination des pièces.	Poids légal.	Titre légal.	Valeurs.
	SARDAIGNE.			
Or.	Carlin, depuis 1768	16,056	892	49f33e
	Demi	8,028	892	24 66,5o
	Pistole	9,118	906	28 45
	Demie	4,559	906	14 22,5o
Arg.	Écu, depuis 1768	23,590	895	4 70
	Demi-écu	11,795	896	2 35
	Quart d'écu, ou une livre	5,8975	896	1 17,5o
	Écu neuf de 5 livres, 1816	25,000	900	5 o
	SAVOIE ET PIÉMONT.			
Or.	Sequin	3,468	1000	11 94,5o
	Double neuve pistole de 24 livres	9,620	906	30 o
	Demie de 12 livres	4,810	906	15 o
	Carlin depuis 1755	48,100	906	15o o
	Demi	24,050	906	75 o
	Pistole neuve de 24 livres, de 1816	6,4516	900	20 o
Arg.	Écu de 6 livres, depuis 1755	35,118	906	7 07
	Demi-écu	17,559	906	3 53,5o
	Un quart, ou 3o sous	8,7795	906	1 76,75
	Demi-quart, ou 15 sous	4,3897	906	o 88,37
	Écu neuf de 5 livres, 1816	25 »	900	5 o
	SAXE.			
Or.	Ducat	3,491	986	11 86
	Double Auguste, ou 10 thalers	13,340	903	41 49
	Auguste, ou 5 thalers	6,670	903	20 74,5o
	Demi-Auguste	3,335	903	10 37,25
Arg.	Risdale d'espèce, ou écu de convent., depuis 1763	28,064	833	5 19,5o
	Demi, ou florin de convention	14,032	833	2 59,75
	Thaler de 24 bons gros (monnaie imagin.)	» »	»	3 89,63
	Un gros ou 32e de risdale, ou 24e de thaler	1,982	368	o 16,21
	SICILE.			
Or.	Once, depuis 1748	4,399	906	13 73
Arg.	Écu de 12 tarins	27,533	833⅓	5 10
	SUÈDE.			
Or.	Ducat	3,482	976	11 70
	Demi	1,741	976	5 85
	Quart	0,8705	976	2 92,5o
Arg.	Risdale d'espèce de 48 schell., de 1720 à 1802	29,508	878	5 75,73
	2 tiers de risdale, ou double plotte de 32 schell.	19,672	878	3 83,82
	Un tiers, ou 16 schellings	9,836	878	1 91,91
	VENISE.			
Or.	Sequin	3,484	1000	12 o
	Demi	1,742	1000	6 o
	Oselle	13,666	1000	47 07
	Ducat	2,175	1000	7 49
	Pistole	6,764	917	21 36
Arg.	Ducat effectif de 8 livres piccolis	22,777	826	4 18
	Écu à la croix	31,788	948	6 70
	Justine ou ducaton	27,954	948	5 91
	Talaro	28,990	826	5 32
	Oselle	9,843	948	2 07
	Ducat cour. de 6⅓ de liv. picc., 124 s. mon. de cte.	» »	»	3 23,95
	Livre de 20 sous	» »	»	o 52,25
	ÉTATS-UNIS D'AMÉRIQUE.			
Or.	Double aigle de 10 dollars	17,480	917	55 21
	Aigle de 5 dollars	8,740	917	27 60,5o
	Demi-aigle, ou 2½ dollars	4,370	917	13 80,25
Arg.	Dollar	27,000	903	5 42
	Demi	13,500	903	2 71
	Un quart	6,750	903	1 35,5o

Métal.	Détermination des pièces.	Poids légal.	Tit. légal.	Valeurs.
	BADE.			
Or.	Pièce de 2 florins	6s800	901	21f04c
	—— de 1 florin	3,400	901	10 52
Arg.	Pièce de 2 florins	25,450	750	4 18
	—— de 1 florin	12,725	750	2 09
	JAPON. (*Par approximation, et faute de renseignem. précis sur le poids et le titre légal des monn.*)			
Or.	Kobang vieux de 100 mas	» »	»	51 24
	Demi —— de 50 mas	» »	»	25 62
	Kobang nouveau de 100 mas	» »	»	32 69
	Demi —— de 50 mas	» »	»	16 34,50
Arg.	Tigo-gin, ou pièce de 40 mas	» »	»	14 40
	Demi de 20 mas	» »	»	7 20
	Un quart de 10 mas	» »	»	3 60
	Un huitième de 5 mas	» »	»	1 80
	MOGOL. (*Par approximation.*)			
Or.	Roupie du Mogol	» »	»	38 72
	Demie	» »	»	19 36
	Un quart	» »	»	9 68
	Pagode au croissant	» »	»	9 46
	—— à l'étoile	» »	»	9 35
	Ducat de la Compagnie hollandaise	» »	»	11 62
	Demi	» »	»	5 81
Arg.	Roupie du Mogol	» »	»	2 42
	—— de Madras	» »	»	2 40
	—— d'Arcate	» »	»	2 36
	—— de Pondichéry	» »	»	2 42
	Double fanon des Indes	» »	»	0 63
	Fanon	» »	»	0 31,50
	Pièce de la Compagnie hollandaise	» »	»	2 40
	PERSE. (*Par approximation.*)			
Or.	Roupie	» »	»	36 75
	Demie	» »	»	18 37,50
Arg.	Double roupie de 5 abassis	» »	»	4 90
	Roupie de 2 $\frac{1}{2}$ abassis	» »	»	2 45
	Abassi	» »	»	0 97
	Mamoudi	» »	»	0 48,50
	Larin	» »	»	1 03
	TURQUIE.			
Or.	Sequin zermahboud d'Abdoul-Hamid, 1774	2,642	958	8 72
	Nislie, ou $\frac{1}{2}$ zermahboud *idem*	1,321	958	4 36
	Roubbié, ou $\frac{1}{4}$ de sequin fondoukli	0,881	802	2 43,33
	Sequin zermahboud de Sélim III	2,642	802	7 30
	Demi	1,321	802	3 65
	Un quart	0,661	802	1 82,50
Arg.	L'altmichlee de 60 paras, depuis 1771	28,822	550	3 52
	Yaremlee de 20 paras, ou 60 aspres, 1757	» »	»	0 99
	Roubb de 10 paras, ou 30 aspres, 1757	» »	»	0 49,50
	Para de 3 aspres, 1773	» »	»	0 04
	Aspre, dont 120 pour la piastre de 1773	» »	»	0 01,33
	Piastre de 40 paras, ou 120 aspres, 1780	18,015	500	2 0
	Pièce de 5 piastres de Mahmoud, 1811	» »	«	4 13,67

FIN.

00051999

Digitized with financial assistance from the
Government of Maharashtra
on 16 January, 2016